5. Ølgaard K. B. Optimisations for quadrature representations of finite element tensors through automated code generation / K. B. Ølgaard, G. N. Wells // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2010. – 37, No. 1. – Article No. 8.
6. Smith I. M. Programming the Finite Element Method: fourth edition / I. M. Smith, D. V. Griffiths. – Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2004. – 628 p.
7. Касперски К. Техника оптимизации программ. Эффективное использование памяти / К. Касперски. – СПб : БХВ-Петербург, 2003. – 464 с.
8. Вандервуд Д. Шаблоны C++: справочник разработчика : Пер. с англ. / Д. Вандервуд, Н. М. Джосаттис. – М. : «Вильямс», 2003. – 544 с.
9. Logg A. DOLFIN: Automated Finite Element Computing / A. Logg, G. N. Wells // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2010. – 37, No. 2. – Article No. 20.
10. Alnæs M. S. On the efficiency of symbolic computations combined with code generation for finite element methods / M. S. Alnæs, K.-A. Mardal // ACM Transactions on Mathematical Software. – 2010. – 37, No. 1. – Article No. 6.
11. Rupp K. Increased Efficiency In Finite Element Computations Through Template Metaprogramming / K. Rupp // Proceedings of the 2010 Spring Simulation Multiconference. – Orlando, FL. – 2010. – P. 92.
12. Цимринг Ш. Е. Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы. Программы для микрокалькуляторов : Справочник / Ш. Е. Цимринг. – М. : Радио и связь, 1988. – 272 с.
13. Майерс С. Эффективное использование STL / С. Майерс. – СПб : Питер, 2003. – 296 с.
14. Чехов В. В. Матричное уравнение метода конечных элементов для несжимаемого материала при больших деформациях / В. В. Чехов // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 10. – С. 71-77.
15. Chekhov V. V. Tensor-based matrices in geometrically non-linear FEM / V. V. Chekhov // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2005. – 63, No. 15. – P. 2086-2101.

УДК 519.6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ УЧЕТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УЗЛА СЕТКИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Чопоров С. В., к. т. н., доцент

Запорожский национальный университет

В работе предложены алгебраические способы учета перемещения узла сетки конечных элементов. В основу рассмотренных способов положена идея направленного сглаживания. Рассмотрены основные свойства предложенных функций для сглаживания.

Ключевые слова: математическая модель, сетка, конечный элемент, узел.

Чопоров С.В. АЛГЕБРАЇЧНІ КРИТЕРІЇ ВРАХУВАННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ ВУЗЛА СІТКИ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ / Запорізький національний університет, Україна

У роботі запропоновані алгебраїчні способи врахування переміщення вузла сітки скінченних елементів. В основу розглянутих способів покладено ідею направленого згладжування. Розглянуті основні властивості запропонованих функцій для згладжування.

Ключові слова: математична модель, сітка, скінченний елемент, вузол.

Choporov S.V. AN ALGEBRAIC CRITERION FOR FINITE ELEMENT MESH MOVEMENT / Zaporizhzhya National University, Ukraine

An algebraic approaches for movement of finite element nodes are described in the article. Proposed approaches are based on directed smoothing. Author describe some properties of proposed functions for smoothing.

Keywords: mathematical model, mesh, finite element, node.

ВВЕДЕНИЕ

В проектировании инженерных объектов и конструкций важное место занимает математическое моделирование, которое позволяет заменить исследование опытного образца математической моделью и вычислительным экспериментом. Для математического моделирования сложных механических объектов и процессов, как правило, используются дифференциальные уравнения в частных производных, аналитическое решение которых получить весьма затруднительно. В таких случаях на практике активно используются вычислительные методы, позволяющие заменить исходную непрерывную модель ее дискретным аналогом. В методе конечных элементов [1-3] для решения дифференциального уравнения используется система непересекающихся геометрических областей простой формы – конечных элементов, на каждом из которых строится аппроксимация искомой функции. При этом существенное влияние на точность вычислительного эксперимента оказывает структура и качество дискретной модели.

