

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛАСТОМЕРНОЙ ФУТЕРОВКИ С МЕТАЛЛИЧЕСКИМ ШАРОМ НА ОСНОВЕ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Решевская Е. С., к.т.н., старший преподаватель

*Запорожский национальный университет*

В статье представлено исследование напряженно-деформированного состояния эластомерной футеровки с учетом условий контактного взаимодействия. Расчеты проведены с применением моментной схемы конечного элемента с введением аппроксимации Эрмита.

*Ключевые слова: метод конечных элементов, моментная схема конечного элемента, контактное взаимодействие, эластомер, полином Эрмита.*

Решевська К. С. МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛАСТОМЕРНОЇ ФУТЕРОВКИ З МЕТАЛЕВОЮ КУЛЕЮ НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА / Запорізький національний університет, Україна

У статті подане дослідження напружено-деформованого стану еластомерної футеровки з урахуванням умов контактної взаємодії. Розрахунки проведені із застосуванням моментної схеми скінченного елемента з введенням апроксимації Ерміта.

*Ключові слова: метод скінчених елементів, моментна схема скінченного елемента, контактна взаємодія, еластомер, поліном Ерміта.*

Reshevskaya E. S. SIMULATION OF THE CONTACT INTERACTION WITH THE ELASTOMER LINING METAL BALL ON THE BASIS OF MOMENT CIRCUIT FINITE ELEMENT / Zaporozhe national university, Ukraine

The article presents a study of the stress-strain state of the elastomeric lining with regard to the conditions of contact interaction. Calculations are performed using the finite element scheme of moment with the introduction of Hermite.

*Key words: finite element method, finite element scheme of moment, the contact interaction, elastomer, Hermite polynomial.*

### ВВЕДЕНИЕ

В горно-металлургической промышленности часто возникает проблема защиты оборудования, связанного с измельчением различных материалов, от истирающих воздействий, для решения которой с успехом используется футеровка. От ее морфометрических параметров и долговечности зависят не только срок службы мельниц в целом, но и технологические характеристики процесса измельчения. В качестве материала для изготовления футеровок используют самые различные конструкционные материалы, в последние годы преимущественно эластомеры. Благодаря своей высокой усталостной прочности, износостойкости, технологичности изготовления, сравнительно низкой стоимости эластомер широко применяется как материал для изготовления защитных футеровок.

Исследование напряженно-деформированного состояния эластомерных футеровок приводит к построению модели контактного взаимодействия упругой плоскости и металлического шара.

### АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

История развития исследуемой области берет свое начало с классических задач механики контактных взаимодействий. Классическая контактная механика связана прежде всего с именем Генриха Герца. В 1881 г. Герцем [1] была сформулирована первая задача о контакте двух тел, что послужило истоком для исследования задач подобного класса и развития аналитических методов решения контактных задач. Однако необходимость расчета трехмерных конструкций сложной геометрии привела к применению численных методов. Одним из наиболее распространенных численных методов является метод конечных элементов. Применительно к решению контактных задач МКЭ существует два направления: в одном случае контактные усилия моделируются введением слоя промежуточных «контактных» элементов, обладающих определенными свойствами [2, 3], в другом – непосредственно через узлы конечных элементов, расположенных на границах контактирующих тел [4, 5, 6].

Таким образом, анализ работ по механике контактных взаимодействий показал, что:

- в большинстве публикаций, посвященных решению прикладных задач механики контактных взаимодействий элементов сложной геометрической формы, используется двумерная постановка краевой задачи;
- на данный момент существует незначительное количество работ, в которых бы исследовались контактные взаимодействия элементов из слабосжимаемых материалов.

В данной работе для учета специфических свойств эластомеров используется моментная схема конечного элемента [7].

## ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

На рис. 1 изображено тело  $V$ , ограниченное функцией  $z_1 = g_0(x, y)$ , в недеформированном состоянии. Область  $V$  контактирует с абсолютно жестким телом, которое ограничено функцией  $z_2 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (z - z_0)^2$ . Первоначальный зазор между телами в недеформированном состоянии отсутствует, и тела имеют контакт в некоторой области (рис.1 – точка А).

