4. K. Rottwitt, J. Bromage, A. J. Stentz, L. Leng, M. E. Lines and H. Smith, J. Lightwave Techn. – 2003. – Vol. 21, № 7. – P. 1652-1662.
5. V. E. Perlin, H. G. Winful, IEEE J. Lightwave Techn. – 2002. – Vol.20, № 2. – P. 250-254.
6. A. R. Bahrampour, A. Ghasempour, L. Rahimi, Opt. Comm. – 2008. – № 281. – P. 1545-1547.
7. T. J. Ellingham, J. D. Ania-Castañón, S. K. Turitsyn, A. Pustovskikh, S. Kobtsev, M. P. Fedoruk, Opt. Expr. – 2005. – Vol. 13, № 4. – P. 1079-1084.
8. J. D. Ania-Castañón, A. A. Pustovskikh, S. M. Kobtsev, S. K. Turitsyn, Opt. Quant. Elelectron. – 2007. – Vol. 39. – P. 213-220.
9. K. Acharya, M. Y. A. Raja, Opt. Engin. – 2010. – Vol. 49, № 8. – P. 1-9.
10. R. Kumar, Inter. J. Comp. Sci. Tech. – 2010. – Vol. 1, № 1. – P. 64-66.
11. R. F. R. de Farias, P. H. S. Belisario, M. A. G. Martinez, M. T. M. R. Giraldi, M. J. Pontes, in SPIE2010. – 2010. – P. 1-6.
12. F. M. Mustafa, Ashraf A. M. Khalaf, F. A. Elgeldawy, in ICACT2013. – 2013. – P. 122-127.
13. H. Bissessur, in OFCINFOEC Techn. Dig. – 2013.
14. B. O. Rasheed, and P. M. Aljaff, Engin. and Techn. – 2009. – Vol. 30. – P. 963-965.
15. P. A. Korotkov, G. S. Felinskyi, Rev. Ukr. J. Phys. – 2009. – Vol. 5, № 2. – P. 103-169.
16. M. A. Soto, G. Bolognini, F. Di Pasquale, Opt. Expr. – 2011. – Vol. 19, № 5. – P. 4444-4457.
17. V. E. Perlin, H. G. Winful, in OFC2002. – 2002. – P. 57-59.
18. F. S. Gokhan, G. Yilmaz, Int. J. Comp. Math. Electrical and Electronic Engin. – 2012. – Vol. 31, № 2. – P. 330-345.
19. J. Bromage, J. of Light. Techn. – 2004. – Vol. 20, № 1. – P. 79-93.
20. M. Dyriv, P. Korotkov, G. Felinskyi, Bull. of Nat. Taras Shevchenko Univ. of Kyiv: Radiophysics and Electr. – 2012. – Vol. 18. – P. 15-18.
21. P. Belisario, M. Giraldi, R. Farias, and M. Martinez, in IMOC2009. – 2009. – P.690-694.

УДК 517.764

УПЛОЩАЮЩИЕ СВОЙСТВА ПОЛНОГО ЛИФТА ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Зубрилин К. М., к. ф.-м. н., ст. преподаватель

Феодосийский политехнический институт национального университета кораблестроения им. адм. Макарова

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального проективного преобразования. Касательное расслоение рассматривается как аффинно-связное пространство со связностью горизонтального лифта. Горизонтальный лифт аффинной связности представляет собой аффинную связность на касательном расслоении с нетривиальным кручением. Поэтому потребовалось распространить понятие E-лифта на случай тензора произвольного типа. Роль, которую играет E-лифт в ковариантном дифференцировании относительно связности горизонтального лифта, иллюстрируют полученные свойства.

Ключевые слова: уплощение, r-геодезическое инфинитезимальное преобразование, касательное расслоение, лифты.

Зубрілін К. М. СПЛОЩУЮЧІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВНОГО ЛІФТА ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ / Феодосійський політехнічний інститут Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова, Україна

Дана робота присвячена вивченню сплощуючих властивостей повного ліфта інфінітезимального проективного перетворення. Дотичне розшарування розглядається як афінно-зв'язний простір зі зв'язністю горизонтального ліфта. Горизонтальний ліфт афінної зв'язності є афінною зв'язністю на дотичному розшаруванні з нетривіальним скрутом. Тому треба було поширити поняття E-ліфта на випадок тензора довільного типу. Отримані властивості E-ліфта показують, яку роль він відіграє в коваріантному диференціюванні щодо зв'язності горизонтального ліфта.

Ключові слова: сплощення, r -геодезичне інфінітезимальне перетворення, дотичне розшарування, ліфти.

Zubrilin K. M. THE FLATTENING PROPERTIES OF THE COMPLETE LIFT OF THE INFINITESIMAL PROJECTIVE TRANSFORMATION / Feodosijsky polytechnical institute of National University of Shipbuilding, Ukraine

This work is devoted to studying of the flattening properties of the complete lift of the infinitesimal projective transformation. The tangent bundle is considered as the affinely connected space with the horizontal lift connection. The horizontal lift of the affine connection is the affine connection with torsion on the tangent bundle. Therefore the E-lift concept was required to be extended to a case of any type tensor. The received properties of the E-lift show a role which it plays in covariant differentiation concerning of the horizontal lift connection.

Key words: flattening, r -geodesic infinitesimal transformation, tangent bundle, lifts.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение лифтов инфинитезимальных преобразований восходит к работам K. Yano и S. Ishihara [1, 2]. В частности, ими установлено, что полный лифт инфинитезимального проективного преобразования является инфинитезимальным проективным преобразованием относительно связности полного лифта, тогда и только тогда, когда исходное преобразование является инфинитезимальным аффинным. В общем случае геометрическая природа полного лифта инфинитезимального преобразования ими не установлена. В работах С. Г. Лейко она была освещена в рамках теории уплощенных отображений. А именно, С. Г. Лейко рассматривает уплощенные инфинитезимальные преобразования (так называемые r -г.и.п.). Им получено полное описание уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального проективного преобразования, относительно связности полного лифта, для касательного расслоения первого и второго порядков [3]. В работе [4] изучаются уплощенные инфинитезимальные преобразования (относительно связности полного лифта) касательного расслоения первого порядка, порожденные лифтами инфинитезимального конциркулярного преобразования. Случай касательного расслоения второго порядка рассмотрен в работе [5]. В работе [6] рассматриваются уплощенные инфинитезимальные преобразования касательных расслоений первого и второго порядков (относительно связности полного лифта), порожденные лифтами инфинитезимальных голоморфно-проективных преобразований келеровых пространств.

Данная работа посвящена изучению уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального проективного преобразования. Касательное расслоение рассматривается как аффинно-связное пространство со связностью горизонтального лифта. Ввиду того, что горизонтальный лифт аффинной связности представляет собой аффинную связность на касательном расслоении с нетривиальным кручением, потребовалось распространить понятие E-лифта, введенное в работе [7] для тензорного поля типа (1,1), на случай тензора произвольного типа. Роль, которую играет E-лифт в ковариантном дифференцировании относительно связности горизонтального лифта, иллюстрируют полученные свойства.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПЛОЩЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1.1. Уплощенные кривые. Вектор r -ой кривизны ξ_r кривой $\mathcal{C}$ определяется индуктивно: $\xi_r = \nabla_t \xi_{r-1}$, $\xi_0 = \xi$ – поле касательных векторов вдоль кривой $\mathcal{C}$.

Определение 1 [3, 4]. *Произвольно возьмем точку $p \in \mathcal{C}$ на кривой $\mathcal{C}$. Если в точке p векторы ξ, ξ_1, …, ξ_{m-1} линейно независимы, а векторы ξ, ξ_1, …, ξ_{m-1}, ξ_m линейно зависимы, то говорят, что кривая $\mathcal{C}$ в точке p имеет уплощение m-го порядка*; число m называется *порядком уплощения точки p* кривой $\mathcal{C}$.

По свойствам внешнего произведения, *условия*

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{m-1} \wedge \xi_m = 0, \quad \xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{m-1} \neq 0, \tag{1}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы кривая $\mathcal{C}$ имела в точке p уплощение m-го порядка.

Определение 2 [3, 4]. *Кривая $\mathcal{C}$ в аффинно-связном пространстве (M, ∇) называется m-геодезической, если в каждой своей точке она имеет уплощение m-го порядка.*

Для того, чтобы кривая $\mathcal{C}$ была m-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее выполнялись условия (1).

1.2. Уплощенные инфинитезимальные преобразования. Пусть X – инфинитезимальное преобразование, то есть $X \in \mathrm{X}(M)$ векторное поле и τ_ε – инфинитезимальное точечное преобразование, определяемое правилом τ_ε: $\tilde{u}^h = u^h + \varepsilon \cdot X_p^h$, $h = \overline{1, n}$, ε – инфинитезимальный параметр, $(U; u^h)$ – координатная окрестность. Под действием инфинитезимального точечного преобразования τ_ε геодезическая кривая $\mathcal{C} \subset U$ переходит в кривую $\overline{\mathcal{C}}_\varepsilon$. Рассмотрим поле касательных векторов $\overline{\xi}^{(\varepsilon)}$ и поля векторов кривизн $\overline{\xi}_m^{(\varepsilon)}$, $m = 1, 2, \ldots$ вдоль кривой $\overline{\mathcal{C}}_\varepsilon$.

Определение 3 [3, 4]. *Будем говорить, что инфинитезимальное преобразование X сообщает геодезической кривой $\mathcal{C}$ уплощение r-го порядка в точке $p \in \mathcal{C}$, если* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^r} \overline{\xi}^{(\varepsilon)}_{\tau_\varepsilon(p)} \wedge \overline{\xi}^{(\varepsilon)}_{1\ \tau_\varepsilon(p)} \wedge \ldots \wedge \overline{\xi}^{(\varepsilon)}_{r\ \tau_\varepsilon(p)} = 0$, *и число r наименьшее из возможных.*

Возьмем прообраз $\tilde{\overline{\nabla}}_{(\varepsilon)}$ аффинной связности ∇ относительно инфинитезимального точечного преобразования τ_ε. Построим поле касательных векторов ξ и поля векторов кривизн $\tilde{\overline{\xi}}_m^{(\varepsilon)}$, $m = 1, 2, \ldots$ вдоль геодезической кривой $\mathcal{C}$ относительно связности $\tilde{\overline{\nabla}}_{(\varepsilon)}$. Поскольку дифференциал инфинитезимального точечного преобразования τ_ε в точке $p \in \mathcal{C}$ является изоморфизмом структуры линейного топологического пространства, то данное определение эквивалентно следующему.

