6. Ольшанский В. П. О нелинейной модели падения испаряющейся капли, как материальной точки переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Механика и машиностроение. – 2006. – № 1. – С. 23-28.

7. Ольшанский В. П. О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Механика и машиностроение. – 2007. – № 1. – С. 25-29.

8. Ol'shanskii V. P. Lower estimate of the flight range of a fire-extinguishing liquid drop / V. P. Ol'shanskii, S. V. Ol'shanskii // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – Vol. 80. – N 4. – P. 697-701.

9. Ol'shanskii V. P. Vertical motion of a spherical body with decreasing mass / V. P. Ol'shanskii, S. V. Ol'shanskii // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44. – N 6. – P. 695-702.

10. Ольшанский В. П. О вертикальном движении вверх сферического тела возрастающей массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Известия РАН. МТТ. – 2009. – №5. – С. 18-24.

11. Циолковский К. Э. Собр. соч. т. II / К. Э. Циолковский. – М. : АН СССР, 1954.

12. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики Ч. 2, [3-е изд.] / А. А. Космодемьянский. – М. : Просвещение, 1966. – 398 с.

13. Белецкий В. В. О вертикальном подъёме точки переменной массы в среде постоянной плотности / В. В. Белецкий // ПММ. – 1956. – Т. 20. – Вып. 4. – С. 559-561.

14. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы / И. В. Мещерский – М. : ГИТТЛ, 1952. – 276 с.

15. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, – 1979. – 832 с.

УДК 517.9

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Панасенко Є. В., к. ф.-м. н., старший викладач

Запорізький національний університет

У статті розглянуто двоточкову крайову задачу в критичному випадку, яка виникає в теорії оптимального керування для матричних диференціальних рівнянь. Досліджено задачу в припущенні, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу є нетеровим. Запропоновано підхід до знаходження її розв'язку за допомогою теорії псевдообернених матриць. Знайдено умову розв'язуваності таких задач.

Ключові слова: крайова задача, керуючий процес, керування, псевдообернена матриця, нормальна фундаментальна матриця.

Панасенко Е. В. РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ / Запорожский национальный университет, Украина

В статье рассмотрено двухточечную краевую задачу в критическом случае, которая возникает в теории оптимального управления для матричных дифференциальных уравнений. Исследовано задачу в предположении, что оператор, который описывает линейную краевую задачу, является нетеровым. Предложен подход к нахождению её решения с помощью теории псевдообратных матриц. Найдено условие разрешимости таких задач.

Ключевые слова: краевая задача, управляющий процесс, псевдообратная матрица, нормальная фундаментальная матрица.

Panasenko Y. V. SOLUTION OF THE LINEAR TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL / Zaporizhzhya national university, Ukraine

The article considers the two-point boundary-value problem in the critical case. This problem arises in the theory of optimal control for matrix differential equations. We study boundary-value problem under the assumption about the operator that describes the linear boundary-value problem is Fredholm. Author describes the approach for solution to the problem with the help of theory of pseudoinverse matrices. We find the condition of solvability of such problems.

Key words: boundary-value problem, controlled process, pseudoinverse matrix, normal fundamental matrix.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Сьогодні у теорії керування при аналізі крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь отримали широке застосування методи теорії псевдообернених операторів (матриць) [1-4]. При розгляді реальних керованих об'єктів, перш за все виникає задача керування руху [5], яка зводиться до розв'язку крайової задачі першого порядку, розмірності $n \times n$. Розв'язання таких задач призводить до певних труднощів, що характерно для випадків керування системами, в яких кількість процесів перевищує кількість відомостей про початковий стан. Змінюючи умови протікання процесів, людина може впливати на їх характер, змінювати їх, пристосовувати до своїх цілей. Це втручання в природний перебіг процесу і є сутністю керування в широкому сенсі слова. Можна сказати, що керування – така організація того чи іншого процесу, яка забезпечує досягнення певних цілей.

Важливим частинним випадком є лінійні звичайні системи матричних диференціальних рівнянь, які моделюють лінійні технологічні та економічні процеси [6]. Це системи наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

де $x(t) = [col(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))]^T \in \mathrm{R}^n$ – фазовий вектор, $u(t) = [col(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))]^T \in \mathrm{R}^m$ – вектор керування. Допустимим керуванням вважається довільне кусково-неперервне керування $u = u(t)$, причому всі точки розриву функції $u = u(t)$ – першого роду (якщо такі є). Кожному такому допустимому керуванню відповідає єдиний розв'язок крайової задачі:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$\ell x(\cdot) = Mx(0) - Nx(T) = \alpha, \tag{3}$$

де матриці $A(t)$ та $B(t)$ розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно, компоненти яких – неперервні дійсні на $[0;T]$ функції: $A(t), B(t) \in C[0;T]$; $\alpha = col(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ – m-вимірний вектор-стовпчик констант з m-вимірного евклідового простору R^m; $\ell = col(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$ – лінійний вектор-функціонал, який діє з простору $C[0;T]$ в простір R^m: $\ell : C[0;T] \to \mathrm{R}^m$; M і N – матриці розмірності $m \times n$.

