12. Емец О. А. Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 37-47.
13. Емец О. А. Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 1. – С. 26-36.
14. Ємець О. О. Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 3. – С.5-10.
15. Емец О. А. Игры с комбинаторными ограничениями / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и сист. анализ. – 2008. – № 4. – С.134-141.
16. Емец О. А. Итерационный метод решения комбинаторных оптимизационных задач игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 69-78.
17. Ємець О. О. Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців: ітераційний метод / О. О. Ємець, О. В. Ольховська // Системні дослідження та інфораційні технології . – №4. – С. 80-93.
18. Емец О. А. Доказательство сходимости итерационного метода решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская // Кибернетика и сист. анализ. – 2013. – № 1. – С. 102-114.
19. Дж. Макс Кинси. Введения в теорию игр : пер. с англ. / Дж. Макс Кинси ; пер. с англ. И. В. Соловьев. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 422 с.
20. Robinson J. An iterative method of solving a game / J. Robinson // The Annals of Mathematics, Second Series. – Vol. 54, No. 2. – 1951. – P. 296-301.
21. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. Изд. 2-е, стереотип / Е. С. Вентцель. – М. : Физматгиз, 1961. – 68 с.

УДК 531.37 : 531.395

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ МЕЩЕРСКОГО ДЛЯ СКОРОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ШАРА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ УБЫВАНИЕМ РАДИУСА

Ольшанский В. П., д. ф.-м. н., *Ольшанский С. В., к. ф.-м. н.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства,

**Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»*

В функциях Уиттекера построено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения, описывающее вертикальное движение шара, убывающих радиуса и массы по экспоненциальному закону при квадратично-полиномиальном сопротивлении среды. Проанализированы результаты расчётов при падении и вертикальном подъёме шара.

Ключевые слова: сферическая частица, убывание массы, реактивная сила, специальные функции.

Ольшанський В. П., *Ольшанський С. В. ПРО РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ МЕЩЕРСЬКОГО ДЛЯ ШВИДКОСТІ ВЕРТИКАЛЬНОГО РУХУ КУЛІ З ЕКСПОНЕНТНИМ УБУВАННЯМ РАДІУСА / Харківський національний технічний університет сільського господарства, *Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна

У функціях Уіттекера побудовано аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння, яке описує вертикальний рух кулі, радіус і маса якої зменшуються по експонентному закону за квадратично-поліноміального опору середовища. Проаналізовано результати розрахунків при падінні та вертикальному підйомі кулі.

Ключові слова: сферична частка, убування маси, реактивна сила, спеціальні функції.

Olshanskii V. P., *Olshanskii S. V. ABOUT A SOLUTION OF A MESHCHERSKY EQUATION FOR VELOCITY OF A VERTICAL MOTION OF A SPHERE WITH EXPONENTIALLY DECREASING OF A RADIUS / Kharkov State Technical University of Agriculture, *National Technical University «Kharkov Polytechnical Institute», Ukraine

An analytical solution of the nonlinear differential equations describing the vertical motion of the ball in Whittaker functions is constructed, which decreasing radius and mass exponentially with quadratic polynomial resisting medium. Results of calculation for the fall and the vertical lift of the ball were analyzed.

Keywords: spherical particle, decreasing mass, reactive force, special functions.

ВВЕДЕНИЕ

Уменьшение размеров и массы тела приходится учитывать при расчёте движения сгорающих частиц твёрдых и жидких топлив, испаряющихся капель огнетушащих веществ, падающих метеоритов и пр. Поэтому, кроме ракетодинамики, баллистика тел переменной массы имеет широкий спектр других технических приложений. За длительный период развития этого раздела теоретической механики получено много решений линейных задач баллистики. В то же время точных аналитических решений нелинейных задач очень мало, что сдерживает разработки адекватных нелинейных моделей полёта. Например, при расчётах движения испаряющихся капель огнетушащих веществ, которые важны в пожаротушении, авторы монографии [1] вынуждены, ограничиться применением приближённых аналитических решений нелинейных уравнений полёта без оценки погрешности метода. Поэтому построение точных аналитических решений нелинейных уравнений баллистики частиц переменной массы остаётся актуальной задачей.

