УДК 519.83

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ІГРОВОГО ТИПУ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ

Ольховська О. В., аспірант

Полтавський університет економіки і торгівлі

У публікації розглядається доведення збіжності ітераційного методу розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях. Процес доведення збіжності ітераційного методу базується на побудові векторної системи. Досліджені властивості побудованої векторної системи, яка утворюється при реалізації ітераційного алгоритму розв'язуванням комбінаторних оптимізаційних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями, що накладаються на стратегії одного гравця, дають змогу обґрунтувати збіжність ітераційного методу.

Ключові слова: задача комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях, доведення збіжності, векторна система.

Ольховськая Е. В. О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ИГРОВОГО ТИПА НА ПЕРЕСТАНОВКАХ / Полтавский университет экономики и торговли

В публикации рассматривается доказательство сходимости итерационного метода решения задач комбинаторной оптимизации игрового типа на перестановках. Процесс доказательства сходимости итерационного метода базируется на построении векторной системы. Исследованные свойства построенной векторной системы, которая образовывается при реализации итерационного алгоритма решением комбинаторных оптимизационных задач игрового типа с ограничениями-перестановками, которые накладываются на стратегии одного игрока, дают возможность обосновать сходимость итерационного метода.

Ключевые слова: задача комбинаторной оптимизации игрового типа на перестановках, доказательство сходимости, векторная система.

Olkhovskaja E. V. ABOUT CONVERGENCE OF ITERATIVE METHOD FOR SOLVING A COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEM OF A GAME TYPE ON PERMUTATIONS / Poltava University of Economics and Trade

The publication is considered to proof of convergence of the iterative method for solving combinatorial optimization problems on game-type permutations. The process of proving the convergence of the iterative method is based on the construction of the vector system, which is formed in the implementation of the iterative algorithm. Investigated properties of the constructed vector system, which are superimposed on the one player strategy, provide an opportunity to prove the convergence of the iterative method.

Keywords: combinatorial optimization problems on game-type permutations, the proof of convergence, vector system.

ВСТУП

Багато практичних задач описуються і розв'язуються методами комбінаторної оптимізації [1-9]. Реальні конфліктні ситуації, які можна представити у вигляді матричної гри, досить складні і обтяжені великою кількістю суттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці, при розв'язуванні даного класу задач, виникають моделі конфліктних ситуацій, які містять у собі комбінаторні обмеження, що накладаються на стратегії гравців [10-18]. У публікації розглядається задача комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях (ЗКОІТП) та проводиться аналіз доведення збіжності ітераційного методу з [14] для розв'язування цього класу задач. Як показали числові експерименти [17], метод з [14] є збіжним. У роботі теоретично обґрунтовано його збіжність.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях [14]. Уведемо позначення. Нехай P_i^x – елемент мультимножини $P^x=\left\{P_1^x,P_2^x,...,P_M^x\right\}$, що складається з M дійсних чисел, серед яких v різних. Позначимо її основу $S\left(P^x\right)$, а первинну специфікацію – $\left[P^x\right]=\left(\eta_1,...,\eta_v\right)$. Нехай $0\le P_i^x\le 1$, $i\in J_m=\{1,2,...,m\}$, $\sum_{i=1}^{m}P_i^x=1$. Тут і далі J_m – множина m перших натуральних чисел. Позначимо $X=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)$ – вектор-переставлення, елемент x_i – ймовірність застосування стратегії