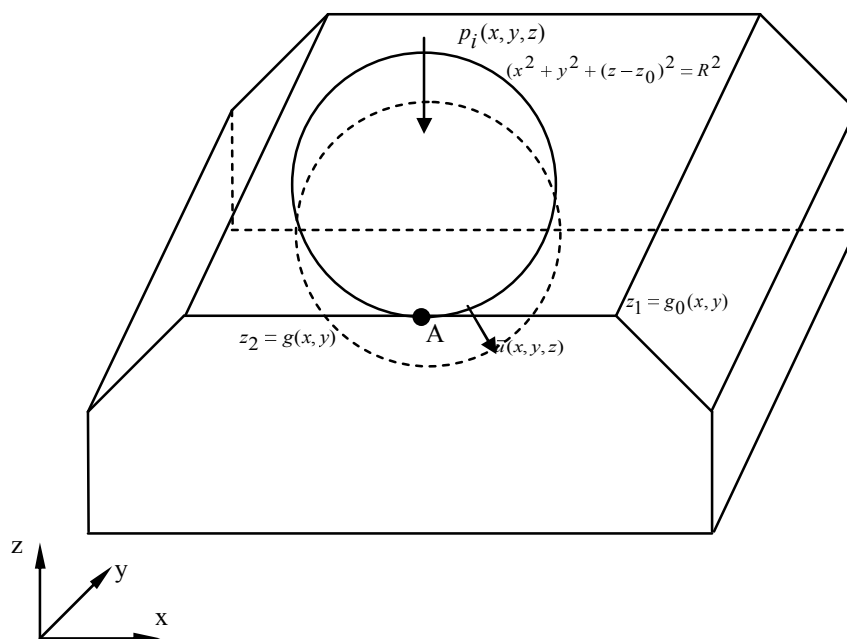


Рис. 1. Процесс взаимодействия контактирующих тел

Нагрузка, действующая со стороны поверхностных сил  $p_i(x, y, z)$ , вызывает перемещение точек тела  $\bar{u}(x, y, z)$ . После деформации функция, описывающая тело  $V$ , имеет вид  $z_2 = g(x, y)$ . Если в некоторой точке  $(x, y, z) \in S$  происходит контакт двух тел, то в этой точке  $g(x, y) - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (z - z_1)^2 = 0$ . Кроме того, нормальные напряжения должны быть сжимающими  $\sigma_v(x, y, z) < 0$  ( $v$  – нормаль к поверхности контакта). Если же в точке  $(x, y, z) \in S$  контакт отсутствует, то  $g(x, y) - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (z - z_1)^2 > 0$ ,  $\sigma_v(x, y, z) = 0$ .

Таким образом, для всех точек поверхности должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} g(x, y) - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (z - z_1)^2 = 0; \\ \sigma_v(x, y, z) < 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x, y) - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - (z - z_1)^2 > 0; \\ \sigma_v(x, y, z) = 0. \end{array} \right. \end{cases} \quad (1)$$

Выражения (1) моделируют граничные условия контактного взаимодействия двух тел, здесь указаны условия непроникания без указания площадки контактной области.

Таким образом, постановка краевой задачи заключается в определении напряжений и деформаций по площадке контакта и во всем объеме, контактирующего тела с учетом условий (1).

## ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС УТОЧНЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ПЛОЩАДКИ

Особенностью решения контактных задач является то, что в большинстве случаев размеры и форма контактного пятна неизвестны. Определение контактной площадки на основе метода конечных

элементов происходит итерационно в ходе решения задачи контактного взаимодействия металлического шара и эластомерной футеровки. Будем считать, что шар не изменяет свою форму и размеры, т.е. деформируется незначительно в сравнении с эластомерной футеровкой, следовательно, предполагается абсолютно жестким и в модели представляется поверхностью, ограничивающей эластомерный элемент. Краевые условия (1) задаются итерационно, путем введения вектора дополнительной нагрузки.

Схема решения контактной задачи на основе методе конечных элементов сводится к последовательному выполнению следующих шагов:

1. По заданным узловым значениям координат  $\{x_i\}$  и упругим постоянным строится матрица жесткости  $[K]$ .