Определение 4. *Будем говорить, что инфинитезимальное преобразование X сообщает геодезической кривой $\mathcal{C}$ уплощение r-го порядка в точке $p \in \mathcal{C}$, если* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^r} \xi_p \wedge \tilde{\overline{\xi}}^{(\varepsilon)}_{1\ p} \wedge \ldots \wedge \tilde{\overline{\xi}}^{(\varepsilon)}_{r\ p} = 0$, *и число r наименьшее из возможных.*

Определение 5 [3, 4]. *Инфинитезимальное преобразование X аффинно-связного пространства (M, ∇) называется r-геодезическим инфинитезимальным преобразованием* (кратко, *r-г.и.п.*), *если оно каждой геодезической кривой $\mathcal{C}$ в каждой точке $p \in \mathcal{C}$ сообщает уплощение m-го порядка, $m \leq r$. Число m может зависеть как от выбора геодезической кривой $\mathcal{C}$, так и точки на ней, а число r наибольшее из всех возможных чисел m.*

Теорема 1. *Пусть в аффинно-связном пространстве (M, ∇) задана геодезическая кривая $\mathcal{C}$, отнесенная к каноническому параметру t, ξ – поле касательных векторов к кривой $\mathcal{C}$, и X – инфинитезимальное преобразование на M. Тогда векторы кривизн геодезической кривой $\mathcal{C}$, относительно прообраза $\tilde{\overline{\nabla}}_{(\varepsilon)}$ аффинной связности ∇ при инфинитезимальном точечном преобразовании τ_ε, определяемом векторным полем X, имеют вид*:

$$\tilde{\overline{\xi}}_m^{(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot L_{m,X}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{m+1} + \underline{O}(\varepsilon^2), \ (\textit{соотв. } \tilde{\overline{\xi}}_m^{(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot \mathcal{L}_{m,X}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{m+1} + \underline{O}(\varepsilon^2)), \tag{2}$$

где тензорные поля $L_{m,X} \in \mathrm{T}^1_{m+1}(M)$ (*соотв.* $\mathcal{L}_{m,X} \in \mathfrak{T}^1_{m+1}(M)$) *определяются правилом* $L_{1,X} = \mathsf{L}_X \nabla$, $L_{m,X} = \nabla L_{m-1,X}$ (*соотв.* $\mathcal{L}_{1,X} = S(\mathsf{L}_X \nabla)$[1], $\mathcal{L}_{m,X} = S(\nabla \mathcal{L}_{m-1,X})$).

Доказательство проведем индукцией по числу m. При $m = 1$ утверждение получается из теоремы 4 [6, стр. 40]. Предположим, уже показано, что $\tilde{\overline{\xi}}_{m-1}^{(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot L_{m-1,X}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{m} + \underline{O}(\varepsilon^2)$. Рассмотрим тензор

$$P_{m-1}^{(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot L_{m-1,X} + \underline{O}(\varepsilon^2) \in \mathrm{T}^1_m(U). \tag{3}$$

Тогда очевидно $P_{m-1}^{(\varepsilon)}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{m} = \varepsilon \cdot L_{m-1,X}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{m} + \underline{O}(\varepsilon^2) = \tilde{\overline{\xi}}_{m-1}^{(\varepsilon)}$. Применяя теорему 3 [6, стр. 39], получим $\tilde{\overline{\xi}}_m^{(\varepsilon)} = P_m^{(\varepsilon)}\underbrace{(\xi, \ldots, \xi)}_{m+1}$, где тензор $P_m^{(\varepsilon)} \in \mathrm{T}^1_{m+1}(U)$ определяется равенством

$$P_m^{(\varepsilon)} = \nabla P_{m-1}^{(\varepsilon)} + P^{(\varepsilon)} \circ \left(\delta \otimes P_{m-1}^{(\varepsilon)}\right) = \nabla P_{m-1}^{(\varepsilon)} + c_1^2 c_2^3 \left(P^{(\varepsilon)} \otimes \delta \otimes P_{m-1}^{(\varepsilon)}\right). \tag{4}$$

---

[1] S – оператор симметрирования

С учетом равенства (3), будем иметь $\nabla P_{m-1}^{(\varepsilon)} = \nabla\left(\varepsilon \cdot L_{m-1,X} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right)\right) = \varepsilon \cdot L_{m,X} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$, и

$$c_1^2 c_2^3\left(P^{(\varepsilon)} \otimes \delta \otimes P_{m-1}^{(\varepsilon)}\right) = c_1^2 c_2^3\left(\left(\varepsilon \cdot \mathsf{L}_X \nabla + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right)\right) \otimes \delta \otimes \left(\varepsilon \cdot L_{m-1,X} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right)\right)\right) = \underline{O}\left(\varepsilon^2\right);$$

в таком случае с учетом правила $\underline{O}\left(\varepsilon^2\right) + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right) = \underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$, равенство (4) примет вид

$$P_m^{(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot L_{m,X} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Отсюда уже получим $\tilde{\xi}_m^{(\varepsilon)} = P_m^{(\varepsilon)}\underbrace{\left(\xi, \ldots, \xi\right)}_{m+1} = \varepsilon \cdot L_{m,X}\underbrace{\left(\xi, \ldots, \xi\right)}_{m+1} + \underline{O}\left(\varepsilon^2\right)$, что завершает доказательство.

Используя предыдущую теорему, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^r} \xi \wedge \tilde{\xi}_1^{(\varepsilon)} \wedge \ldots \wedge \tilde{\xi}_r^{(\varepsilon)} = \delta\left(\xi\right) \wedge L_{1,X}\left(\xi, \xi\right) \wedge \ldots \wedge L_{r,X}\left(\xi, \ldots, \xi\right),$$

$$\text{(соотв. } \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^r} \xi \wedge \tilde{\xi}_1^{(\varepsilon)} \wedge \ldots \wedge \tilde{\xi}_r^{(\varepsilon)} = \delta\left(\xi\right) \wedge \mathcal{L}_{1,X}\left(\xi, \xi\right) \wedge \ldots \wedge \mathcal{L}_{r,X}\left(\xi, \ldots, \xi\right)\text{).}$$

Данное равенство позволяет получить необходимое и достаточное условие r-г.и.п. А именно, для того, чтобы инфинитезимальное преобразование X являлось r-г.и.п., необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\delta\left(\xi\right) \wedge L_{1,X}\left(\xi, \xi\right) \wedge \ldots \wedge L_{r,X}\left(\xi, \ldots, \xi\right) = 0, \quad \delta\left(\xi\right) \wedge L_{1,X}\left(\xi, \xi\right) \wedge \ldots \wedge L_{r-1,X}\left(\xi, \ldots, \xi\right) \neq 0$$

$$\text{(соотв. } \delta\left(\xi\right) \wedge \mathcal{L}_{1,X}\left(\xi, \xi\right) \wedge \ldots \wedge \mathcal{L}_{r,X}\left(\xi, \ldots, \xi\right) = 0, \quad \delta\left(\xi\right) \wedge \mathcal{L}_{1,X}\left(\xi, \xi\right) \wedge \ldots \wedge \mathcal{L}_{r-1,X}\left(\xi, \ldots, \xi\right) \neq 0\text{)}$$

для произвольных ξ. Из произвольности ξ получим

$$S\left(\delta \wedge L_{1,X} \wedge \ldots \wedge L_{r,X}\right) = 0, \quad S\left(\delta \wedge L_{1,X} \wedge \ldots \wedge L_{r-1,X}\right) \neq 0$$

$$\text{(соотв. } S\left(\delta \wedge \mathcal{L}_{1,X} \wedge \ldots \wedge \mathcal{L}_{r,X}\right) = 0, \quad S\left(\delta \wedge \mathcal{L}_{1,X} \wedge \ldots \wedge \mathcal{L}_{r-1,X}\right) \neq 0\text{).} \tag{5}$$

Равенства (5) представляют собой уравнения r-г.и.п., полученные С. Г. Лейко в координатной форме.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЛИФТОВ

2.1. Вертикальный, полный и горизонтальный лифты. Рассмотрим тензорное поле $T \in \mathrm{T}_s^r\left(M\right)$, которое в координатной окрестности $\left(U; u^k\right)$ имеет разложение $T = T_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \ldots \otimes$ $\otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_s}$. Учитывая свойства лифтов, получим

$$T^{\mathrm{V}} = T_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}. \tag{6}$$

Если $\tilde{X}_k$, ($1 \le k \le s$) вертикальное векторное поле (то есть $\tilde{X}_k^j = 0$), то

$$T^{\mathrm{C}}\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_s\right) = T_{j_1 \ldots j_k \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \tilde{X}_1^{j_1} \ldots \tilde{X}_k^{\overline{j_k}} \ldots \tilde{X}_s^{j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}}. \tag{7}$$

и

$$T^{\mathrm{H}}\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_s\right) = T_{j_1 \ldots j_k \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_r} \tilde{X}_1^{j_1} \ldots \tilde{X}_k^{\overline{j_k}} \ldots \tilde{X}_s^{j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}}. \tag{8}$$

В частности, если среди векторных полей $\tilde{X}_l$, ($1 \le l \le s$) число вертикальных векторных полей больше единицы, то $T^{\mathrm{C}}\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_s\right) = 0$. Сопоставляя равенства (7) и (8), приходим к равенству $T^{\mathrm{C}}\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_s\right) = T^{\mathrm{H}}\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_s\right)$. Кроме того, из равенства (8) следует, что если среди векторных полей $\tilde{X}_l$

($1 \le l \le s$) число вертикальных векторных полей больше единицы, то $T^{\mathrm{H}}\left(\tilde{\tilde{X}}_1,\dots,\tilde{\tilde{X}}_s\right)=0$. Тем самым, доказано следующее

Предложение 1. *Пусть среди векторных полей* $\tilde{\tilde{X}}_l$, ($1 \le l \le s$) *только одно вертикальное векторное поле. Тогда*

$$T^{\mathrm{V}}\left(\tilde{\tilde{X}}_1,\dots,\tilde{\tilde{X}}_s\right)=0, \quad T^{\mathrm{C}}\left(\tilde{\tilde{X}}_1,\dots,\tilde{\tilde{X}}_s\right)=T^{\mathrm{H}}\left(\tilde{\tilde{X}}_1,\dots,\tilde{\tilde{X}}_s\right).$$

Если среди векторных полей $\tilde{\tilde{X}}_l$, ($1 \le l \le s$) *более одного вертикального векторного поля, то*

$$T^{\mathrm{C}}\left(\tilde{\tilde{X}}_1,\dots,\tilde{\tilde{X}}_s\right)=0, \quad T^{\mathrm{H}}\left(\tilde{\tilde{X}}_1,\dots,\tilde{\tilde{X}}_s\right)=0.$$

2.2. Гамма-оператор. Понятие γ-оператора рассматривается в работе [1]. Мы приведем его в более употребительной форме.