i – належить P^x, $x^i \in P^x$, а сам вектор належить множині $E_{mv}\left(P^x\right)$ m-переставлень з елементів мультимножини P^x, тобто $X=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)\in E_{mv}\left(P^x\right)$. Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Гра полягає в тому, що перший гравець вибирає стратегію-вектор $X=\left(x_1,x_2,...,x_m\right)\in E_{mv}\left(P^x\right)$, а другий вибирає стратегію-число $j \in J_n$; і при цьому перший гравець платить другому платежі $a'_{1j},...,a'_{mj}$ з ймовірностями $x_1,...,x_m$ відповідно, де a'_{ij} – задані дійсні числа $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_n$.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Розвиток та дослідження комбінаторних оптимізаційних задач [1-9], моделювання конфліктних ситуацій сприяло виникненню нового класу задач – комбінаторної оптимізації ігрового типу з комбінаторними обмеженнями на стратегії одного гравця, що визначаються переставленнями та розміщеннями [10-18]. Математичні моделі таких комбінаторних задач ігрового типу виникають у різних сферах людської діяльності: екології, соціології та інших, а отже, потребують методів для розв'язування. Деякі з цих задач на переставленнях та розроблені для них методи розв'язання розглянуто в працях [11, 12, 14, 16, 17].

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Позначимо A' матрицю, з елементами a'_{ij}. Середній платіж (математичне сподівання) першого гравця другому (при виборі стратегії $x^i = \left(x_{1i},...,x_{mi}\right)\in E_{mv}\left(P^x\right)$, і стратегії $j \in J_n$ відповідно 1-м і 2-м гравцям, $i \in J_k$) виражається функцією

$$F\left(x^i, j\right) = \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} = a_{ij}, \tag{1}$$

де $k = \left|E_{Mv}\left(P^x\right)\right| = \dfrac{M!}{\eta!,...,\eta_v!}$.

Для пошуку розв'язку гри введемо поняття мішаних стратегій для такої гри. Позначимо

$$S_k = \left\{ p = \left(p_1,p_2,...,p_k\right),\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \ge 0 \right\};$$

$$S_n = \left\{ q = \left(q_1,...,\ q_n\right),\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \ge 0 \right\}.$$

Мішаною стратегією першого гравця є елемент $p \in S_k$. Це вектор $p=\left(p_1,p_2,...,p_k\right)$, де $p_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. Тут k – кількість елементів в $E_{Mv}\left(P^x\right)$. Аналогічно мішаною стратегією гравця 2 є елемент $q \in S_n$. Тобто вектор $q=\left(q_1,...,\ q_n\right)$, такий, що $q_j \ge 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Числа p_i, q_j є ймовірностями застосування стратегій $\tilde{o}^i$ та j першого і другого гравців відповідно. Якщо $p_e = 1$ $(q_e = 1)$, а отже $p_i = 0\ \forall i \ne e$ $(q_j = 0,\ \forall j \ne e)$, то мішана стратегія $\left(p_1,...,\ p_k\right)$ означає, що з ймовірністю 1 застосовується чиста стратегія e гравця 1, а мішана стратегія $\left(q_1,...,\ q_n\right)$ – означає, що з ймовірністю 1 застосовується чиста стратегія x^e – гравця 2 відповідно.

Якщо гравець 1 застосовує свою мішану стратегію $p=\left(p_1,...,\ p_k\right)$, а 2-й – $q=\left(q_1,...,\ q_n\right)$, то платою гравця 1 гравцю 2 буде величина $F\left(p,q\right)$, яка є математичним сподіванням випадкової величини, що полягає в реалізації випадкової величини – платежу a_{ij} одночасному настанні випадкових подій: вибір стратегії x^i першим гравцем та вибір стратегії j – другим. Ця випадкова величина значення a_{ij} $\forall i \in J_k$, $\forall j \in J_n$ приймає з ймовірністю $p_i q_j$ (добуток p_i та q_j):

$$F(p,q) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} p_i q_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j , \qquad (2)$$

де p_i – ймовірність вибору x^i, а q_j – ймовірність вибору j.

Природно, що очікуваний виграш другого гравця також обчислюється за формулою (2), оскільки гра є грою з нульовою сумою.