Квадратна матриця $A = (a_{ij})_{i=1, j=1}^{n,n}$ розмірності $n \times n$ називається матрицею стану, структура якої визначає характер як вільних, так і вимушених рухів системи. Матриця $B = (b_{ij})_{i=1, j=1}^{n,m}$ розмірності $n \times m$ називається матрицею керуючих впливів. Її структура визначає характер зв'язку входу системи з різними змінними стану.

Якщо в (2), (3) $B(t)u(t) = 0$ і $\alpha = 0$, то маємо однорідну крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\ell x(\cdot) = 0. \tag{5}$$

Крайові задачі, для яких відповідні їм лінійні однорідні крайові задачі (4), (5) не мають (мають) нетривіальних розв'язків, називаються некритичними (критичними) [1, 2].

Зокрема, цікавлять умови існування розв'язку крайової задачі (2)-(3) і визначення функції $x(t)$, яка задовольняє крайову умову (3) при відомому вхідному процесі $u(t)$.

Слід відзначити принципову відмінність, що вкладається в зміст поняття вектора керування $\overline{u}(t)$ та вектору $\overline{x}(t)$. Всі складові $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ вектора $\overline{u}(t)$ є конкретними фізичними величинами. Вектор $\overline{x}(t)$ системи є деякою, в загальному випадку абстрактною, характеристикою системи [7].

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Сьогодні у теорії керування при аналізі лінійних систем традиційно використовують підходи, які є досить відомими в теорії диференціальних рівнянь [1-3].

Залежно від вигляду крайової умови (3), отримуємо різні крайові задачі. Наприклад, у роботі [8] побудовано розв'язок для задачі Коші (визначено функцію $x(t)$ по заданому початковому стану x_0 при відомому вхідному процесі $u(t)$), використовуючи поняття фундаментальної (перехідної або імпульсної) матриці [6, 8] у вигляді:

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{6}$$

де $\Phi(t,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0)$.

У роботі [9] розглянута крайова задача при $t\in[0;T]$ і крайовою умовою загального вигляду $\ell x(\cdot)=\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}^n$, де $\ell:D^n[0;T]\to\mathbf{R}^n$ – лінійний обмежений вектор-функціонал. Для розв'язуваності задачі вимагається, щоб

$$\det[\ell X]\neq 0. \tag{7}$$

Отже, розв'язуваність крайової задачі не залежить від неоднорідностей диференціального рівняння (2) і від $\alpha\in\mathbf{R}^n$. Із вигляду (7) очевидно, що розв'язуваність задачі залежить тільки від фундаментальної матриці $X(t)$ та вектор-функціонала ℓ. При виконанні умови (7) розв'язок задачі дається через матрицю Гріна:

$$x(t)=X(t)[\ell X]^{-1}\alpha+\int_0^T G(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{8}$$

У цій роботі розглядається випадок, коли не вимагається виконання умови (7). Більше того, не вимагається, навіть, щоб матриця $[\ell X]$ була квадратною. В цьому випадку отримаємо крайову задачу, в якій кількість крайових умов не співпадає з кількістю невідомих у системі [2, 3].

ЗНАХОДЖЕННЯ УМОВ РОЗВ'ЯЗУВАНОСТІ ДВОТОЧКОВОЇ ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Окремий інтерес у теорії оптимального керування займають двоточкові крайові задачі, а саме, цікавлять умови їх розв'язуваності [9]. Знайдемо умови існування та структуру розв'язків лінійної неоднорідної скінченновимірної крайової задачі теорії оптимального керування (2), (3).

Розв'язок $x(t)$ рівняння (2)

$$x(t)=x_0+\int_0^t\left(A(s)x(s)+B(s)u(s)\right)ds,$$

неперервно-диференційований у кожній точці $t\in[0;T]$ і задовольняє рівняння (2) всюди на $[0;T]$. Отже, розв'язок $x(t)$ рівняння (2) будемо шукати в просторі $C^1([0;T])$ неперервно-диференційованих на $[0;T]$ функцій.