Простейшие линейные задачи баллистики капли, как шара, у которого радиус изменяется пропорционально времени полёта, а сила аэродинамического сопротивления пропорциональна скорости движения, решаются в элементарных функциях и помещены в задачник И.В. Мещерского [2]. Некоторые аналитические решения задач полёта шаровидной капли переменного радиуса были получены В.С. Новоселовым [3] в рамках линейной модели аэродинамического сопротивления. Однако, как показывают опыты, изложенные Н.А. Фуксом [4], процесс движения сферической капли лучше описывается квадратичной зависимостью силы аэродинамического сопротивления от скорости полёта. Такой вывод присутствует также в работах А.А. Космодемьянского [5], применительно к движению ракет. Использование квадратичной зависимости приводит к нелинейным задачам баллистики, которые в отдельных случаях решаются аналитически с помощью функций Бесселя или Эйри [6-10]. Оказывается, что вид аналитического решения зависит от закона изменения радиуса частицы во времени. В отличие от публикаций [6-10], здесь используется показательный закон уменьшения радиуса летящей шаровидной частицы. Впервые экспоненциальный закон уменьшения массы летящей материальной точки ввёл К.Э. Циолковский [11] при рассмотрении движения ракеты. В дальнейшем этот закон использовали в своих исследованиях А.А. Космодемьянский [12], В.В. Белецкий [13] и др. Отличительной чертой данной работы является то, что кроме экспоненциального убывания массы шара, в ней учитывается соответствующее убывание и его радиуса, как однородного тела, что влияет на силу сопротивления движению, пропорциональную площади миделевого сечения тела. Сила аэродинамического сопротивления оказывается зависимой не только от скорости движения, а и от закона убывания массы.

Целью статьи является построение аналитического решения нелинейной задачи баллистики, соответствующей указанным выше допущениям и анализ результатов, к которым оно приводит. При рассмотрении полёта, кроме сил гравитации и аэродинамического сопротивления, учитывается также действие реактивной силы с привлечением гипотезы К.Э. Циолковского и без неё. В обоих случаях определение скорости движения частицы сводится к решению задачи Коши для уравнения Риккати, на что в своё время обращал внимание И.В. Мещерский [14].

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БАЛЛИСТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГИПОТЕЗЫ К.Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Согласно принятым предположениям, уменьшение радиуса шара r во времени t описывается показательной функцией

$$r = r(t) = r_0 \exp(-\lambda t),$$

где r_0 – начальное значение радиуса; λ – параметр, определяющий скорость уменьшения r.

Силу аэродинамического сопротивления аппроксимируем зависимостью

$$F_c = \pi r^2 \left(k_1 \upsilon + k_2 \upsilon^2\right),$$

в которой υ – скорость движения шара; k_1, k_2 – коэффициент сопротивления внешней среды.

Реактивную силу определяем выражением

$$F_p = \mu \upsilon_r \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\rho \pi r^3\right),$$

где ρ – плотность шара; $0 \le \mu \le 1$ – коэффициент реактивности, связанный с тем, что только часть отделяющейся от шара массы с относительной скоростью υ_r, образует направленную реактивную силу в сторону движения.

Если отделение частиц от шара равномерно – всестороннее, то $\mu = 0$ и нет направленной реактивной силы. Такие случаи движения частиц переменного радиуса рассматривались в [8].

Согласно гипотезе К.Э. Циолковского, $\upsilon_r = const$ [11].

На основании второго закона Ньютона, а также с учётом отмеченных выше допущений, скорость вертикального движения шара в однородном поле гравитации является решением дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{d\upsilon}{dt} - 3\lambda\upsilon_r + \frac{3}{4\rho r}\left(k_1\upsilon + k_2\upsilon^2\right) = \pm g, \tag{1.1}$$

в котором g – ускорение свободного падения; знак плюс перед g соответствует движению шара вниз, а минус – движению вверх.

С целью компактности записи в (1.1) принято $\mu\upsilon_r = \upsilon_r$, т.е. наличие коэффициента μ учли введением поправки на значение относительной скорости отделения частиц от шара.