Нескладні міркування показують, що гравець 1 може забезпечити собі програш не більше

$$\min_{p \in S_k} \max_{q \in S_n} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j , \qquad (3)$$

а гравець 2 може забезпечити собі виграш не менше

$$\max_{q \in S_n} \min_{p \in S_k} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j . \qquad (4)$$

Якщо $\left(p^*, q^*\right)$ – сідлова точка функції $F(p,q)$, що визначається (2), тобто виконуються нерівності

$$F\left(p^*, q\right) \le F\left(p^*, q^*\right) \le F\left(p, q^*\right),$$

то p^*, q^* називають оптимальними мішаними стратегіями гравців 1 та 2 відповідно. У цьому випадку, як відомо:

$$F\left(p^*, q^*\right) = \max_{q \in S_n} \min_{p \in S_k} F(p,q) = \min_{p \in S_k} \max_{q \in S_n} F(p,q).$$

При цьому будемо казати, що ЗКОІТР має розв’язок у мішаних стратегіях, а $F\left(p^*, q^*\right)$ – ціна гри.

Розглянемо $k \times n$ матрицю $A = \left(a_{ij}\right)$, де a_{ij} обчислюється за (1). Нехай ймовірність вибору першим гравцем i-го рядка матриці A (тобто переставлення $x^i \in E_{mv}\left(P^x\right)$) дорівнює p_i, а ймовірність обрати другим гравцем її j-й стовпчик – q_j, де $p_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $q_j \ge 0$ $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Математичне сподівання платежу першого гравця за (2) дорівнює $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$.

Представимо $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$, як $p_1 \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + \ldots + p_m \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = q_1 \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i + \ldots + q_n \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$.

Замінивши $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ на $\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ з лівого боку в останній рівності на $\max_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$ з правого боку та враховувавши, що суми $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ та $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, одержимо:

$$\min_{1 \le i \le k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \le \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i ,$$

або

$$\min_{з} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \max_{j} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \,. \qquad (5)$$

З основної теореми теорії ігор [19] випливає, що існують деякі вектори $p^* \in S_k$, $q^* \in S_n$, що в (5) досягається рівність, а значення υ ціни гри таке: $\upsilon = \min_{1\leq i\leq k} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_i^* = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i^*$, де $\left(p^*, q^*\right)$ – оптимальні мішані стратегії.

Для розв'язування ЗКОІТП запропоновано ітераційний метод [14]. Ідея ітераційного методу така. Розігрується гра, у якій супротивники застосовують свої стратегії. Експеримент складається з послідовності ходів. Гра починається з того, що один із гравців обирає довільно одну зі своїх стратегій, інший на це відповідає своєю стратегією, котра йому найбільш вигідна (отже найменш вигідна супротивнику) і т. д. У кожній партії, коли настає черга гравця вибирати стратегію, інший відповідає своєму противнику тією своєю чистою стратегією, яка є найгіршою для противника з урахуванням усіх його попередніх виборів. Сукупність ходів розглядається як своєрідна «мішана стратегія», де чисті стратегії змішані в пропорціях, відповідних частоті їх застосування в минулому. Такий спосіб є моделлю реального практичного «взаємного навчання» гравців, коли кожен з них на досвіді досліджує спосіб поведінки супротивника.

Нагадаємо позначення та формули ітераційного методу з [14, 17], які використовуються і далі. Позначатимемо A матрицю, яка складається з елементів a_{ij} за (1). Нехай B_j – стовпці матриці A $j \in J_n$, а $x^i = \left(x_{1i}, ..., x_{mi}\right)$ та j – стратегії 1-го і 2-го гравців відповідно $x^i \in E_{mv}\left(P^x\right)$, $i \in J_k$, $j \in J_n$. Тут, як і далі, N – кількість ітерацій методу.