Определение 6. $\underset{k}{\gamma}$ *-оператором будем называть отображение* $\mathrm{T}_s^r(M)\to \mathrm{T}_{s-1}^r(\mathbf{T}M)$, *которое каждому тензорному полю* $T\in \mathrm{T}_s^r(M)$, *имеющему в карте* $(U;u^k)$ *разложение*

$$T=T_{j_1\dots j_{k-1}j_kj_{k+1}\dots j_s}^{i_1\dots i_r}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\otimes du^{j_1}\otimes\dots\otimes du^{j_{k-1}}\otimes du^{j_k}\otimes du^{j_{k+1}}\otimes\dots\otimes du^{j_s}$$

сопоставляет тензорное поле $\underset{k}{\gamma}T\in \mathrm{T}_{s-1}^r(\mathbf{T}M)$, *имеющее в индуцированной карте* $\left(\pi^{-1}(U);x^k,y^k\right)$ *разложение*

$$\underset{k}{\gamma}T=y^{\alpha}T_{j_1\dots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\dots j_s}^{i_1\dots i_r}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\dots\otimes dx^{j_{k-1}}\otimes dx^{j_{k+1}}\otimes\dots\otimes dx^{j_s}.$$

Гамма-оператор $\underset{k}{\gamma}T$ будем также обозначать развернуто в виде $\gamma\left\{T\left(\cdot,\underset{k}{\cdot}\right)\right\}$; гамма-оператор $\underset{1}{\gamma}T=\gamma\left\{T(\cdot,)\right\}$ будем обозначать кратко γT.

Нетрудно показать, что если тензорное поле T определено глобально, то тензорное поле $\underset{k}{\gamma}T$ также определено глобально.

Пример. Пусть ковекторное поле $\omega\in \mathrm{X}^*(M)$ имеем в карте $(U;u^k)$ разложение $\omega=\omega_j du^j$. Тогда по определению $\gamma\omega=y^{\alpha}\omega_{\alpha}\in \mathrm{F}(\mathbf{T}M)$ – гладкая функция на касательном расслоении $\mathbf{T}M$.

Предложение 2.

1. *Для произвольных тензорного поля* $T\in \mathrm{T}_s^r(M)$ *и функции* $f\in \mathrm{F}(M)$: $\underset{k}{\gamma}(fT)=f^{\mathrm{V}}\underset{k}{\gamma}T$.
2. *Для произвольных тензорных полей* $T,P\in \mathrm{T}_s^r(M)$: $\underset{k}{\gamma}(T+P)=\underset{k}{\gamma}T+\underset{k}{\gamma}P$.
3. *Для произвольных тензорных полей* $T\in \mathrm{T}_s^r(M)$ *и* $S\in \mathrm{T}_{\sigma}^{\rho}(M)$ *для* $1\le k\le s$ *справедливо равенство* $\underset{k}{\gamma}\{T\otimes S\}=\underset{k}{\gamma}T\otimes S^{\mathrm{V}}$, *а для* $1\le k\le \sigma$ *справедливо равенство* $\underset{s+k}{\gamma}\{T\otimes S\}=T^{\mathrm{V}}\otimes\underset{k}{\gamma}S$.
4. *Если среди векторных полей* $\tilde{\tilde{X}}_l$, ($1\le l\le s$) *на* $\mathbf{T}M$ *имеется хотя бы одно вертикальное векторное поле, то* $\underset{k}{\gamma}T\left(\tilde{\tilde{X}}_1,\dots,\tilde{\tilde{X}}_{k-1},\tilde{\tilde{X}}_{k+1},\dots,\tilde{\tilde{X}}_s\right)=0$.
5. *Для тензорного поля* $T\in \mathrm{T}_s^r(M)$ *и векторных полей* $X_l\in \mathrm{X}(M)$, ($1\le l\le s$):

$$\gamma\left\{T\left(X_1,\dots,X_{k-1},\cdot,X_{k+1},\dots,X_s\right)\right\}=\underset{k}{\gamma}T\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right).$$

6. *Пусть теперь* $\omega_l\in \mathrm{X}^*(M)$, $1\le l\le s$ *– ковекторные поля на* M *и* $T\in \mathrm{T}_0^r(M)$. *Тогда*

$$\underset{k}{\gamma}\left(\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_k\otimes\omega_{k+1}\otimes\dots\otimes\omega_s\otimes T\right)=\omega_1^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}^{\mathrm{V}}\otimes\gamma\omega_k\omega_{k+1}^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_s^{\mathrm{V}}\otimes T^{\mathrm{V}}.$$

Доказательство.

1. *Данное* свойство получается из равенства $\left(fT\right)_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} = fT_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}$.

2. Свойство получается из равенства $\left(T+P\right)_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} = T_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} + P_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}$.

3. Для тензорного поля $S \in \mathsf{T}_{\sigma}^{\rho}\left(M\right)$, имеющего в карте $\left(U;u^k\right)$ разложение

$$S = S_{\varphi_1\ldots\varphi_\sigma}^{t_1\ldots t_\rho} \frac{\partial}{\partial u^{t_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{t_\rho}} \otimes du^{\varphi_1} \otimes \ldots \otimes du^{\varphi_\sigma},$$

тензорное произведение $T \otimes S$ имеет, очевидно, в той же карте разложение

$$T \otimes S = T_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} S_{\varphi_1\ldots\varphi_\sigma}^{t_1\ldots t_\rho} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_r}} \otimes \frac{\partial}{\partial u^{t_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{t_\rho}} \otimes du^{j_1} \otimes \ldots \otimes du^{j_s} \otimes du^{\varphi_1} \otimes \ldots \otimes du^{\varphi_\sigma}.$$

Тогда при $1 \le k \le s$ выражение для γ-оператора примет вид:

$$\underset{k}{\gamma}\left\{T \otimes S\right\} = y^{\alpha} T_{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} S_{\varphi_1\ldots\varphi_\sigma}^{t_1\ldots t_\rho} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{t_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{t_\rho}} \otimes$$

$$\otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{k-1}} \otimes dx^{j_{k+1}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^{\varphi_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\varphi_\sigma} =$$

$$= \left(y^{\alpha} T_{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{k-1}} \otimes dx^{j_{k+1}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \right) \otimes$$

$$\otimes \left(S_{\varphi_1\ldots\varphi_\sigma}^{t_1\ldots t_\rho} \frac{\partial}{\partial y^{t_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{t_\rho}} \otimes dx^{\varphi_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\varphi_\sigma} \right).$$

Отсюда, с учетом равенства (6) и определения 6, получим первое равенство. Второе равенство получается аналогично.

4. Для произвольных векторных полей $\tilde{X}_l = \tilde{X}_l^{i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}_l^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial y^i}$, ($1 \le l \le s$) на $\mathbf{T}M$ будем иметь

$$\underset{k}{\gamma} T\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{k-1}, \tilde{X}_{k+1}, \ldots, \tilde{X}_s\right) = y^{\alpha} T_{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} \tilde{X}_1^{j_1} \ldots \tilde{X}_{k-1}^{j_{k-1}} \tilde{X}_{k+1}^{j_{k+1}} \ldots \tilde{X}_s^{j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если среди векторных полей $\tilde{X}_l$, ($1 \le l \le s$) имеется хотя бы одно вертикальное векторное поле, то $\underset{k}{\gamma} T\left(\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{k-1}, \tilde{X}_{k+1}, \ldots, \tilde{X}_s\right) = 0$.

5. Из равенства, полученного в (4), для полных лифтов $X_l^{\mathrm{C}} = X_l^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial X_l^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ векторных полей $X_l = X_l^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, получим $\underset{k}{\gamma} T\left(X_1^{\mathrm{C}}, \ldots, X_{k-1}^{\mathrm{C}}, X_{k+1}^{\mathrm{C}}, \ldots, X_s^{\mathrm{C}}\right) = y^{\alpha} T_{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} X_1^{j_1} \ldots X_{k-1}^{j_{k-1}} X_{k+1}^{j_{k+1}} \ldots X_s^{j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}}$.

Для тензорного поля $T \in \mathsf{T}_s^r\left(M\right)$ и векторных полей $X_l \in \mathsf{X}\left(M\right)$ определим тензорное поле $T\left(X_1, \ldots, X_{k-1}, \cdot, X_{k+1}, \ldots, X_s\right) \in \mathsf{T}_1^r\left(M\right)$ правилом

$$T\left(X_1, \ldots, X_{k-1}, \cdot, X_{k+1}, \ldots, X_s\right)\left(Y\right) = T\left(X_1, \ldots, X_{k-1}, Y, X_{k+1}, \ldots, X_s\right)$$

для произвольного $Y \in \mathsf{X}\left(M\right)$. Тогда по определению γ-оператора

$$\gamma\left\{T\left(X_1, \ldots, X_{k-1}, \cdot, X_{k+1}, \ldots, X_s\right)\right\} = y^{\alpha} T_{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r} X_1^{j_1} \ldots X_{k-1}^{j_{k-1}} X_{k+1}^{j_{k+1}} \ldots X_s^{j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}}.$$

Сопоставляя равенства, видим $\gamma\left\{T\left(X_1, \ldots, X_{k-1}, \cdot, X_{k+1}, \ldots, X_s\right)\right\} = \underset{k}{\gamma} T\left(X_1^{\mathrm{C}}, \ldots, X_{k-1}^{\mathrm{C}}, X_{k+1}^{\mathrm{C}}, \ldots, X_s^{\mathrm{C}}\right)$.