Переходя от переменной μ к переменной ξ по формулам:

$$\xi = \exp(\lambda t); \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \lambda\xi\frac{d\upsilon}{d\xi}; \quad r\xi = r_0,$$

уравнение (1.1) сводим к виду

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} - \frac{3\upsilon_r}{\xi} + \beta_1\upsilon + \beta_2\upsilon^2 = \pm\frac{g_0}{\xi}. \tag{1.2}$$

Здесь $\beta_{1,2} = \frac{3}{4\rho\lambda r_0}k_{1,2}$; $g_0 = \frac{g}{\lambda}$.

Найдём частное решение уравнения (1.2) при начальном условии

$$\upsilon(1) = \upsilon_0, \tag{1.3}$$

приняв значение стартовой скорости равным υ_0.

Выделив в (1.2) полный квадрат, сводим его к более компактной форме

$$\frac{d\upsilon_1}{d\xi} + \beta_2\upsilon_1^2 = \frac{\beta_1^2}{4\beta_2} + \frac{3\upsilon_r \pm g_0}{\xi}. \tag{1.4}$$

где $\upsilon_1 = \upsilon + \frac{\beta_1}{2\beta_2}$.

Выразив искомую функцию υ_1 через вспомогательную функцию $w(\xi)$ по формуле [8]

$$\upsilon_1 = \frac{1}{\beta_2}w^{-1}\frac{dw}{d\xi}, \tag{1.5}$$

после подстановки выражения (1.5) в (1.4), приходим к каноническому уравнению Уиттекера

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\chi}{\eta}\right)w = 0. \tag{1.6}$$

В нём $\chi = -\frac{\beta_2}{\beta_1}(3\upsilon_r \pm g_0)$; $\eta = \beta_1\xi$.

Общим решением уравнения (1.6) есть [15]

$$w(\eta) = c_1 M_{\chi,1/2}(\eta) + c_2 W_{\chi,1/2}(\eta). \tag{1.7}$$

Здесь c_1, c_2 – произвольные постоянные; $M_{\chi,1/2}(\eta), W_{\chi,1/2}(\eta)$ – функции Уиттекера.

Подставив (1.7) в (1.5), с учётом того, что [15]

$$\frac{d}{d\eta}\left(M_{\chi,b}(\eta)\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\chi}{\eta}\right)M_{\chi,b}(\eta)+\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{2}+\chi+b\right)M_{\chi+1,b}(\eta);$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(W_{\chi,b}(\eta)\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\chi}{\eta}\right)W_{\chi,b}(\eta)-\frac{1}{\eta}W_{\chi+1,b}(\eta), \tag{1.8}$$

получаем

$$\upsilon(\eta)=\frac{\beta_1}{\beta_2\eta}\left(\frac{c(1+\chi)M_{\chi+1,1/2}(\eta)-W_{\chi+1,1/2}(\eta)}{cM_{\chi,1/2}(\eta)+W_{\chi,1/2}(\eta)}-\chi\right). \tag{1.9}$$

Произвольную постоянную $c=c_1c_2^{-1}$ находим, используя начальное условие (1.3). Она принимает значение

$$c=\frac{\upsilon^*W_{\chi,1/2}(\beta_1)+W_{\chi+1,1/2}(\beta_1)}{(1+\chi)M_{1+\chi,1/2}(\beta_1)-\upsilon^*M_{\chi,1/2}(\beta_1)},$$

причём $\upsilon^*=\beta_2\upsilon_0+\chi$.

Используя асимптотику функций Уиттекера большого аргумента

$$M_{a,b}(\eta)\sim\frac{\Gamma(2b+1)\eta^{-a}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+b-a\right)}\exp\left(\frac{\eta}{2}\right);\quad W_{a,b}(\eta)\sim\eta^a\exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \tag{1.10}$$

в которой $\Gamma(x)$ – гамма-функция, с помощью решения (1.9) находим аппроксимацию $\upsilon(\eta)$ для падающего шара при больших η или t

$$\upsilon(t)\sim\frac{g_0+3\upsilon_r}{\eta}=\frac{g_0+3\upsilon_r}{\beta_1}\exp(-\lambda t). \tag{1.11}$$

Как следует из (1.11), скорость падения асимптотически стремится к нулю, чего нет при падении шара постоянного радиуса и массы.