При реалізації алгоритму методу з [14] утворюються послідовність n-вимірних векторів чисел $SUM_L\left(0\right)$, $SUM_L\left(1\right)$, … та послідовності k-вимірних векторів чисел $SUM_R\left(0\right)$, $SUM_R\left(1\right)$, …. На нульовій ітерації ці вектори нульові: $SUM_L\left(0\right) = \overline{0}_L$, $SUM_R\left(0\right) = \overline{0}_R$, де $\overline{0}_L$, $\overline{0}_R$ – відповідної довжини нульові вектори. На $N+1$ кроці алгоритму вектор $SUM_L\left(N+1\right)$ є сумою вектора $SUM_L\left(N\right)$ на кроці N та вектора скалярних добутків $sum_L\left(N+1\right) = \left(\left(B_1, x^{i^*}\left(N\right)\right), \left(B_2, x^{i^*}\left(N\right)\right), ..., \left(B_j, x^{i^*}\left(N\right)\right), ..., \left(B_n, x^{i^*}\left(N\right)\right)\right)$ на кроці $N+1$, тобто, $SUM_L\left(N+1\right) = SUM_L\left(N\right) + sum_L\left(N+1\right)$, де $\left(B_j, x^i\left(N\right)\right)$ – скалярний добуток векторів B_j та x^{i^*}, а $x^{i^*} = \arg \min_{x^i \in E_{mv}\left(P^x\right)} \left(x; SUM_R\left(N\right)\right)$.

На $N+1$ кроці алгоритму вектор $SUM_R\left(N+1\right)$ є сумою векторів B_j та $SUM_R\left(N\right)$ на кроці N, тобто $SUM_R\left(N+1\right) = SUM_R\left(N\right) + B_j$, де номер j стовпця B_j знаходиться з умови: $\left(SUM_L\left(N\right)\right)_j = \max_{1\leq t\leq n} \left\{\left(SUM_L\left(N\right)\right)_1, ..., \left(SUM_L\left(N\right)\right)_t, ..., \left(SUM_L\left(N\right)\right)_n\right\}$, а $\left(SUM_L\left(N\right)\right)_t$ – це t-та координата вектора $SUM_L\left(N\right)$, $t \in J_n$.

Оскільки $\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \geq \upsilon$ виконується для $\forall j \in J_n$, у тому числі й для того, на якому досягається максимум у лівій частині $\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \geq \upsilon$, а $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \upsilon$ виконується для $\forall i \in J_k$ у тому числі і для того i, для якого досягається мінімум у правій частині, то ціна гри задовольняє нерівність:

$$\min_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \frac{\min_{x^i \in E_{Mv}\left(P^x\right)} \left(SUM_R(N), \mathrm{x}^i\right)}{N} \leq \upsilon \leq \frac{\max_{j} \left(SUM_L(N)\right)_j}{N} \leq \max_{j} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \,. \qquad (6)$$

Введемо в розгляд означення векторної системи.

Означення векторної системи. Система $\left(SUM_L(N), SUM_R(N)\right)$, яка складається з послідовності n-вимірних векторів чисел $SUM_L(0)$, $SUM_L(1)$, … та послідовності k-вимірних векторів чисел $SUM_R(0)$, $SUM_R(1)$, … називається векторною системою для матриці A, якщо виконуються такі умови:

1. $SUM_L(0) = \overline{0}_L$, $SUM_R(0) = \overline{0}_R$, де $\overline{0}_L$, $\overline{0}_R$ – відповідної довжини нульові вектори.

2. Вектор $SUM_L(N+1)$ є сумою вектора $SUM_L(N)$ на кроці N та вектора скалярних добутків $sum_L(N+1) = \left(\left(B_1, x^{i*}(N)\right), \left(B_2, x^{i*}(N)\right), \ldots, \left(B_j, x^{i*}(N)\right), \ldots, \left(B_n, x^{i*}(N)\right)\right)$ на кроці $N+1$:

$SUM_L(N+1) = SUM_L(N) + sum_L(N+1)$,

де $\left(B_j, x^i(N)\right)$ – скалярний добуток векторів B_j та x^{i*}, а

$$x^{i*} = \arg \min_{x^i \in E_{mv}\left(P^x\right)} \left(x; SUM_R(N)\right). \tag{7}$$

3. Вектор $SUM_R(N+1)$ є сумою векторів B_j та $SUM_R(N)$ на кроці N:

$SUM_R(N+1) = SUM_R(N) + B_j$,

де номер j стовпця B_j знаходиться з умови:

$$\left(SUM_L(N)\right)_j = \max_{1 \le t \le n} \left\{\left(SUM_L(N)\right)_1, \ldots, \left(SUM_L(N)\right)_t, \ldots, \left(SUM_L(N)\right)_n\right\},$$

а $\left(SUM_L(N)\right)_t$ – це t-та координата вектора $SUM_L(N)$, $t \in J_n$.