В ряде задач при построении дискретной модели необходимо учитывать не только геометрические особенности области, но и аспекты физической постановки (наличие многослойности, трещин в конструкции, особенности области контакта и другие). При этом в некоторых случаях с вычислительной точки зрения может быть более оптимальной модификация положения узлов сетки конечных элементов, которая получена для области без учета подобных особенностей, в том числе путем интерактивного вмешательства проектировщика. Следовательно, актуальной задачей является разработка способов автоматического учета перемещения узлов сетки путем коррекции положения оставшихся узлов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для простоты изложения рассмотрим случай двумерной задачи: дискретная модель – сетка четырехугольных конечных элементов.

Пусть дана сетка конечных элементов $M = (V, E)$, в которой $V = \{v_i = (x_i, y_i), i = \overline{1,n}\}$ – множество узлов (точек двухмерного евклидова пространства), $E = \{e_j = (i_{j,0}, i_{j,1}, i_{j,2}, i_{j,3}), j = \overline{1,m}\}$ – множество связей между узлами (номеров узлов, образующих ребра элемента, в порядке обхода против часовой стрелки), n – количество узлов, m – количество элементов. Некоторый внутренний узел v_i подвергся перемещению на вектор $\bar{\xi}$, то есть, узел перемещен в точку $v_i^* = v + \bar{\xi}$. Причем длина вектора $\bar{\xi}$ должна быть меньше расстояния от узла v до границы объекта в направлении действия данного вектора (в противном случае будет получена сетка, в которой не возможно путем перемещения внутренних узлов устранить вырожденные элементы). Задача состоит в определении нового положения оставшихся узлов сетки с целью устранения элементов «плохой» формы.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Основные подходы к решению такой задачи можно разбить на две группы: 1) основанные на сглаживании; 2) основанные на минимизации функционалов метрик сетки.

В основе подходов первой группы лежит идея перемещения узла в некоторую среднюю позицию относительно координат соседних узлов (например, сглаживание Лапласа и основанные на нем способы [4-6]). Сглаживание последовательно применяется ко всем узлам за исключением фиксированных (перемещенных). При этом для улучшения качества само сглаживание применяется несколько раз. Основным недостатком такого подхода – является невозможность применения для неравномерных сеток и отсутствие гарантий устранения невыпуклых элементов.

В основе подходов второй группы лежит идея минимизации специальных функционалов, определенных на дискретной сетке, как сумма метрик элементов (например, площадь, длина периметра или другие характеристики элемента [7-9]). Основным преимуществом такого подхода является возможность функционального контроля размещения узлов сетки, недостатком – необходимость минимизации функционалов с большим числом неизвестных (пропорциональным количеству узлов сетки).

Общим недостатком указанных подходов является отсутствие учета перемещения узла (направления и модуля вектора $\bar{\xi}$). Поэтому естественным развитием идей, заложенных в них, является разработка способа, который будет учитывать вектор перемещения.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В общем случае координаты внутренних узлов исходной сетки и сетки, образованной перемещением узлов, можно связать соотношением

$$w_k^* = \chi(w_k, v_i, \bar{\xi}), \quad w_k \in V \setminus (v_i \cup \Gamma(\Omega)), \tag{1}$$

где функция χ определяет связь между перемещаемым узлом v_i, вектором перемещения $\bar{\xi}$, исходной координатой внутреннего узла w_k и новым положением внутреннего узла w_k^*; $\Gamma(\Omega)$ – множество граничных узлов сетки.

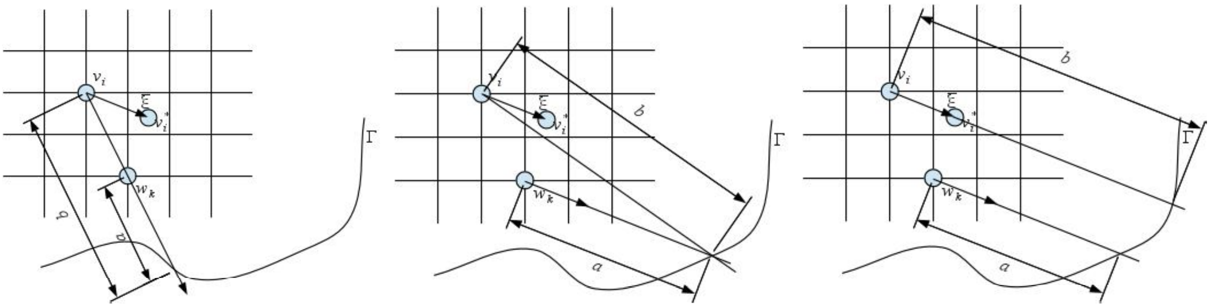
Простейшим видом функции χ является соотношение

$$w_k^* = w_k + \mathrm{dist}(x, y)\bar{\xi}, \tag{2}$$

где $\text{dist}(x, y)$ – некоторая функция координат, которая равна нулю в граничных и фиксированных узлах, равна единице в узле v_i. Функция (2) в таком виде может рассматриваться как направленное сглаживание сетки.