6. Получается применением свойства 3. Предложение доказано.

1.3. Е-лифт тензорного поля. В работе [7] введено понятие Е-лифта тензорного поля типа (1,1) и изучен ряд его свойств. Распространим это понятие на произвольное тензорное поле. Пусть $\delta \in \mathrm{T}_1^1(M)$ – единичный аффинор.

Определение 7. $\underset{k}{\mathrm{E}}$*-лифтом тензорного поля* $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$ *будем называть тензорное поле* $T^{\underset{k}{\mathrm{E}}} \in \mathrm{T}_s^r(\mathbf{T}M)$, *которое определяется равенством*

$$T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}}\right)=T^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}}\right)$$

для произвольных векторных полей X_l, $1 \le l \le s$, *на* M.

При этом $\underset{1}{\mathrm{E}}$*-лифт будем называть просто* E*-лифтом.*

Поскольку векторное поле $\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right)$ является вертикальным [7, стр. 54], то согласно предложению 1, получим

$$T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}}\right)=T^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}}\right).$$

Пример. Рассмотрим ковекторное поле $\omega \in \mathrm{X}^*(M)$. Тогда из определения 7 и утверждения 4 [7, стр. 55], для произвольного векторного поля $X \in \mathrm{X}(M)$ получим

$$\omega^{\mathrm{E}}\left(X^{\mathrm{C}}\right)=\omega^{\mathrm{C}}\left(\delta^{\mathrm{E}}\left(X^{\mathrm{C}}\right)\right)=\left(\omega^{\mathrm{C}}\circ\delta^{\mathrm{E}}\right)\left(X^{\mathrm{C}}\right)=\left(\omega\circ\delta\right)^{\mathrm{H}}\left(X^{\mathrm{C}}\right)=\omega^{\mathrm{H}}\left(X^{\mathrm{C}}\right),$$

что влечет $\omega^{\mathrm{E}}=\omega^{\mathrm{H}}$. В частности, $\left(du^k\right)^{\mathrm{E}}=\Gamma_i^k dx^i+dy^k$.

Предложение 3.

1. *Для произвольных тензорных полей* $T,P \in \mathrm{T}_s^r(M)$ *справедливо равенство*

$$\left(T+P\right)^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}+P^{\underset{k}{\mathrm{E}}}.$$

2. *Для функции* $f \in \mathrm{F}(M)$ *и тензорного поля* $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$: $\left(fT\right)^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=f^{\mathrm{V}}T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}$.

3. *Для произвольных тензорных полей* $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$ *и* $S \in \mathrm{T}_\sigma^\rho(M)$ *при* $1 \le k \le s$ *верно равенство* $\left(T\otimes S\right)^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}\otimes S^{\mathrm{V}}$, *а при* $1 \le k \le \sigma$ *верно равенство* $\left(T\otimes S\right)^{\underset{s+k}{\mathrm{E}}}=T^{\mathrm{V}}\otimes S^{\underset{k}{\mathrm{E}}}$.

4. *Пусть* $\omega_l \in \mathrm{X}^*(M)$, $1 \le l \le s$ *– ковекторные поля на* M *и* $T \in \mathrm{T}_0^r(M)$. *Тогда*

$$\left(\omega_1\otimes...\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_k\otimes\omega_{k+1}\otimes...\otimes\omega_s\otimes T\right)^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=\omega_1^{\mathrm{V}}\otimes...\otimes\omega_{k-1}^{\mathrm{V}}\otimes\omega_k^{\mathrm{E}}\otimes\omega_{k+1}^{\mathrm{V}}\otimes...\otimes\omega_s^{\mathrm{V}}\otimes T^{\mathrm{V}}.$$

5. *Для тензорного поля* $T \in \mathrm{T}_s^0(M)$ *имеет место равенство* $T^{\mathrm{H}}=\sum_{k=1}^{s}T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}$.

6. *Если тензорное поле* $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$ *имеет в карте* $\left(U;u^k\right)$ *разложение*

$$T=T_{j_1...j_k...j_s}^{i_1...i_r}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes...\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\otimes du^{j_1}\otimes...\otimes du^{j_k}\otimes...\otimes du^{j_s},$$

то $T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}$ *в индуцированной карте* $\left(\pi_2^{-1}(U);x^k,y^k\right)$ *имеет разложение*

$$T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=T_{j_1...\underset{k}{\alpha}...j_s}^{i_1...i_r}\Gamma_{j_k}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\otimes...\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes...\otimes dx^{j_k}\otimes...\otimes dx^{j_s}+$$

$$+T_{j_1...j_k...j_s}^{i_1...i_r}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\otimes...\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes...\otimes dy^{j_k}\otimes...\otimes dx^{j_s}.$$

Доказательство.

1. Рассмотрим два тензорных поля $T, P \in \mathrm{T}_s^r(M)$. Тогда, по свойству полного лифта и определению $\underset{k}{\mathrm{E}}$-лифта, получим

$$(T+P)^{\underset{k}{\mathrm{E}}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=(T+P)^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=T^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)+P^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=\left(T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}+P^{\underset{k}{\mathrm{E}}}\right)\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right),$$

что влечет требуемое.

2. Аналогично предыдущему.

3. Рассмотрим теперь два тензорных поля $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$ и $S \in \mathrm{T}_\sigma^\rho(M)$. Пусть $1 \le k \le s$. Тогда для произвольных векторных полей X_l, $1 \le l \le s$ и Y_m, $1 \le m \le \sigma$, получим

$$(T\otimes S)^{\underset{k}{\mathrm{E}}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}},Y_1^{\mathrm{C}},\dots,Y_\sigma^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=\left(T^{\mathrm{V}}\otimes S^{\mathrm{C}}+T^{\mathrm{C}}\otimes S^{\mathrm{V}}\right)\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}},Y_1^{\mathrm{C}},\dots,Y_\sigma^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=T^{\mathrm{V}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)\cdot S^{\mathrm{C}}\left(Y_1^{\mathrm{C}},\dots,Y_\sigma^{\mathrm{C}}\right)+$$

$$+T^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)\cdot S^{\mathrm{V}}\left(Y_1^{\mathrm{C}},\dots,Y_\sigma^{\mathrm{C}}\right).$$

Так как $\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right)$ – вертикальное векторное поле, то $T^{\mathrm{V}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),X_{k+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=0$. Следовательно, будем иметь требуемое. Аналогично доказывается второе равенство.

4. Получается применением предыдущего свойства.

5. Достаточно проверить данное равенство для разложимых тензоров $T=\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_s$, где ω_i – произвольные ковекторные поля на M. Применяя свойство горизонтального лифта, получим $T^{\mathrm{H}}=\sum_{k=1}^{s}\omega_1^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}^{\mathrm{V}}\otimes\omega_k^{\mathrm{H}}\otimes\omega_{k+1}^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_s^{\mathrm{V}}$. Согласно приведенному выше примеру $\omega_k^{\mathrm{H}}=\omega_k^{\mathrm{E}}$, применяя свойство 4 для тензора T, будем иметь $T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=\omega_1^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}^{\mathrm{V}}\otimes\omega_k^{\mathrm{E}}\otimes\omega_{k+1}^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_s^{\mathrm{V}}$. Собирая все вместе, получим требуемое равенство.

6. Пусть тензорное поле $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$, имеет в карте $\left(U;u^k\right)$ разложение

$$T=T_{j_1\dots j_{k-1}j_kj_{k+1}\dots j_s}^{i_1\dots i_r}\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\otimes\dots\otimes\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\otimes du^{j_1}\otimes\dots\otimes du^{j_{k-1}}\otimes du^{j_k}\otimes du^{j_{k+1}}\otimes\dots\otimes du^{j_s}.$$

Тогда, учитывая предыдущие свойства, находим

$$T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=T_{j_1\dots j_{k-1}j_kj_{k+1}\dots j_s}^{i_1\dots i_r}\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\right)^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right)^{\mathrm{V}}\otimes\left(du^{j_1}\right)^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\left(du^{j_{k-1}}\right)^{\mathrm{V}}\otimes\left(du^{j_k}\right)^{\mathrm{E}}\otimes\left(du^{j_{k+1}}\right)^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\left(du^{j_s}\right)^{\mathrm{V}}.$$

Отсюда, так как $\left(du^{j_k}\right)^{\mathrm{E}}=\left(du^{j_k}\right)^{\mathrm{H}}=\Gamma_i^{j_k}dx^i+dy^{j_k}$, будем иметь требуемое. Предложение доказано.

2.4. Ковариантное дифференцирование относительно связности горизонтального лифта.