Вектори $SUM_L(N)$ та $SUM_R(N)$ назвемо векторами накопичених сум.

Зауваження 1. Мінімум у (7) знаходиться відповідно до теореми 3.1 [4].

Зауваження 2. Максимальний елемент вектора $SUM_L(0)$ дорівнює мінімальному елементу вектора $SUM_R(0)$, тому що вони нульові вектори, тобто:

$$\max_{1 \le j \le n} SUM_L(0) = \min_{1 \le i \le k} SUM_R(0) = 0.$$

Очевидно, що у випадку, коли гра має розв'язок у мішаних стратегіях і $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i = \upsilon$ то і

$$\frac{\min\limits_{x^i \in E_{Mv}\left(P^x\right)} \left(SUM_R(N), \mathrm{x}^i\right)}{N} = \frac{\max\limits_j \left(SUM_L(N)\right)_j}{N} = \upsilon.$$

Доведемо, що $\dfrac{\max\limits_j \left(SUM_L(N)\right)_j}{N}$ при будь-якій стратегії не може бути менша $\dfrac{\min\limits_{x^i \in E_{Mv}\left(P^x\right)} \left(SUM_R(N), \mathrm{x}^i\right)}{N}$ при оптимальній стратегії, тобто менша υ, а також відсутня така стратегія, для якої б виконувалося:

$$\upsilon > \frac{\max\limits_j \left(SUM_L(N)\right)_j}{N}.$$

Доведення даного факту проводиться відповідно до теореми 2.8 [19, с. 52]. Нехай величина $F(p,q)$ – математичне сподівання виграшу в прямокутній матриці розмірності $m \times n$ та ціною гри υ. Тоді, для того, щоб елемент p^* множини S_k був оптимальною стратегією для p, необхідно та достатньо, щоб для кожного елементу q множини S_n мала місце нерівність:

$$\upsilon \le F\left(p^*, q\right).$$

Аналогічно, для того, щоб елемент q^* множини S_n був оптимальною стратегією для q, необхідно та достатньо, щоб для кожного елементу p множини S_k мала місце нерівність:

$$F\left(p, q^*\right) \le \upsilon.$$

Доведення цього факту розглянуто в [19, с.53].

Вибір x^i в (6) означає вибір i -го рядка в матриці вимірності $k \times n$ $A = \left(a_{ij}\right)$, де a_{ij} обчислюється за (1), що зводить векторну систему $\left(SUM_L(N), SUM_R(N)\right)$ до векторної системи (U, V) [20]. Утворена векторна система $\left(SUM_L(N), SUM_R(N)\right)$ у методі для розв'язування ЗКОІТП аналогічно утворюється векторна система (U, V) для метода Брауна-Робінсон. Доведення збіжності ітераційного методу розв'язування ігрових задач з обмеженнями, що визначаються переставленнями на стратегії одного гравця є аналогічним доведення збіжності методу Браун-Робінсон [21] для матричної гри з матрицею A викладене в [20].