Численные расчёты. Рассмотрим движение шара вниз. Проведём расчёт $\upsilon(t)$ при $r_0=5\cdot10^{-2}$ м; $k_1=5\cdot10^{-1}$ кг/м²/с; $k_2=2{,}5\cdot10^{-1}$ кг/м³; $\lambda=1$ с⁻¹; $\rho=1000$ кг/м³; $\upsilon_r=5$ м/с и различных значениях υ_0 .

На рис. 1 цифрами 1, 2, 3 отмечены, рассчитанные по формуле (1.9) кривые, соответствующие значениям $\upsilon_0=10;30;50$ м/с, а цифрой 4 – по асимптотической формуле (1.11). Результаты расчётов подтверждают то, что с течением времени значения $\upsilon(t)$, которые даёт аналитическое решение, стремятся к асимптотическим значениям (1.11), независимо от υ_0 .

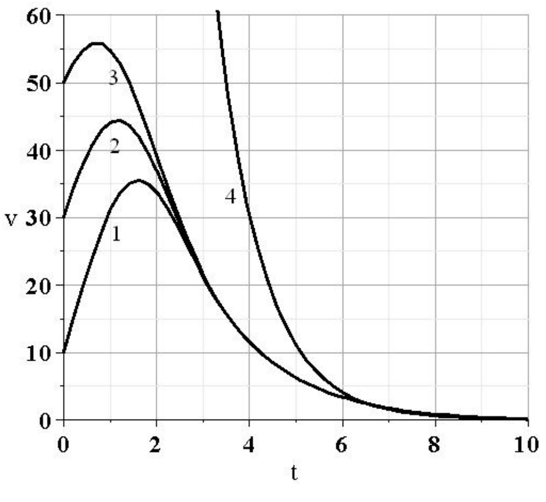

Рис. 1. Зависимости скорости падения от времени для различных υ_0 при $\upsilon_r=const$

Если υ_0 удовлетворяет неравенству $k_1\upsilon_0 + k_2\upsilon_0^2 < \frac{4}{3}\rho r_0\left(g + 3\lambda\upsilon_r\right)$, то скорость падения имеет максимум. Условия наличия максимума скорости вертикального падения шара, у которого радиус убывает по закону Срезневского, определены в работе [8].

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БАЛЛИСТИКИ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГИПОТЕЗЫ К.Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Вместо указанной гипотезы введём предположение о том, что абсолютная скорость отделяющихся от шара частиц равна нулю или $\upsilon_r = \upsilon$. Тогда вместо (1.2) уравнением движения шара будет

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} - \frac{3\mu}{\xi}\upsilon + \beta_1\upsilon + \beta_2\upsilon^2 = \pm\frac{g_0}{\xi}.$$

Введением вспомогательной функции

$$\upsilon_2 = \upsilon + \frac{1}{2\beta_2}\left(\beta_1 - \frac{3\mu}{\xi}\right) \tag{2.1}$$

его сводим к виду

$$\frac{d\upsilon_2}{d\xi} + \beta_2\upsilon_2^2 = \frac{\beta_1^2}{4\beta_2} + \frac{1}{\xi}\left(g_0 - \frac{3\mu\beta_1}{2\beta_2}\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{3\mu}{2\beta_2}\left(1 + \frac{3\mu}{2}\right). \tag{2.2}$$

Чтобы избавится в (2.2) от υ_2^2 положим

$$\upsilon_2 = \frac{1}{\beta_2}w^{-1}\frac{dw}{d\xi}. \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.2), приходим к канонической форме уравнения Уиттекера

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{a}{\eta} - \frac{1-4b^2}{4\eta^2}\right)w = 0. \tag{2.4}$$

В нём $a = \frac{3\mu}{2} \mp \frac{g_0\beta_2}{\beta_1}$; $b = \frac{1}{2}\left|1 + 3\mu\right|$.

Общим решением уравнения (2.4) является сумма

$$w(\eta) = c_3M_{a,b}(\eta) + c_4W_{a,b}(\eta), \tag{2.5}$$

в которой c_3, c_4 – произвольные постоянные; $M_{a,b}(\eta), W_{a.b}(\eta)$ – функции Уиттекера.