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ УЗЛОВ НА ОСНОВЕ РАССТОЯНИЯ ДО ГРАНИЦЫ ОБЪЕКТА

В качестве базовых функций можно использовать расстояние от узла до границы объекта. Естественно предположить, что чем ближе узел расположен к границе и чем больше расстояние до перемещаемого узла, тем меньшее возмущение должны получать его координаты. При этом, для формирования функции $\text{dist}(x, y)$ возможно использовать несколько различных схем (рис. 1).



а б в

Рис. 1. Схемы формирования функции $\text{dist}(x, y)$

1. Отношение расстояния от текущего узла до границы объекта к расстоянию от перемещаемого узла до границы в направлении вектора $\overline{v_i w_k}$ (рис. 1, а). При такой схеме функция $\text{dist}(x, y)$ примет вид

$$\text{dist}(x, y) = \frac{\delta\left(w_k, \overline{v_i w_k}\right)}{\delta\left(v_i, \overline{v_i w_k}\right)}, \tag{3}$$

где $\delta(w, \bar{v})$ – расстояние от точки с координатами узла w до точки пересечения прямой, образованной этим узлом и вектором v, границы объекта.

Свойства функции (3):

1. $0 \le \text{dist}(x, y) \le 1$;
2. $\text{dist}(x, y) = 0$ в граничных узлах сетки;
3. $\text{dist}(x, y) = 1$ в узле v_i.

График функции $\text{dist}(x, y)$ для равномерной прямоугольной сетки на случай перемещения центрального узла приведен на рис. 2.

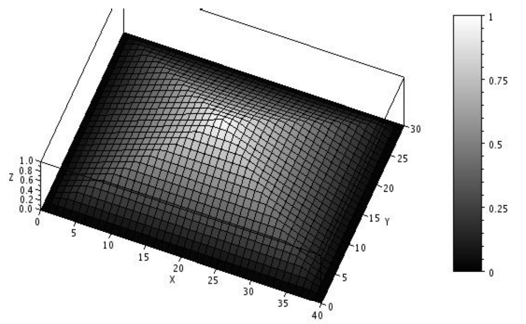


Рис. 2. Распределение значений функции (3) на равномерной сетке

Аналогичные по свойствам функции могут быть получены варьированием направления поиска в функции $\delta(w, \bar{v})$ для числителя и знаменателя (некоторые примеры приведены на рис. 1; при этом в случаях, изображенных на рис. 1, б и 1, в значения функции $\text{dist}(x, y)$ могут превышать 1).

В результате практического исследования серии вычислительных экспериментов установлено, что предложенные схемы позволяют производить сглаживание сеток при перемещении узла на расстояние, не превышающее линейного размера ячейки, для объектов с выпуклой границей (примеры приведены на рис. 2).

Наличие отверстий (пустот) в области или сложной невыпуклой границы может приводить к вырожденной сетке конечных элементов. Если узел необходимо переместить на расстояние больше линейного размера ячейки, то возможно итерационное применение таких формул.