Повну систему з n лінійно незалежних розв'язків системи (4) називають фундаментальною, а $(n\times n)-$ вимірну матрицю $X(t,\tau)$, яка є розв'язком матричної задачі Коші $\frac{dX(t,\tau))}{dt}=A(t)\cdot X(t,\tau)$, $X(\tau,\tau)=I_n$, називають фундаментальною матрицею [6]. Загальний розв'язок матричного рівняння має вигляд:

$$x(t)=X(t)x_0+\bar{x}(t),\quad X(t)=X(t,0), \tag{9}$$

де x_0 – елемент простору $\mathbf{R}^n$, $\bar{x}(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2), який може бути записаний у вигляді:

$$\bar{x}(t)=X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Підставимо (9) в крайову умову (3) та отримаємо наступне рівняння відносно елемента x_0 простору $\mathbf{R}^n$ та отримаємо алгебраїчну відносно $x_0\in\mathbf{R}^n$ систему:

$$M \cdot X(0)\cdot x_0 + M\int_0^0 X(0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - N\cdot X(T,0)\cdot x_0 - N\int_0^T X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \alpha ,$$

$$(M - N\cdot X(T,0))\cdot x_0 = N\int_0^T X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \alpha , \tag{11}$$

або, враховуючи те, що

$$\alpha - \ell\int_0^{\cdot} X(\cdot,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \alpha - \left(M\int_0^0 X(0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau - N\int_0^T X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right) = N\int_0^T X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \alpha ,$$

маємо

$$Qx_0 = \alpha - \ell\int_0^{\cdot} X(\cdot,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau , \tag{12}$$

де $Q = lX(\cdot) = M - NX(T)$ – $(m\times n)$ – вимірна матриця, отримана підстановкою в крайову умову (3) нормальної фундаментальної матриці $X(t)$ однорідної системи (4).

Відомо [2], що алгебраїчна система (12) розв'язна тоді і тільки тоді, коли права частина належить ортогональному доповненню $^{\perp}N(Q^*) = R(Q)$ підпростору $N(Q^*)$, тобто виконується умова

$$\mathrm{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int_0^{\cdot} X(\cdot,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right] = 0 . \tag{13}$$

При цьому загальний розв'язок системи (12) має вигляд

$$x_0 = Q^+\left[\alpha - \ell\int_0^{\cdot} X(\cdot,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right] + \mathrm{P}_{N(Q)}c, \tag{14}$$

де Q^+ – псевдообернена матриця за Пенроузом [9] до матриці Q ; c – довільний елемент з простору R^n .

Підставимо x_0 у вираз (9), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (2), (3) у вигляді:

$$x(t) = X(t)\cdot\left(Q^+ \cdot \left(N\int_0^T X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \alpha \right) + \mathrm{P}_{N(Q)}c \right) + \int_0^t X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= X(t)\mathrm{P}_{N(Q)}c + X(t)Q^+\alpha + X(t)Q^+N\int_0^T X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= X(t)\mathrm{P}_{N(Q)}c + X(t)Q^+\alpha + K[Bu](t) , \tag{15}$$

де $K[Bu](t)$ – оператор Гріна задачі (2), (3), який діє на функцію $B(t)u(t)$ наступним чином:

$$K[Bu](t) := X(t)Q^+N\int_0^T X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau . \tag{16}$$

Отже, критерій розв'язності крайової задачі (2), (3) може бути сформульований наступним чином.

Теорема. Якщо $\operatorname{rank} Q = n_1$, то однорідна крайова задача (4), (5) має $r = n - n_1$ і тільки r лінійно незалежних розв'язків. Неоднорідна крайова задача (2),(3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконана умова (13) і при цьому має r -параметричну родину розв'язків

$$x(t, c_r) = X(t)\mathrm{P}_{N(Q)}c_r + X(t)Q^+\alpha + K[Bu](t)$$

де $\mathrm{P}_{N(Q)} = I - Q^{+}Q$, $\mathrm{P}_{N(Q^{*})} = I - QQ^{+}$ – ортопроектори на ядро $N(Q)$ і коядро $N(Q^{*})$ матриці Q відповідно, Q^{+} – псевдообернена матриця до матриці Q, $K[Bu](t)$ – оператор Гріна задачі (2),(3), який визначений за формулою (16).

ПРИКЛАД

Нехай керуючий процес описується крайовою задачею (2),(3), де $x(t) \in \mathrm{R}^{3}$ – фазовий вектор, $0 \le t \le \ln\frac{1}{5}$, $u(t) = e^{-t} \in \mathrm{R}^{1}$ – керування та задані матриці $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M = (14 \quad 12 \quad 0)$, $N = (2 \quad 2 \quad 0)$, $\alpha = 5$.