Продифференцировав согласно (2.3) решение (2.5), с учётом выражений (1.8) и (2.1), получаем формулу скорости вертикального движения шара с точностью до произвольной постоянной $c_5 = c_3c_4^{-1}$

$$\upsilon(\eta) = \frac{\beta_1}{\beta_2\eta}\left[\frac{\left(\frac{1}{2} + a + b\right)c_5M_{a+1,b}(\eta) - W_{a+1,b}(\eta)}{c_5M_{a,b}(\eta) + W_{a,b}(\eta)} + \frac{3\mu}{2} - a\right]. \tag{2.6}$$

Если

$$c_5 = \frac{\left(\beta_2\upsilon_0 + a - \frac{3\mu}{2}\right)W_{a,b}(\beta_1) + W_{a+1,b}(\beta_1)}{\left(\frac{1}{2} + a + b\right)M_{a+1,b}(\beta_1) - \left(\beta_2\upsilon_0 + a - \frac{3\mu}{2}\right)M_{a,b}(\beta_1)},$$

то решение (2.6) удовлетворяет начальному условию (1.3).

Из (1.10) и (2.6) следует, что при больших t скорость падающего шара имеет асимптотику, аналогичную (1.11)

$$\upsilon(t) \sim \frac{g_0}{\beta_1}\exp(-\lambda t). \tag{2.7}$$

Численные расчёты. Рассмотрим движение шара вниз. Проведём расчёт $\upsilon(t)$ при $r_0 = 5\cdot10^{-2}$ м; $k_1 = 5\cdot10^{-1}$ кг/м^2/с; $k_2 = 2{,}5\cdot10^{-1}$ кг/м^3; $\lambda = 1$ с$^{-1}$; $\rho = 1000$ кг/м^3; $\mu = 0{,}1$ и различных значениях υ_0.

На рис. 2 цифрами 1, 2, 3 отмечены, рассчитанные по формуле (2.6) кривые, соответствующие значениям $\upsilon_0 = 10; 30; 50$ м/с, а цифрой 4 – по асимптотической формуле (2.7). Результаты расчётов подтверждают то, что при больших t аналитическое решение имеет асимптотику (2.7), независимо от υ_0.

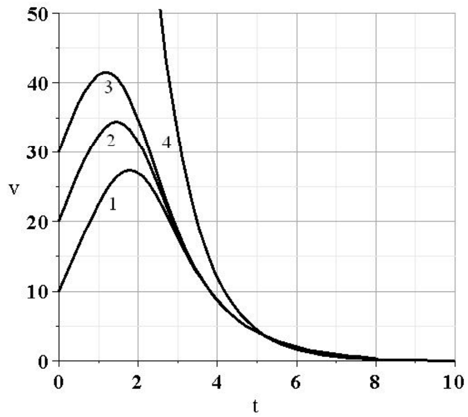

Рис. 2. Зависимости скорости падения от времени для различных υ_0 при $\upsilon_r = \upsilon$

Если υ_0 удовлетворяет неравенству $\frac{3}{4\rho r_0}\left(k_1\upsilon_0 + k_2\upsilon_0^2\right) - 3\lambda\mu\upsilon_0 < g$, то скорость падения шара имеет максимум.

ВЫВОДЫ

В результате введения новой переменной в дифференциальное уравнение вертикального движения шара, радиус которого уменьшается во времени по показательному закону, его удалось свести к уравнению, решение которого выражается в функциях Уиттекера. При определённых начальных значениях скорость падающего шара убывающей массы имеет максимум. Эта особенность скорости падения шара является общей закономерностью. Она наблюдается и при других законах изменения размеров и массы [7], [8], но количественные характеристики экстремума зависят от конкретного варианта изменения параметров частицы.