Теорема 2. *Для произвольного тензорного поля $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$ на аффинно-связном пространстве (M,∇) имеет место равенство $\nabla^{\mathrm{H}}T^{\mathrm{H}}=(\nabla T)^{\mathrm{H}}-(\nabla T)^{\underset{s+1}{\mathrm{E}}}$.*

Доказательство. Как показано в [1], для произвольного векторного поля X на M справедливо равенство $\nabla_{X^{\mathrm{C}}}^{\mathrm{H}}T^{\mathrm{H}}=\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}$. Возьмем произвольно векторные поля X_l, $1 \le l \le s$ на M. Тогда, с учетом определения ковариантного дифференциала [8, стр. 122] и сказанного выше, получим

$$\nabla^{\mathrm{H}}T^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)=\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}T^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}}\right)=\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}}\right). \tag{9}$$

Из определения горизонтального лифта [1] имеем $X_l^{\mathrm{C}}=X_l^{\mathrm{H}}+\nabla_\gamma X_l$, где $\nabla_\gamma X_l=\gamma\left\{\nabla_* X_l\right\}$. Как показано в [7], $\nabla_\gamma X_l=\delta^{\mathrm{E}}\left(X_l^{\mathrm{C}}\right)$. Тогда $X_l^{\mathrm{C}}=X_l^{\mathrm{H}}+\delta^{\mathrm{E}}\left(X_l^{\mathrm{C}}\right)$. Учитывая полилинейность $\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}$ и вертикальность $\delta^{\mathrm{E}}\left(X^{\mathrm{C}}\right)$, из предложения 1 находим

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}}\right)=\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{H}},...,X_s^{H}\right)+\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(\delta^{\mathrm{E}}\left(X_1^{\mathrm{C}}\right),...,X_s^{H}\right)+...+\\+\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{H}},...,\delta^{\mathrm{E}}\left(X_s^{\mathrm{C}}\right)\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Но

$$\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{H}},...,X_s^{H}\right)=\left(\left(\nabla_X T\right)\left(X_1,...,X_s\right)\right)^{\mathrm{H}}=\left(\left(\nabla T\right)\left(X_1,...,X_s,X\right)\right)^{\mathrm{H}}=\left(\nabla T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{H}},...,X_s^{\mathrm{H}},X^{\mathrm{H}}\right). \tag{11}$$

Учитывая предложение 1, равенство $X_l^{\mathrm{H}}=X_l^{\mathrm{C}}-\delta^{\mathrm{E}}\left(X_l^{\mathrm{C}}\right)$, полилинейность $\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{C}}$ и вертикальность $\delta^{\mathrm{E}}\left(X^{\mathrm{C}}\right)$, получим

$$\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{H},...,X_{l-1}^{H},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_l^{\mathrm{C}}\right),X_{l+1}^{H},...,X_s^{H}\right)=\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{l}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},X_{l+1}^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right). \tag{12}$$

С учетом равенства (12), будем иметь

$$\begin{aligned}\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(\delta^{\mathrm{E}}\left(X_1^{\mathrm{C}}\right),...,X_s^{H}\right)+...+\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{H}},...,\delta^{\mathrm{E}}\left(X_s^{\mathrm{C}}\right)\right)=\\=\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{1}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)+...+\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{s}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Подобным образом получим

$$\begin{aligned}\left(\nabla T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{H}},...,X_s^{\mathrm{H}},X^{\mathrm{H}}\right)=\left(\nabla T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)-\\-\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{1}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)-...-\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{s}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)-\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{s+1}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя правую часть равенства (14) в (11), а затем полученное и (13) в (10), равенство (9) примет вид:

$$\nabla^{\mathrm{H}}T^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)=\left(\nabla T\right)^{\mathrm{H}}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)-\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{s+1}\left(X_1^{\mathrm{C}},...,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right),$$

что завершает доказательство.

Теорема 3. *Для произвольного тензорного поля* $T\in\mathrm{T}_s^r\left(M\right)$ *на аффинно-связном пространстве* $\left(M,\nabla\right)$ *имеет место равенство* $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}=\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{E}}_{k}$, *для произвольного векторного поля* $X\in\mathrm{X}\left(M\right)$, *и* $\nabla^{\mathrm{H}}T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}=\left(\nabla T\right)^{\mathrm{E}}_{k}$.

Доказательство достаточно провести для разложимых тензоров

$$P=\omega_1\otimes...\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_k\otimes\omega_{k+1}\otimes...\otimes\omega_s\otimes T,$$

где $\omega_l\in\mathrm{X}^*\left(M\right)$, $1\le l\le s$ и $P\in\mathrm{T}_0^r\left(M\right)$. Согласно свойству 4 предложения 3 получим

$$P^{\overset{\mathrm{E}}{k}}=\left(\omega_1\otimes...\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_k\otimes\omega_{k+1}\otimes...\otimes\omega_s\otimes T\right)^{\mathrm{E}}_{k}=\omega_1^{\mathrm{V}}\otimes...\otimes\omega_{k-1}^{\mathrm{V}}\otimes\omega_k^{\mathrm{E}}\otimes\omega_{k+1}^{\mathrm{V}}\otimes...\otimes\omega_s^{\mathrm{V}}\otimes T^{\mathrm{V}}.$$

Произвольно возьмем векторное поле $X\in\mathrm{X}\left(M\right)$. Учитывая свойства ковариантной производной, равенства $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}\omega_l^{\mathrm{V}}=\left(\nabla_X\omega_l\right)^{\mathrm{V}}$, $1\le l\le s$ и $\omega_k^{\mathrm{E}}=\omega_k^{\mathrm{H}}$, мы приходим к равенству $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}P^{\overset{\mathrm{E}}{k}}=\left(\nabla_X P\right)^{\mathrm{E}}_{k}$. С учетом этого, получим второе равенство. Теорема доказана.

Определение 8. *Для тензорного поля* $T\in\mathrm{T}_s^r\left(M\right)$, *чисел* k,l $\left(1\le k\le l\le s\right)$ *определим тензорное поле* $\overset{k\leftarrow l}{T}\in\mathrm{T}_s^r\left(M\right)$ *правилом*

$$\overset{k\leftarrow l}{T}\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_k,\dots,X_{l-1},X_l,X_{l+1},\dots,X_s\right)=T\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_l,X_k,\dots,X_{l-1},X_{l+1},\dots,X_s\right)$$

для произвольных векторных полей X_l, $1\le l\le s$, *и* X *на* M.

Пример. Для симметричного тензорного поля $T\in \mathrm{T}_s^r\left(M\right)$ очевидно $\overset{k\leftarrow l}{T}=T$.

Утверждение 1. *Произвольно возьмем тензорное поле* $T\in \mathrm{T}_s^r\left(M\right)$ *и числа* k,l $(1\le k\le l\le s)$.

1. *Для разложимого тензора* $T=\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_k\otimes\dots\otimes\omega_{l-1}\otimes\omega_l\otimes\omega_{l+1}\otimes\dots\otimes\omega_s\otimes P$, *где* $\omega_l\in \mathrm{X}^*\left(M\right)$, $1\le l\le s$ *и* $P\in \mathrm{T}_0^r\left(M\right)$, *справедливо равенство*

$$\overset{k\leftarrow l}{T}=\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_{k+1}\otimes\dots\otimes\omega_l\otimes\omega_k\otimes\omega_{l+1}\otimes\dots\omega_s\otimes P.$$

2. *Для произвольного дифференцирования* $D:\mathrm{T}\left(M\right)\to \mathrm{T}\left(M\right)$ *алгебры тензорных полей* $D\overset{k\leftarrow l}{T}=\overset{k\leftarrow l}{DT}$.

3. $\nabla\overset{k\leftarrow l}{T}=\overset{k\leftarrow l}{\nabla T}$.

4. $\underset{k}{\gamma}\overset{l\leftarrow m}{T}=\overset{(l-1)\leftarrow(m-1)}{\underset{k}{\gamma}T}$ $(k<l<m)$, $\underset{k}{\gamma}\overset{l\leftarrow m}{T}=\overset{l\leftarrow(m-1)}{\underset{k+1}{\gamma}T}$ $(l\le k<m)$, $\underset{m}{\gamma}\overset{l\leftarrow m}{T}=\underset{l}{\gamma}T$, $\underset{k}{\gamma}\overset{l\leftarrow m}{T}=\overset{l\leftarrow m}{\underset{k}{\gamma}T}$ $(l<m<k)$.

5. $\overset{k\leftarrow l}{T}{}^{\mathrm{C}}=\overset{k\leftarrow l}{T^{\mathrm{C}}}$.

6. $\overset{l\leftarrow m}{T}{}^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=\overset{l\leftarrow m}{T^{\underset{k}{\mathrm{E}}}}$ ($k<l<m$ или $l<m<k$), $\overset{l\leftarrow m}{T}{}^{\underset{k}{\mathrm{E}}}=\overset{l\leftarrow m}{T^{\underset{k+1}{\mathrm{E}}}}$ $(l\le k<m)$, $\overset{l\leftarrow m}{T}{}^{\underset{m}{\mathrm{E}}}=\overset{l\leftarrow m}{T^{\underset{l}{\mathrm{E}}}}$.

Доказательство.

1. Для разложимого тензора $T=\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_k\otimes\dots\otimes\omega_{l-1}\otimes\omega_l\otimes\omega_{l+1}\otimes\dots\otimes\omega_s\otimes P$, где $\omega_l\in \mathrm{X}^*\left(M\right)$, $1\le l\le s$ и $P\in \mathrm{T}_0^r\left(M\right)$, мы получим

$$\overset{k\leftarrow l}{T}\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_k,\dots,X_{l-1},X_l,X_{l+1},\dots,X_s\right)=T\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_l,X_k,\dots,X_{l-1},X_{l+1},\dots,X_s\right)=$$

$$=\omega_1\left(X_1\right)\dots\omega_{k-1}\left(X_{k-1}\right)\omega_k\left(X_l\right)\omega_{k+1}\left(X_k\right)\dots\omega_l\left(X_{l-1}\right)\omega_{l+1}\left(X_{l+1}\right)\dots\omega_s\left(X_s\right)P=$$

$$=\omega_1\left(X_1\right)\dots\omega_{k-1}\left(X_{k-1}\right)\omega_{k+1}\left(X_k\right)\dots\omega_l\left(X_{l-1}\right)\omega_k\left(X_l\right)\omega_{l+1}\left(X_{l+1}\right)\dots\omega_s\left(X_s\right)P=$$

$$=\left(\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_{k+1}\otimes\dots\otimes\omega_l\otimes\omega_k\otimes\omega_{l+1}\otimes\dots\omega_s\otimes P\right)\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_k,\dots,X_{l-1},X_l,X_{l+1},\dots,X_s\right).$$

Это показывает $\overset{k\leftarrow l}{T}=\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_{k+1}\otimes\dots\otimes\omega_l\otimes\omega_k\otimes\omega_{l+1}\otimes\dots\omega_s\otimes P$.

2. Получается из определения.