2. Задается вектор узловых нагрузок:

$$P_0 = P. \quad (2)$$

3. Находится вектор узловых перемещений из решения СЛАУ:

$$[K]\{u_i\} = \{P_i\}, \quad (3)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots$

4. Определяются узловые точки, проникшие в металлический элемент конструкции (условие непроникновения). Если таких точек нет, происходит переход на пункт 9, в противном случае  $i = i + 1$ .

5. Для проникших узловых точек находится вектор дополнительных перемещений, который бы возвращал проникшие узловые точки на границу металлического элемента конструкции:

$$\Delta v_i \quad (i = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (4)$$

6. Из соотношения

$$[\Delta P_i] = [K]\{\Delta v_i\} \quad (5)$$

находится вектор дополнительной нагрузки.

7. Пересчитывается вектор нагрузок

$$P_i = P_{i-1} + \Delta P_i. \quad (6)$$

8. Происходит переход на шаг 3.

Если это условие не выполнено для каких-либо узловых точек находящихся в контакте, для этих точек пересчитывается вектор нагрузок, снимается дополнительная нагрузка, приложенная к узлу и происходит переход на шаг 3.

В противном случае выполняется следующий шаг.

9. На основе полученного приближенного вектора перемещений  $\{u_i\}$ , определяется вектор узловых невязок  $\{R_i\}$ , численной характеристикой которого является сумма квадратов компонент узловых невязок  $\{R^*\}$ . Данная величина позволяет судить о сходимости получаемых решений.

10. Оценка вектора узловых невязок  $\{R_i\}$  происходит следующим образом: принимается то значение вектора перемещений  $\{u_i\}$ , при котором выполняется условие:

$$(R_i)^2 < (P_i)^2 \varepsilon, \quad \text{где } (10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}). \quad (7)$$

11. При невыполнении условия (7) вектор  $\{R_i\}$  прибавляется к вектору нагрузок и подставляется в правую часть системы линейных уравнений (3), т.е. происходит переход к пункту 3. В противном случае происходит переход к следующему пункту.

12. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия (7) для текущих значений величины вектора невязок и по вектору  $\{u_i\}$  находятся компоненты тензора деформаций  $\{\varepsilon_i\}$  и вектора напряжений  $\{\sigma_{ij}\}$ .

## ОСОБЕННОСТИ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛАБОСЖИМАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Решение задачи контактного взаимодействия эластомерной футеровки с шаром будем находить методом конечных элементов. Для устранения негативных особенностей метода конечных элементов, таких как, неучет жестких смещений, эффект «ложного сдвига», а также для учета слабой сжимаемости эластомера, будем использовать модификацию метода конечных элементов – моментную схему конечного элемента для слабосжимаемых материалов [7]. Моментная схема конечного элемента основана на введении тройной аппроксимации: полей перемещений, деформаций и функции изменения объема. Причем порядок разложения деформаций и функции изменения объема выбирается с таким расчетом, чтобы исключить все компоненты деформаций, реагирующие на жесткие смещения и эффект «ложного сдвига», и все компоненты функции изменения объема, реагирующие на слабую сжимаемость эластомера.

Для получения более точных результатов, функцию перемещений будем аппроксимировать с использованием интерполяционного полинома Эрмита, который учитывает непрерывность компонент перемещений и их частных производных [8].

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛАСТОМЕРНОЙ ФУТЕРОВКИ

Рассмотрим эластомерную футеровку, в которую вдавливается металлический шар. Расчетная схема приведена на рис. 2. Размеры эластомерного элемента следующие:  $l_1 = 486$  мм,  $l_2 = 170$  мм,  $h_1 = 50$  мм,  $h_2 = 150$  мм,  $L = 375$  мм.

В контакт вступают два тела: эластомерная футеровка и металлический шар. Соприкасаясь в одной точке, под действием приложенной к шару нагрузки тела сближаются и эластомерный элемент деформируется. Максимальные значения перемещений деформированного эластомера наблюдаются в точке начального соприкосновения (рис. 3). Деформация сжатия для данной марки резины (2959) не должна превышать 10% от высоты элемента, следовательно, исходя из полученных значений прогибов, получаем, что максимально допустимая нагрузка для футеровки составляет 13,7 кН.