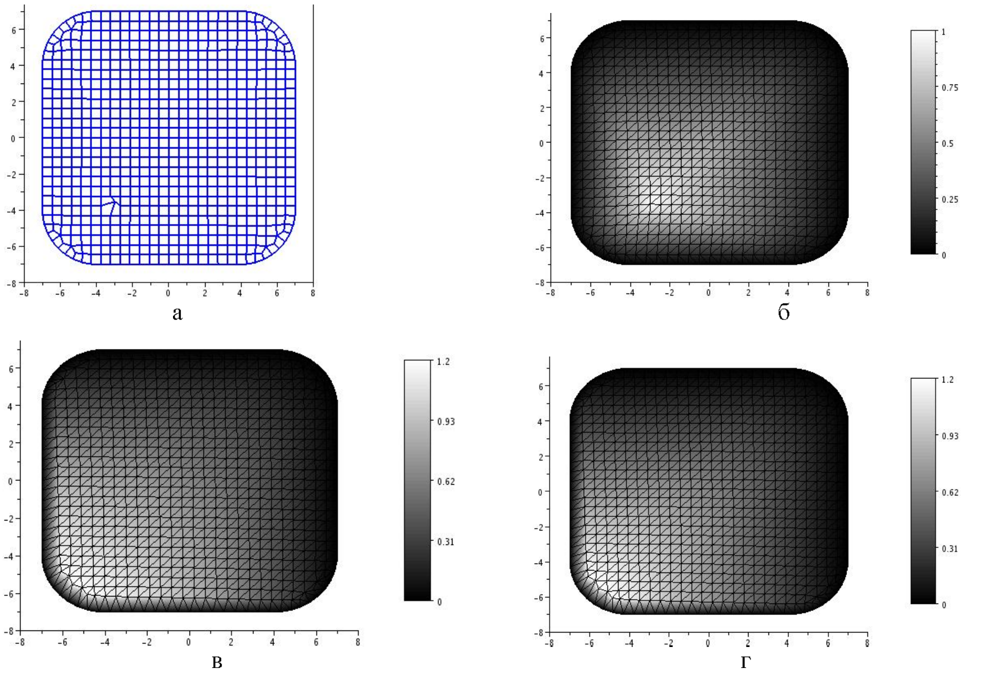


Рис. 2. Сглаживание сетки с перемещенным узлом: а – исходная сетка с перемещенным узлом; б – сглаживание сетки по схеме 1, а; в – сглаживание по схеме 1, б; г – сглаживание по схеме 1, в

3. Расстояние до ближайшей точки границы от сглаживаемого узла w_k. При такой схеме (рис. 3, а) функция $\text{dist}(x, y)$ может быть представлена отношением расстояния a к сумме расстояний b и c. При этом $a \le b + c$ и, следовательно, $0 \le \text{dist}(x, y) \le 1$ (0 – для граничных узлов, 1 – для перемещаемого узла). Функция $\text{dist}(x, y)$ будет уменьшаться с приближением сглаживаемого узла к границе. Что делает такой способ более перспективным относительно рассмотренных выше.

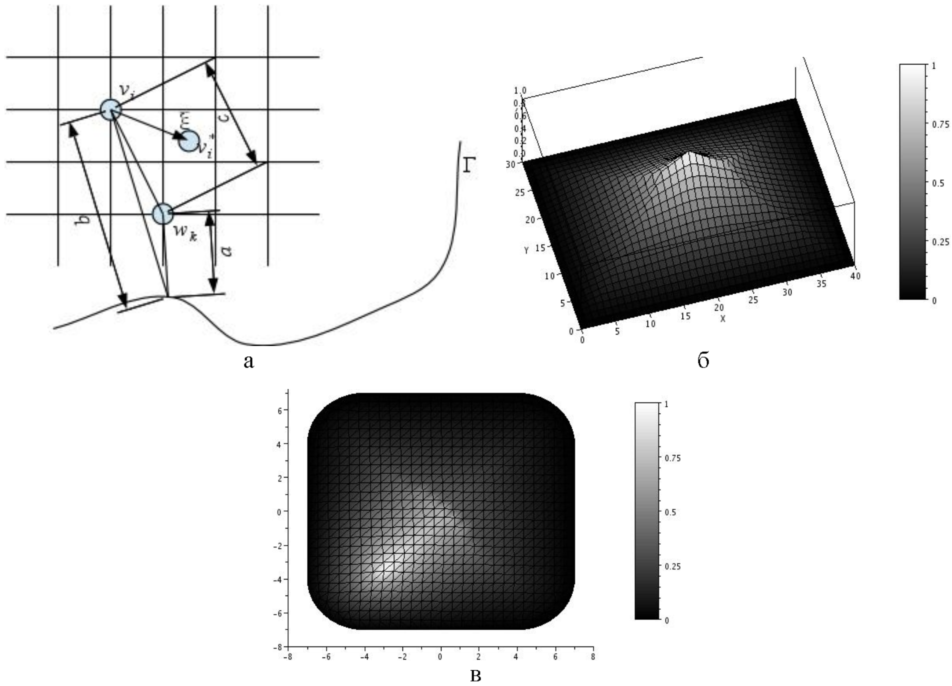
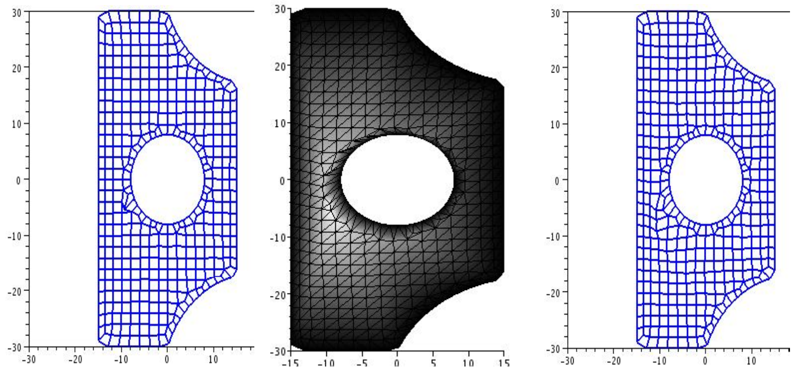