3. Для ковариантного дифференцирования $D=\nabla_X$, находим

$$\nabla\overset{k\leftarrow l}{T}\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_k,\dots,X_{l-1},X_l,X_{l+1},\dots,X_s,X\right)=\nabla_X\overset{k\leftarrow l}{T}\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_k,\dots,X_{l-1},X_l,X_{l+1},\dots,X_s\right)=$$

$$=\nabla_X T\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_l,X_k,\dots,X_{l-1},X_{l+1},\dots,X_s\right)=\nabla T\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_l,X_k,\dots,X_{l-1},X_{l+1},\dots,X_s,X\right)=$$

$$=\overset{k\leftarrow l}{\nabla T}\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_k,\dots,X_{l-1},X_l,X_{l+1},\dots,X_s,X\right).$$

4. Для тензорного поля $T\in \mathrm{T}_s^r\left(M\right)$ и для произвольных векторных полей $X_m\in \mathrm{X}\left(M\right)$, $1\le m\le s-1$, имеем для $k<l<m$

$$\underset{k}{\gamma}\overset{l\leftarrow m}{T}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-2}^{\mathrm{C}},X_{l-1}^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-2}^{\mathrm{C}},X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},\dots,X_{s-1}^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=\gamma\left\{\overset{l\leftarrow m}{T}\left(X_1,\dots,X_{k-1},\underset{k}{\cdot},\underset{k+1}{X_k},\dots,\underset{l-1}{X_{l-2}},\underset{l}{X_{l-1}},\dots,\underset{m-1}{X_{m-2}},\underset{m}{X_{m-1}},\underset{m+1}{X_m},\dots,\underset{s}{X_{s-1}}\right)\right\}=$$

$$=\gamma\left\{T\left(X_1,\dots,X_{k-1},\underset{k}{\cdot},\underset{k+1}{X_k},\dots,\underset{l-1}{X_{l-2}},\underset{l}{X_{m-1}},\underset{l+1}{X_{l-1}},\dots,\underset{m}{X_{m-2}},\underset{m+1}{X_m},\dots,\underset{s}{X_{s-1}}\right)\right\}=$$

$$=\underset{k}{\gamma}T\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\underset{k}{X_k^{\mathrm{C}}},\dots,\underset{l-2}{X_{l-2}^{\mathrm{C}}},\underset{l-1}{X_{m-1}^{\mathrm{C}}},\underset{l}{X_{l-1}^{\mathrm{C}}},\dots,\underset{m-1}{X_{m-2}^{\mathrm{C}}},\underset{m}{X_m^{\mathrm{C}}},\dots,\underset{s-1}{X_{s-1}^{\mathrm{C}}}\right)=$$

$$=\overset{(l-1)\leftarrow(m-1)}{\underset{k}{\gamma}T}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-2}^{\mathrm{C}},X_{l-1}^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-2}^{\mathrm{C}},X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},\dots,X_{s-1}^{\mathrm{C}}\right),$$

то есть $\underset{k}{\gamma}\overset{l\leftarrow m}{T}=\overset{(l-1)\leftarrow(m-1)}{\underset{k}{\gamma}T}$. Аналогично получаются остальные равенства.

5. Для произвольных векторных полей $X_m\in\mathrm{X}(M)$, $1\le m\le s$ получим

$$\overset{k\leftarrow l}{T}{}^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},X_{l+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=\left(\overset{k\leftarrow l}{T}\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_k,\dots,X_{l-1},X_l,X_{l+1},\dots,X_s\right)\right)^{\mathrm{C}}=$$

$$=\left(T\left(X_1,\dots,X_{k-1},X_l,X_k,\dots,X_{l-1},X_{l+1},\dots,X_s\right)\right)^{\mathrm{C}}=T^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_{l+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=\overset{k\leftarrow l}{T^{\mathrm{C}}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},X_{l+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right).$$

Отсюда получается доказываемое равенство.

6. Далее, для $k<l<m$ находим

$$\overset{l\leftarrow m}{T}{}^{\overset{\mathrm{E}}{k}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},X_{m+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=\overset{l\leftarrow m}{T}{}^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},X_{m+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=\overset{l\leftarrow m}{T^{\mathrm{C}}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},X_{m+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=T^{\mathrm{C}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},\delta^{\mathrm{E}}\left(X_k^{\mathrm{C}}\right),\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_{m+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_{m+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right)=$$

$$=\overset{l\leftarrow m}{T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\dots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_k^{\mathrm{C}},\dots,X_{l-1}^{\mathrm{C}},X_l^{\mathrm{C}},\dots,X_{m-1}^{\mathrm{C}},X_m^{\mathrm{C}},X_{m+1}^{\mathrm{C}},\dots,X_s^{\mathrm{C}}\right),$$

то есть $\overset{l\leftarrow m}{T}{}^{\overset{\mathrm{E}}{k}}=\overset{l\leftarrow m}{T^{\overset{\mathrm{E}}{k}}}$. Аналогично получаются остальные равенства.

Теорема 4. *Для произвольного тензорного поля* $P\in\mathrm{T}_s^r(M)$ *на аффинно-связном пространстве* (M,∇) *имеют место равенства* $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}\left(\underset{k}{\gamma}P\right)=\underset{k}{\gamma}\left(\nabla_X P\right)+P^{\overset{\mathrm{E}}{k}}\left(\cdot,\underset{k}{X^{\mathrm{C}}},\cdot\right)$, *где* $X\in\mathrm{X}(M)$ *– произвольное векторное поле, и* $\nabla^{\mathrm{H}}\left(\underset{k}{\gamma}P\right)=\underset{k}{\gamma}\left(\nabla P\right)+\overset{k\leftarrow s}{P^{\overset{\mathrm{E}}{k}}}$.

Доказательство достаточно провести для разложимых тензоров

$$P=\omega_1\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}\otimes\omega_k\otimes\omega_{k+1}\otimes\dots\otimes\omega_s\otimes T,\ \text{где}\ \omega_l\in\mathrm{X}^*(M),\ 1\le l\le s\ \text{и}\ P\in\mathrm{T}_0^r(M).$$

Согласно свойству 6 предложения 2 $\underset{k}{\gamma}P=\omega_1^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_{k-1}^{\mathrm{V}}\otimes\gamma\omega_k\omega_{k+1}^{\mathrm{V}}\otimes\dots\otimes\omega_s^{\mathrm{V}}\otimes T^{\mathrm{V}}$. Пусть векторное поле $X\in\mathrm{X}(M)$ имеет в карте $(U;u^k)$ разложение $X=X^h\frac{\partial}{\partial u^h}$. Учитывая выражения для компонентов в индуцированной карте $\left(\pi_2^{-1}(U);x^k,y^k\right)$, получим $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}\gamma\omega=y^{\alpha}\partial_i\omega_{\alpha}X^i+\omega_i\partial X^i$. Учитывая свойство 6 предложения 3, свойства лифтов $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}\omega_l^{\mathrm{V}}=\left(\nabla_X\omega_l\right)^{\mathrm{V}}$, $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}T^{\mathrm{V}}=\left(\nabla_X T\right)^{\mathrm{V}}$, будем иметь $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}\gamma\omega=\gamma\left(\nabla_X\omega\right)+\omega^{\mathrm{E}}\left(X^{\mathrm{C}}\right)$.

Собирая все вместе, находим $\nabla^{\mathrm{H}}_{X^{\mathrm{C}}}\left(\underset{k}{\gamma} P\right)=\underset{k}{\gamma}\left(\nabla_X P\right)+\omega_1^{\mathrm{V}}\otimes\ldots\otimes\omega_{k-1}^{\mathrm{V}}\otimes\omega_k^{\mathrm{E}}\left(X^{\mathrm{C}}\right)\omega_{k+1}^{\mathrm{V}}\otimes\ldots\otimes\omega_s^{\mathrm{V}}\otimes T^{\mathrm{V}}$.

Применяя свойство 4 предложения 3, получим первое равенство. С другой стороны, применяя свойство 5 предложения 2, получим $\overset{k\leftarrow s}{P^{\mathrm{E}_k}}\left(X_1^{\mathrm{C}},\ldots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},\ldots,X_s^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}}\right)=P^{\mathrm{E}_k}\left(X_1^{\mathrm{C}},\ldots,X_{k-1}^{\mathrm{C}},X^{\mathrm{C}},X_{k+1}^{\mathrm{C}},\ldots,X_s^{\mathrm{C}}\right)$, что приводит ко второму равенству. Теорема доказана.

2.5. Производная Ли аффинной связности. Производная Ли от аффинной связности ∇ относительно векторного поля X, определяется как тензорное поле $\mathbf{L}_X\nabla\in\mathrm{T}_2^1(M)$ правилом

$$(\mathbf{L}_X\nabla)(Y,Z)=\mathbf{L}_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\mathbf{L}_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z \tag{15}$$

для произвольных векторных полей $Y,Z\in\mathrm{X}(M)$.

Предложение 4. *Для произвольного векторного поля X на аффинно-связном пространстве (M,∇) имеют место равенства*

$$\mathbf{L}_{X^{\mathrm{V}}}\nabla^{\mathrm{H}}=(\mathbf{L}_X\nabla)^{\mathrm{V}}-\left(R(X,\cdot)\right)^{\mathrm{V}},\quad \mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\nabla^{\mathrm{H}}=(\mathbf{L}_X\nabla)^{\mathrm{C}}-\gamma\left\{(\mathbf{L}_X R)(\cdot,)\right\},$$

где R – тензор кривизны аффинной связности ∇.