Контактная область имеет вид сферического сегмента, радиус которого увеличивается с ростом величины, прикладываемых усилий.

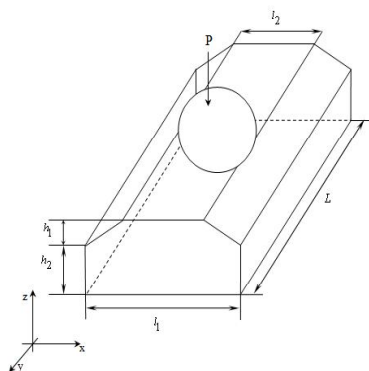


Рис. 2. Расчетная схема резиновой футеровки

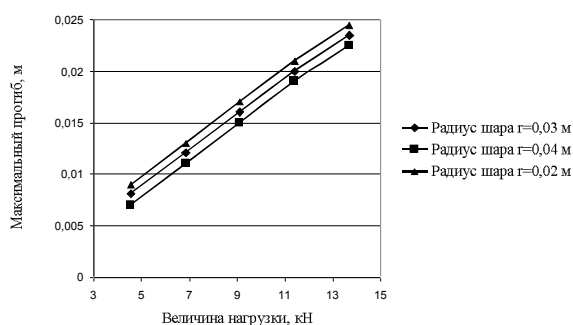


Рис. 3. Изменение величины максимального прогиба от величины нагрузки

А.Н. Динником [9] для вдавливания шара в плоскость давлением  $p$  была получена следующая формула для радиуса площадки контакта

$$a = \sqrt[3]{\frac{3pR(\theta_1 + \theta_2)}{16}}, \tag{2}$$

где  $\theta_i = \frac{4(1-\nu_i^2)}{E_i}$  ( $i=1,2$ ).

Изменение величины радиуса области контакта при различных величинах нагрузки представлено на рис. 4.

Численное исследование напряжений в области контакта (рис. 5, 6) показало зависимость контактных напряжений, которые достигают максимума в центре контактной области, от величины нагрузки.

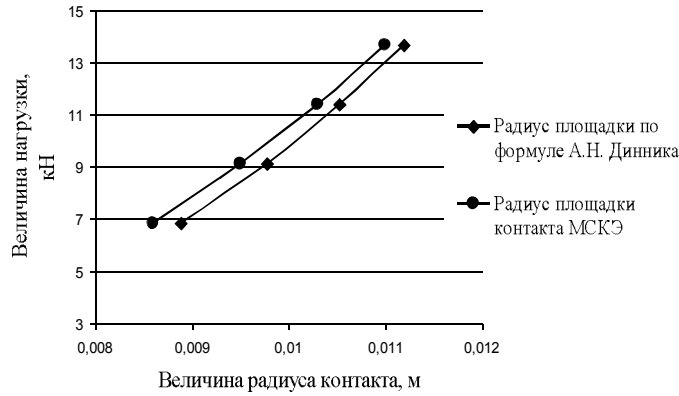


Рис. 4. Изменение величины радиуса контактной площадки

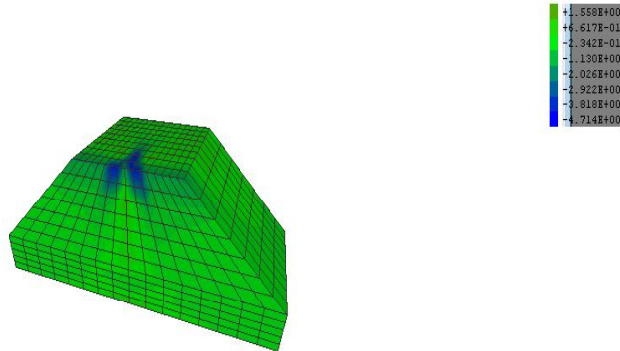


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений в эластомерной футеровке