ВИСНОВКИ

Для розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями, що накладаються на стратегії одного гравця, у [14] розроблено ітераційний метод. Проведені числові експерименти [17] показали його ефективність та збіжність. У даній роботі обґрунтовано його збіжність.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко. – К. : Наукова думка, 1988. – 472 с.
3. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании / О. А. Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
4. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
5. Ємець О. О. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, С. І. Недобачій. – Полтава : Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП «Легат», 1999. Ч. 1. – 64 с. Ч. 2. – 32 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488.
6. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія і методи : Монографія / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : ПУСКУ, 2005. – 103 с.
7. Емец О. А. Задачи комбинаторной оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями : Монография [Электронный ресурс] / О. А. Емец, Л. Н. Колечкина. – К. : Наукова думка, 2005. – 117 с. – Режим доступу: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474.
8. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язуванння: Монографія [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : ПУСКУ, 2006. – 129 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377.
9. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях [Электронный ресурс] / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473.
10. Емец О. А. Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2007. – № 6. – С. 103-114.
11. Ємець О. О. Розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2007. – № 3. – С. 47-52.

12. Емец О. А. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 37-47.
13. Емец О. А. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 1. – С. 26-36.
14. Ємець О. О. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 3. – С.5-10.
15. Емец О. А. Игры с комбинаторными ограничениями / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2008. – № 4. – С.134-141.
16. Емец О. А. Итерационный метод решения комбинаторных оптимизационных задач игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 69-78.
17. Ємець О. О. Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців: ітераційний метод / О. О. Ємець, О. В. Ольховська // Системні дослідження та інфораційні технології . – №4. – С. 80-93.
18. Емец О. А. Доказательство сходимости итерационного метода решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская // Кибернетика и сист. анализ. – 2013. – № 1. – С. 102-114.
19. Дж. Макс Кинси. Введения в теорию игр : пер. с англ. / Дж. Макс Кинси ; пер. с англ. И. В. Соловьев. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 422 с.
20. Robinson J. An iterative method of solving a game / J. Robinson // The Annals of Mathematics, Second Series. – Vol. 54, No. 2. – 1951. – P. 296-301.
21. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. Изд. 2-е, стереотип / Е. С. Вентцель. – М. : Физматгиз, 1961. – 68 с.

УДК 531.37 : 531.395

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ МЕЩЕРСКОГО ДЛЯ СКОРОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ШАРА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ УБЫВАНИЕМ РАДИУСА

Ольшанский В. П., д. ф.-м. н., *Ольшанский С. В., к. ф.-м. н.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства,

**Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*

В функциях Уиттекера построено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения, описывающее вертикальное движение шара, убывающих радиуса и массы по экспоненциальному закону при квадратично-полиномиальном сопротивлении среды. Проанализированы результаты расчётов при падении и вертикальном подъёме шара.

Ключевые слова: сферическая частица, убывание массы, реактивная сила, специальные функции.

Ольшанський В. П., *Ольшанський С. В. ПРО РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ МЕЩЕРСЬКОГО ДЛЯ ШВИДКОСТІ ВЕРТИКАЛЬНОГО РУХУ КУЛІ З ЕКСПОНЕНТНИМ УБУВАННЯМ РАДІУСА / Харківський національний технічний університет сільського господарства, *Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна

У функціях Уіттекера побудовано аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння, яке описує вертикальний рух кулі, радіус і маса якої зменшуються по експонентному закону за квадратично-поліноміального опору середовища. Проаналізовано результати розрахунків при падінні та вертикальному підйомі кулі.

Ключові слова: сферична частка, убування маси, реактивна сила, спеціальні функції.

Olshanskii V. P., *Olshanskii S. V. ABOUT A SOLUTION OF A MESHCHERSKY EQUATION FOR VELOCITY OF A VERTICAL MOTION OF A SPHERE WITH EXPONENTIALLY DECREASING OF A RADIUS / Kharkov State Technical University of Agriculture, *National Technical University «Kharkov Polytechnical Institute», Ukraine

An analytical solution of the nonlinear differential equations describing the vertical motion of the ball in Whittaker functions is constructed, which decreasing radius and mass exponentially with quadratic polynomial resisting medium. Results of calculation for the fall and the vertical lift of the ball were analyzed.

Keywords: spherical particle, decreasing mass, reactive force, special functions.