Доказательство проведем для второго равенства. Для произвольных векторных полей $Y,Z\in\mathrm{X}(M)$ получим

$$\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\nabla^{\mathrm{H}}\left(Y^{\mathrm{C}},Z^{\mathrm{C}}\right)=\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\left(\nabla^{\mathrm{H}}_{Y^{\mathrm{C}}}Z^{\mathrm{C}}\right)-\nabla^{\mathrm{H}}_{Y^{\mathrm{C}}}\left(\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}Z^{\mathrm{C}}\right)-\nabla^{\mathrm{H}}_{\left[X^{\mathrm{C}},Y^{\mathrm{C}}\right]}Z^{\mathrm{C}}. \tag{16}$$

Согласно равенству (7.9) [1, стр. 108] $\nabla^{\mathrm{H}}_{Y^{\mathrm{C}}}Z^{\mathrm{C}}=(\nabla_Y Z)^{\mathrm{C}}-\gamma\left\{R(\cdot,Y)Z\right\}$. Тогда очевидно

$$\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\left(\nabla^{\mathrm{H}}_{Y^{\mathrm{C}}}Z^{\mathrm{C}}\right)=\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\left((\nabla_Y Z)^{\mathrm{C}}\right)-\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\left(\gamma\left\{R(\cdot,Y)Z\right\}\right). \tag{17}$$

Учитывая свойства лифтов, получим

$$\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\left(\gamma\left\{R(\cdot,Y)Z\right\}\right)=\left[X^{\mathrm{C}},\gamma\left\{R(\cdot,Y)Z\right\}\right]=\gamma\left\{\mathbf{L}_X\left(R(\cdot,Y)Z\right)\right\}. \tag{18}$$

Далее, применяя равенства (7.4) [1, стр. 49] и (7.9) [1, стр. 108], получим

$$\nabla^{\mathrm{H}}_{Y^{\mathrm{C}}}\left(\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}Z^{\mathrm{C}}\right)=\nabla^{\mathrm{H}}_{Y^{\mathrm{C}}}\left((\mathbf{L}_X Z)^{\mathrm{C}}\right)=\left(\nabla_Y(\mathbf{L}_X Z)\right)^{\mathrm{C}}-\gamma\left\{R(\cdot,Y)\mathbf{L}_X Z\right\}. \tag{19}$$

Аналогично, так как $\mathbf{L}_X Y=[X,Y]$, то

$$\nabla^{\mathrm{H}}_{\left[X^{\mathrm{C}},Y^{\mathrm{C}}\right]}Z^{\mathrm{C}}=\nabla^{\mathrm{H}}_{[X,Y]^{\mathrm{C}}}Z^{\mathrm{C}}=\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^{\mathrm{C}}-\gamma\left\{R(\cdot,\mathbf{L}_X Y)Z\right\}. \tag{20}$$

Подставляем правую часть равенства (18) в равенство (17), а затем полученное в равенство (16), а также, подставляя правые части равенств (19) и (20) в равенство (16), будем иметь

$$\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\nabla^{\mathrm{H}}\left(Y^{\mathrm{C}},Z^{\mathrm{C}}\right)=\left(\mathbf{L}_X(\nabla_Y Z)\right)^{\mathrm{C}}-\gamma\left\{\mathbf{L}_X\left(R(\cdot,Y)Z\right)\right\}-\left(\nabla_Y(\mathbf{L}_X Z)\right)^{\mathrm{C}}+\gamma\left\{R(\cdot,Y)\mathbf{L}_X Z\right\}-$$

$$-\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right)^{\mathrm{C}}+\gamma\left\{R(\cdot,\mathbf{L}_X Y)Z\right\}=$$

$$=\left(\mathbf{L}_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\mathbf{L}_X Z)\nabla_{[X,Y]}Z\right)^{\mathrm{C}}-\gamma\left\{\mathbf{L}_X\left(R(\cdot,Y)Z\right)-R(\cdot,Y)\mathbf{L}_X Z-R(\cdot,\mathbf{L}_X Y)Z\right\}. \tag{21}$$

Учитывая свойства производной Ли, находим

$$\mathbf{L}_X\left(R(\cdot,Y)Z\right)=(\mathbf{L}_X R)(\cdot,Y)Z+R(\cdot,\mathbf{L}_X Y)Z+R(\cdot,Y)\mathbf{L}_X Z.$$

Учитывая последнее равенство и равенство (15), перепишем равенство (21) в виде

$$\mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\nabla^{\mathrm{H}}\left(Y^{\mathrm{C}},Z^{\mathrm{C}}\right)=\left((\mathbf{L}_X\nabla)(Y,Z)\right)^{\mathrm{C}}-\gamma\left\{(\mathbf{L}_X R)(\cdot,Y)Z\right\}.$$

Осталось заметить, что из предложения 3.14 [1, стр.24] получим

$$\left(\left(\mathbf{L}_X\nabla\right)(Y,Z)\right)^{\mathrm{C}} = \left(\mathbf{L}_X\nabla\right)^{\mathrm{C}}\left(Y^{\mathrm{C}},Z^{\mathrm{C}}\right),$$

а из свойства 5 предложения 2

$$\gamma\left\{\left(\mathbf{L}_X R\right)(\cdot,Y)Z\right\} = \gamma\left\{\left(\mathbf{L}_X R\right)(\cdot,)\right\}\left(Y^{\mathrm{C}},Z^{\mathrm{C}}\right),$$

что завершает доказательство.

Проиллюстрируем использование теорем 2-4. Полученные при этом результаты будут использоваться в дальнейшем исследовании.

Предложение 5. *Для произвольного векторного поля* X *на аффинно-связном пространстве* (M,∇) *рассмотрим тензорные поля* $L_{1,X} = \mathbf{L}_X\nabla \in \mathrm{T}_2^1(M)$, $L_{k,X} = \nabla L_{k-1,X} \in \mathrm{T}_{k+1}^1(M)$, *и* $L_{1,X^{\mathrm{C}}} = \mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\nabla^{\mathrm{H}}$, $L_{k,X^{\mathrm{C}}} = \nabla^{\mathrm{H}} L_{k-1,X^{\mathrm{C}}}$. *Тогда имеют место равенства:*

1. $L_{1,X^{\mathrm{C}}} = L_{1,X}{}^{\mathrm{H}} + \gamma \overset{1\leftarrow 2}{L}_{2,X}$;

2. $L_{2,X^{\mathrm{C}}} = L_{2,X}{}^{\mathrm{H}} - L_{2,X}{}^{\underset{3}{\mathrm{E}}} + \gamma \overset{1\leftarrow 2}{L}_{3,X} + \overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 3}}{L}_{2,X}{}^{\mathrm{E}}$;

3. $L_{3,X^{\mathrm{C}}} = L_{3,X}{}^{\mathrm{H}} - L_{3,X}{}^{\underset{4}{\mathrm{E}}} - L_{3,X}{}^{\underset{3}{\mathrm{E}}} + \gamma \overset{1\leftarrow 2}{L}_{4,X} + \overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 4}}{L}_{3,X}{}^{\mathrm{E}} + \overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 3}}{L}_{3,X}{}^{\mathrm{E}}$;

4. $L_{4,X^{\mathrm{C}}} = L_{4,X}{}^{\mathrm{H}} - L_{4,X}{}^{\underset{5}{\mathrm{E}}} - L_{4,X}{}^{\underset{4}{\mathrm{E}}} - L_{4,X}{}^{\underset{3}{\mathrm{E}}} + \gamma \overset{1\leftarrow 2}{L}_{5,X} + \overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 5}}{L}_{4,X}{}^{\mathrm{E}} + \overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 4}}{L}_{4,X}{}^{\mathrm{E}} + \overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 3}}{L}_{4,X}{}^{\mathrm{E}}$.

Доказательство. Как известно, для симметричной связности ∇ справедливо равенство (см., например, [9, стр. 17])

$$\left(\mathbf{L}_X R\right)(Y,Z)W = \nabla_Y\left(\mathbf{L}_X\nabla\right)(Z,W) - \nabla_Z\left(\mathbf{L}_X\nabla\right)(Y,W).$$

Исходя из определения ковариантного дифференциала, последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\mathbf{L}_X R\right)(Y,Z)W = \nabla\left(\mathbf{L}_X\nabla\right)(Z,W,Y) - \nabla\left(\mathbf{L}_X\nabla\right)(Y,W,Z). \tag{22}$$

Из равенства (22) получим $\mathbf{L}_X R = \nabla\overset{\substack{1\leftarrow 3\\ 1\leftarrow 3}}{\left(\mathbf{L}_X\nabla\right)} - \nabla\overset{2\leftarrow 3}{\left(\mathbf{L}_X\nabla\right)}$. С учетом определения тензоров $L_{k,X}$, последнее равенство примет вид

$$\mathbf{L}_X R = \overset{\substack{1\leftarrow 3\\ 1\leftarrow 3}}{L}_{2,X} - \overset{2\leftarrow 3}{L}_{2,X} . \tag{23}$$

1. Согласно предложению 4, будем иметь

$$L_{1,X^{\mathrm{C}}} = \mathbf{L}_{X^{\mathrm{C}}}\nabla^{\mathrm{H}} = \left(\mathbf{L}_X\nabla\right)^{\mathrm{C}} - \gamma\left(\mathbf{L}_X R\right) = \left(\mathbf{L}_X\nabla\right)^{\mathrm{H}} + \underset{3}{\gamma}\left(\nabla\mathbf{L}_X\nabla\right) - \gamma\left(\mathbf{L}_X R\right) = L_{1,X}{}^{\mathrm{H}} + \underset{3}{\gamma} L_{2,X} - \gamma\left(\mathbf{L}_X R\right).$$

Применяя к равенству (23) утверждение 1, получим

$$\gamma\left(\mathbf{L}_X R\right) = \gamma\left(\overset{\substack{1\leftarrow 3\\ 1\leftarrow 3}}{L}_{2,X}\right) - \gamma\left(\overset{2\leftarrow 3}{L}_{2,X}\right) = \underset{2}{\gamma}\left(\overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 3}}{L}_{2,X}\right) - \gamma\overset{1\leftarrow 2}{L}_{2,X} = \underset{3}{\gamma}\overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 2}}{L}_{2,X} - \gamma\overset{1\leftarrow 2}{L}_{2,X} .$$

Очевидно, для произвольного тензора $T \in \mathrm{T}_s^r(M)$ и векторных полей X_i, $1 \le i \le s$, имеем $\overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 2}}{T}\left(X_1,X_2,X_3,\ldots,X_s\right) = \overset{1\leftarrow 2}{T}\left(X_2,X_1,X_3,\ldots,X_s\right) = T\left(X_1,X_2,X_3,\ldots,X_s\right)$, что дает равенство $\overset{\substack{1\leftarrow 2\\ 1\leftarrow 2}}{T} = T$; то есть получим требуемое.