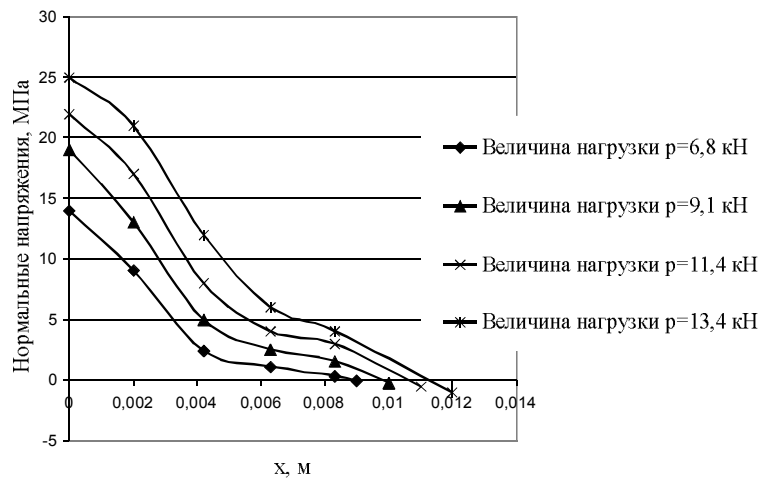


Рис. 6. Нормальные напряжения в контактной области футеровки и шара

## ВЫВОДЫ

Исходя из полученных значений величин прогибов эластомерной футеровки, была определена максимально допустимая величина нагрузки, равная 13,7 кН. Было показано изменение величины радиуса контактной области при увеличении прикладываемой нагрузки. Сжимающие напряжения, возникающие в эластомерном элементе под действием нагрузки, максимальны в центре области контакта.

Таким образом, предложенная схема учета контактных взаимодействий на основе моментной схемы конечных элементов, была проверена на существующем аналитическом решении путем сравнения величины радиуса контактной площадки. Кроме того, разработанный подход позволяет исследовать контактные деформации и напряжения по всем трем направлениям и получать картину напряженно-деформированного состояния не только на поверхности эластомерного элемента, но и внутри него.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz. – Gessammelte Werke. Leipzig, 1895. – Bd 1. – S. 155-173.
2. Бабич А. П. Конечно-элементный алгоритм решения контактных задач с учетом нелинейных эффектов / А. П. Бабич // Динамика, прочность и надежность транспортных машин : Сборник научных трудов. Брянский государственный технический университет. – Брянск, 2002. – С. 138-148.
3. Неустроева Н. В. Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин / Н. В. Неустроева // Сибирский журнал индустриальной математики, 2009. – №4(40). – С. 51-64.
4. Кузьменко В. И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих тел / В. И. Кузьменко // ПММ, 1979. – Т. 43. – Вып. 5. – С. 893-901.
5. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М. : Наука, 1980. – 383 с.
6. Кравчук А. С. Численная реализация вариационного подхода к решению контактных задач теории упругости методом потенциалов / А. С. Кравчук, Е. Р. Ахужданов // Расчеты на прочность. – М. : Машиностроение, 1983. – №25. – С. 12-18.
7. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наук. думка, 2003. – 655 с.
8. Решевская Е. С. Моделирование напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций на основе метода конечных элементов с интерполирующим полиномом Эрмита / Е. С. Решевская, С. Н. Гребенюк // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. ЗНТУ. – Запоріжжя, 2008. – №1. – С. 85-91.
9. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел / А. Н. Динник. – К. : Изд-во АН УССР. Механика, 1953. – 151 с.

UDC 519.832.3+519.711.2+519.615.7

## SELECTION OF QUASIEQUIPROBABLE DISTRIBUTION FROM CONTINUUM OF OPTIMAL STRATEGIES TO THE GENERALIZED STRICTLY FORMULATED PROBLEM OF REMOVING SINGLE-PARAMETER FOUR-MODEL UNCERTAINTY WITHIN ASSUREDLY MINIMIZED DEVIATION APPROACH

Romanuke V. V., associate professor, c. t. s., associate professor

*Khmelntskiy National University*

There is formulated the generalized problem of removing strictly single-parameter four-model uncertainty, using the approach of minimizing assuredly the absolute deviations among the fixed model output values. Having referred to the previously determined three types of the optimal strategies continuum for the second player in the corresponding matrix  $4 \times 4$ -game, there has been found the same unique optimal strategy for two types to apply it over the fixed model output values as a quasiequiprobable distribution. Such a