Нормальна фундаментальна матриця для заданої задачі має вигляд $X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо матрицю Q, яка визначена в доведеній теоремі:

$$Q = lX(\cdot) = M - NX\left(\ln\frac{1}{5}\right) = (4 \quad 2 \quad 0), \quad \operatorname{rank} Q = 1.$$

Матричне рівняння (11) представляє собою систему алгебраїчних рівнянь:

$$(4 \quad 2 \quad 0)x_0 = -20\ln 5 + 5. \tag{17}$$

відносно елемента $x_0 \in \mathrm{R}^{3}$. $\mathrm{P}_{N(Q^{*})} = 0$, тому умова розв'язності (13) для даної крайової задачі виконана насправді для довільних $\alpha \in \mathrm{R}^{1}$, у тому числі і для $\alpha = 5 \in \mathrm{R}^{1}$. Система (17) є недовизначеною, розв'язок якої знаходиться за формулою (14), де Q^{+} – псевдообернена матриця до матриці Q (матриця Q^{+} має розмірність 3×1):

$$Q^{+} = \lim_{\varepsilon \to 0} Q^{*}\left(QQ^{*} + \varepsilon I_1\right)^{-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} \dfrac{4}{20+\varepsilon} \\ \dfrac{2}{20+\varepsilon} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{P}_{N(Q)} = I - Q^{+}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad 2 \quad 0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & -\dfrac{2}{5} & 0 \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неоднорідна крайова задача має 3-параметричну родину розв'язків (формула (15)):

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\left(\dfrac{1}{5}c_1 - \dfrac{2}{5}c_2 + 1 + 4\ln\dfrac{1}{5} + t\right) \\ e^{-t}\left(-\dfrac{2}{5}c_1 + \dfrac{4}{5}c_2 + \dfrac{1}{2} + 2\ln\dfrac{1}{5} + t\right) \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{3}. \tag{18}$$

У достовірності отриманого результату можна переконатися елементарною перевіркою, а саме підставити (18) в крайову задачу (2), (3).

ВИСНОВКИ

Робота присвячена знаходженню умов розв'язності та побудови розв'язку двоточкових крайових задач, які виникають у задачах теорії керування руху, в яких кількість крайових умов не співпадає з кількістю невідомих у системі. Досліджено задачу в припущенні, що оператор, який описує однорідну лінійну крайову задачу, є нетеровим. Запропоновано записувати розв'язок задачі у вигляді $X(t)\mathrm{P}_{N(Q)}c + X(t)Q^{+}\alpha + X(t)Q^{+}N\int\limits_{0}^{T} X(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = X(t)\mathrm{P}_{N(Q)}c_r + X(t)Q^{+}\alpha + K[Bu](t)$, де $X(t)=X(t,0)$ – нормальна фундаментальна матриця задачі; $\mathrm{P}_{N(Q)}$, $\mathrm{P}_{N(Q^*)}$ – ортопроектори на ядро $N(Q)$ і коядро $N(Q^*)$ матриці Q відповідно; Q^{+} – псевдообернена матриця до матриці Q; $K[Bu](t)$ – оператор Гріна задачі; c – довільний елемент з простору R^n.

Крім того, даний підхід можна застосувати до задач про аналітичне конструювання регуляторів і про оптимальну стабілізацію [2, 6], при розв'язку яких виникають матричні рівняння Ріккаті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. – К. : Наукова думка, 1990. – 96 с.
2. Бойчук А. А. Обобщённо-обратные операторы и нётеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлёв, А. М. Самойленко. – К. : Институт математики НАНУ, 1995. – 320 с.
3. Boichuk A. A. Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.
4. Penrose R. Generalized Inverse for Matrices / R. Penrose // Proc. Cambriadge Philos. Soc. – 1955. – Vol. 51, №3. – P. 406-413.
5. Ванько В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление : Учеб. для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 488 с.
6. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. / А. И. Егоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
7. Абраменко И. Г. Теория автоматического управления / И. Г. Абраменко, Д. И. Абраменко. – Х. : ХНАГХ, 2008. – 190 с.
8. Андриевский Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2000. – 475 с.
9. Максимов В. П. Теория оптимального управления. Часть 2: Элементы теории линейных операторов и операторных уравнений / В. П. Максимов, П. М. Симонов. – Пермь : Перм. гос. ун-т, 2010. – 80 с.
10. Власов К. П. Теория автоматического управления : Учебное пособие / К. П. Власов. – Х. : Изд-во Гуманитарный центр, 2007. – 526 с.
11. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.
12. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И. В. Мирошник. – СПб. : ПИТЕР, 2005. – 336 с.
13. Попович М. Г. Теорія автоматичного керування : Підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 1997. – 544 с.