Рис. 3. Сглаживание на основе расстояния до ближайшей точки границы: а – схема функции сглаживания; б – распределение значений на равномерной сетке; в – пример сглаживания неравномерной сетки

ВЫВОДЫ

В ходе практических испытаний предложенных алгебраических подходов установлено, что в случае сложных границ могут возникать вырожденные сетки. Следовательно, возможным направлением развития способов автоматического размещения узлов сетки является учет кривизны (функционального представления) области. Хоть предложные способы при сглаживании и используют функции, основанные на расстоянии до границы, однако отсутствует возможность теоретической гарантии сохранения качества конечных элементов. При этом такие способы могут использоваться при интерактивном изменении положения узлов сетки с одновременным автоматическим контролем над качеством сетки. Также необходимо отметить, что при рассмотрении сеток для объектов со сложной границей и отверстиями наилучшие результаты показало сглаживание на основе расстояния до ближайшей точки границы (рис. 4).



а б в

Рис. 4. Объект со сложной границей: а – исходная сетка с перемещенным узлом; б – сглаживание способом 1, а (вырожденные элементы около границы); сглаживание способом 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz O. Z. The Finite Element Method. Volume 1: The Basis / O. Z. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000. – 689 p.
2. Zienkiewicz O. Z. The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics / O. Z. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000. – 459 p.
3. Smith I. M. Programming the finite element method / I. M. Smith, D. V. Griffits. – Chichester : Wiley, 2004. – 628 p.
4. Chen L. Mesh Smoothing Schemes Based on Optimal Delaunay Triangulations / Long Chen // Proceedings, 13th International Meshing Roundtable. – 2004. – №2004-3765C. – P. 109-120.
5. Amenta N. Optimal point placement for mesh smoothing / Nina Amenta, Marshall Bern, David Eppstein // Journal of Algorithms. – 1999. – Volume 30 Issue 2. – P. 302-322.
6. Vollmer J. Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes / J. Vollmer, R. Mencl, H. Müller // Computer Graphics Forum. – 1999. – Volume 18, Number 3. – P. 131-138.
7. Ruiz T. Some Properties of Area Functionals in Numerical Grid Generation / T. Ruiz, J. Gerardo, P.B. Sanchez, A.C. Medina // Proceedings, 10th International Meshing Roundtable [Sandia National Laboratories, October 7-10, 2001]. – California, 2001. – P. 43-54.
8. Khattri S. K. Hexahedral mesh by area functional / S. K. Khattri, G. Fladmark // International conference on numerical analysis and applied mathematics 2005 [Rhodes, Greek, September 16-20, 2005]. – Weinheim: Wiley-VCH, 2005. – P. 309-313.
9. Khattri S. K. Grid generation and adaptation by functionals / S. K. Khattri // Computational & Applied Mathematics. – 2007. – Volume 26, Number 2. – P. 235-279.