Подчеркнём, что в отличие от движения ракет, вызванных действием реактивной силы, при полёте частицы переменной массы, типа испаряющейся капли, реактивная сила не является главной. Она вызвана лишь неравномерностью поверхностного отделения массы (испарения или сгорания). Поток отделяющейся массы здесь нельзя считать строго направленным в определённом направлении, как из сопла ракеты. Поэтому в уравнении движения слагаемое, учитывающее действие реактивной силы, корректируется введением уменьшающего множителя, который влияет на решение (индекс функции Уиттекера). Особенности вертикального полёта лёгкой частицы переменной массы в основном определяются не действием реактивной силы, а переменным во времени соотношением между силой гравитации и силой аэродинамического сопротивления движению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Севриков В. В. Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты / В. В. Севриков, В. А. Карпенко, И. В. Севриков. – Севастополь : Сев ГТУ, 1996. – 260 с.
2. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.
3. Новосёлов В. С. Аналитическая механика систем с переменными массами / В. С. Новосёлов. – Ленинград : Издательство ленинградского университета, 1969. – 240 с.
4. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде / Н. А. Фукс. – М. : Издательство Академии наук СССР, 1958. – 92 с.
5. Космодемьянский А. А. Механика тел переменной массы Ч.1 / А. А. Космодемьянский. – М. : ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1947. – 84 с.

6. Ольшанский В. П. О нелинейной модели падения испаряющейся капли, как материальной точки переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Механика и машиностроение. – 2006. – № 1. – С. 23-28.

7. Ольшанский В. П. О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Механика и машиностроение. – 2007. – № 1. – С. 25-29.

8. Ol'shanskii V. P. Lower estimate of the flight range of a fire-extinguishing liquid drop / V. P. Ol'shanskii, S. V. Ol'shanskii // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – Vol. 80. – N 4. – P. 697-701.

9. Ol'shanskii V. P. Vertical motion of a spherical body with decreasing mass / V. P. Ol'shanskii, S. V. Ol'shanskii // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44. – N 6. – P. 695-702.

10. Ольшанский В. П. О вертикальном движении вверх сферического тела возрастающей массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Известия РАН. МТТ. – 2009. – №5. – С. 18-24.

11. Циолковский К. Э. Собр. соч. т. II / К. Э. Циолковский. – М. : АН СССР, 1954.

12. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики Ч. 2, [3-е изд.] / А. А. Космодемьянский. – М. : Просвещение, 1966. – 398 с.

13. Белецкий В. В. О вертикальном подъёме точки переменной массы в среде постоянной плотности / В. В. Белецкий // ПММ. – 1956. – Т. 20. – Вып. 4. – С. 559-561.

14. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы / И. В. Мещерский – М. : ГИТТЛ, 1952. – 276 с.

15. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, – 1979. – 832 с.

УДК 517.9

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Панасенко Є. В., к. ф.-м. н., старший викладач

Запорізький національний університет

У статті розглянуто двоточкову крайову задачу в критичному випадку, яка виникає в теорії оптимального керування для матричних диференціальних рівнянь. Досліджено задачу в припущенні, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу є нетеровим. Запропоновано підхід до знаходження її розв'язку за допомогою теорії псевдообернених матриць. Знайдено умову розв'язуваності таких задач.

Ключові слова: крайова задача, керуючий процес, керування, псевдообернена матриця, нормальна фундаментальна матриця.

Панасенко Е. В. РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ / Запорожский национальный университет, Украина

В статье рассмотрено двухточечную краевую задачу в критическом случае, которая возникает в теории оптимального управления для матричных дифференциальных уравнений. Исследовано задачу в предположении, что оператор, который описывает линейную краевую задачу, является нетеровым. Предложен подход к нахождению её решения с помощью теории псевдообратных матриц. Найдено условие разрешимости таких задач.

Ключевые слова: краевая задача, управляющий процесс, псевдообратная матрица, нормальная фундаментальная матрица.

Panasenko Y. V. SOLUTION OF THE LINEAR TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL / Zaporizhzhya national university, Ukraine

The article considers the two-point boundary-value problem in the critical case. This problem arises in the theory of optimal control for matrix differential equations. We study boundary-value problem under the assumption about the operator that describes the linear boundary-value problem is Fredholm. Author describes the approach for solution to the problem with the help of theory of pseudoinverse matrices. We find the condition of solvability of such problems.

Key words: boundary-value problem, controlled process, pseudoinverse matrix, normal fundamental matrix.