2. Далее $L_{2,X^{\mathrm{C}}} = \nabla^{\mathrm{H}} L_{1,X^{\mathrm{C}}} = \nabla^{\mathrm{H}}\left(L_{1,X}\right)^{\mathrm{H}} + \nabla^{\mathrm{H}}\gamma\overset{1\leftarrow 2}{L}_{2,X}$. Применяя теорему 2, находим

$$\nabla^{\mathrm{H}}\left(L_{1,X}\right)^{\mathrm{H}} = \left(\nabla L_{1,X}\right)^{\mathrm{H}} - \left(\nabla L_{1,X}\right)^{\underset{3}{\mathrm{E}}} = L_{2,X}{}^{\mathrm{H}} - L_{2,X}{}^{\underset{3}{\mathrm{E}}} .$$

Применяем теорему 4: $\nabla^{\mathrm{H}}\gamma L_{2,X} = \gamma\left(\nabla L_{2,X}\right) + \overset{1\leftarrow 3}{L_{2,X}}{}^{\mathrm{E}}_{1} = \gamma L_{3,X} + \overset{1\leftarrow 3}{L_{2,X}}{}^{\mathrm{E}}$. Учитывая при этом утверждение 1, получим $\nabla^{\mathrm{H}}\gamma \overset{1\leftarrow 2}{L_{2,X}} = \overset{1\leftarrow 2}{\nabla^{\mathrm{H}}\gamma L_{2,X}} = \gamma \overset{1\leftarrow 2}{L_{3,X}} + \overset{1\leftarrow 2}{\overset{1\leftarrow 3}{L_{2,X}}}{}^{\mathrm{E}}$. Таким образом, собирая все вместе, будем иметь требуемое.

Свойства 3 и 4 получаются подобным образом. Предложение доказано.

Замечание. Для тензора $T \in \mathsf{T}_r^1(M)$ (соотв. $T \in \mathsf{T}_r^0(M)$) и векторного поля ξ, векторное поле (соотв. функцию) $T(\underbrace{\xi,\ldots,\xi}_{r})$ будем обозначать $T\left(\xi^r\right)$.

Следствие 1. *Для произвольного векторного поля ξ справедливы равенства*

$$L_{m,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{m+1}\right) = L_{m,X}{}^{\mathrm{H}}\left(\xi^{m+1}\right) - \sum_{k=3}^{m+1} L_{m,X}{}^{\mathrm{E}}_{k}\left(\xi^{m+1}\right) + \gamma L_{m+1,X}\left(\xi^{m+1}\right) + (m-1) L_{m,X}{}^{\mathrm{E}}\left(\xi^{m+1}\right), \ m = \overline{1,4}.$$

3. УПЛОЩАЮЩИЕ СВОЙСТВА ПОЛНОГО ЛИФТА ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОТНОСИТЕЛЬНО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Лемма 1. *Произвольным образом возьмем в касательном расслоении $\mathbf{T}M$ геодезическую кривую C. Пусть ξ – поле касательных векторов вдоль кривой C. Тогда справедливы равенства*

$$L_{m,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^{m+1}\right) = a_m^{\mathrm{V}}\delta^{\mathrm{V}}(\xi) + a_m^{\mathrm{H}}\tilde{\tilde{\delta}}(\xi) + a_m^{\gamma}\gamma\delta + a_m^{\mathrm{E}}\delta^{\mathrm{E}}(\xi), \ m = \overline{1,4},$$

где вдоль кривой C определены функции

$$a_m^{\mathrm{V}} = (m+1)\left(\nabla^{m-1}\beta\right)^{\mathrm{E}}\left(\xi^m\right) + \gamma\left(\nabla^m\beta\right)\left(\xi^m\right), \qquad a_m^{\mathrm{H}} = 2\left(\nabla^{m-1}\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^m\right),$$

$$a_m^{\gamma} = \left(\nabla^m\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^{m+1}\right), \qquad a_m^{\mathrm{E}} = (m-1)\left(\nabla^{m-1}\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^m\right).$$

Доказательство. Для инфинитезимального геодезического (проективного) преобразования X аффинно-связного пространства (M,∇) имеем $\mathsf{L}_X\nabla = \beta\otimes\delta + \delta\otimes\beta$, где δ – единичный аффинор на M, а β – некоторое ковекторное поле на M.

1. Таким образом

$$L_{1,X} = \beta\otimes\delta + \delta\otimes\beta.$$

Из определения тензорных полей $L_{k,X} = \nabla L_{k-1,X}$, $L_{1,X} = \mathsf{L}_X\nabla$, получим $L_{2,X} = \nabla L_{1,X} = \nabla\beta\otimes\delta + \delta\otimes\nabla\beta$, отсюда $\gamma L_{2,X} = \gamma(\nabla\beta)\otimes\delta^{\mathrm{V}} + \gamma\delta\otimes(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}$. По свойству лифтов

$$L_{1,X}{}^{\mathrm{H}} = \beta^{\mathrm{H}}\otimes\delta^{\mathrm{V}} + \beta^{\mathrm{V}}\otimes\delta^{\mathrm{H}} + \delta^{\mathrm{H}}\otimes\beta^{\mathrm{V}} + \delta^{\mathrm{V}}\otimes\beta^{\mathrm{H}}.$$

Но $\delta^{\mathrm{H}} = \tilde{\tilde{\delta}}$ – единичный аффинор на касательном расслоении $\mathbf{T}M$. Значит

$$L_{1,X}{}^{\mathrm{H}} = \beta^{\mathrm{H}}\otimes\delta^{\mathrm{V}} + \beta^{\mathrm{V}}\otimes\tilde{\tilde{\delta}} + \tilde{\tilde{\delta}}\otimes\beta^{\mathrm{V}} + \delta^{\mathrm{V}}\otimes\beta^{\mathrm{H}}.$$

Собирая все вместе, будем иметь

$$L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) = L_{1,X}{}^{\mathrm{H}}\left(\xi^2\right) + \gamma L_{2,X}\left(\xi^2\right) =$$

$$= 2\beta^{\mathrm{H}}(\xi)\delta^{\mathrm{V}}(\xi) + 2\beta^{\mathrm{V}}(\xi)\tilde{\tilde{\delta}}(\xi) + \gamma(\nabla\beta)(\xi)\delta^{\mathrm{V}}(\xi) + \gamma\delta(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right) =$$

$$= \left(2\beta^{\mathrm{H}}(\xi) + \gamma(\nabla\beta)(\xi)\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi) + 2\beta^{\mathrm{V}}(\xi)\tilde{\tilde{\delta}}(\xi) + (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\gamma\delta,$$

то есть

$$L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) = \left(2\beta^{\mathrm{H}}(\xi) + \gamma(\nabla\beta)(\xi)\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi) + 2\beta^{\mathrm{V}}(\xi)\tilde{\tilde{\delta}}(\xi) + (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\gamma\delta.$$

2. Согласно следствию 1

$$L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right)=L_{2,X}{}^{\mathrm{H}}\left(\xi^3\right)-L_{2,X}{}^{\mathrm{E}}_{3}\left(\xi^3\right)+\gamma L_{3,X}\left(\xi^3\right)+L_{2,X}{}^{\mathrm{E}}\left(\xi^3\right).$$

По свойствам горизонтального лифта

$$L_{2,X}{}^{\mathrm{H}}=(\nabla\beta)^{\mathrm{H}}\otimes\delta^{\mathrm{V}}+(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\otimes\tilde{\tilde{\delta}}+\tilde{\tilde{\delta}}\otimes(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}+\delta^{\mathrm{V}}\otimes(\nabla\beta)^{\mathrm{H}},$$

по свойствам E-лифта

$$L_{2,X}{}^{\mathrm{E}}_{3}=(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2}\otimes\delta^{\mathrm{V}}+\delta^{\mathrm{V}}\otimes(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2},\ \ L_{2,X}{}^{\mathrm{E}}=(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}\otimes\delta^{\mathrm{V}}+\delta^{\mathrm{E}}\otimes(\nabla\beta)^{\mathrm{V}},$$

$$L_{3,X}=\nabla L_{2,X}=\nabla^2\beta\otimes\delta+\delta\otimes\nabla^2\beta,\quad \gamma L_{3,X}=\gamma\left(\nabla^2\beta\right)\otimes\delta^{\mathrm{V}}+\gamma\delta\otimes\nabla^2\beta^{\mathrm{V}}.$$

Отсюда получим

$$L_{2,X}{}^{\mathrm{H}}\left(\xi^3\right)=2(\nabla\beta)^{\mathrm{H}}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+2(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\tilde{\tilde{\delta}}(\xi),\quad L_{2,X}{}^{\mathrm{E}}_{3}\left(\xi^3\right)=2(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi),$$

$$L_{2,X}{}^{\mathrm{E}}\left(\xi^3\right)=(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+\delta^{\mathrm{E}}(\xi)(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right),\quad L_{3,X}=\nabla L_{2,X}=\nabla^2\beta\otimes\delta+\delta\otimes\nabla^2\beta,$$

$$\gamma L_{3,X}\left(\xi^3\right)=\gamma\left(\nabla^2\beta\right)\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+\gamma\delta\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^3\right).$$

В таком случае

$$L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right)=2(\nabla\beta)^{\mathrm{H}}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+2(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)-2(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+$$

$$+\gamma\left(\nabla^2\beta\right)\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+\gamma\delta\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^3\right)+(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+\delta^{\mathrm{E}}(\xi)(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right),$$

то есть

$$L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right)=\left(2(\nabla\beta)^{\mathrm{H}}\left(\xi^2\right)-2(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2}\left(\xi^2\right)+\gamma\left(\nabla^2\beta\right)\left(\xi^2\right)+(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}\left(\xi^2\right)\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+$$

$$+2(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)+\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^3\right)\gamma\delta+(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{E}}(\xi).$$

Согласно свойству 5 предложения 3 получим равенство

$$(\nabla\beta)^{\mathrm{H}}=(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}+(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2}.$$

Отсюда

$$(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}=(\nabla\beta)^{\mathrm{H}}-(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2}$$

и тогда

$$L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right)=\left(3(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}_{2}\left(\xi^2\right)+\gamma\left(\nabla^2\beta\right)\left(\xi^2\right)\right)\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+$$

$$+2(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)+\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^3\right)\gamma\delta+(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\delta^{\mathrm{E}}(\xi).$$

Свойства 3 и 4 получаются подобным образом. Лемма доказана.

Лемма 2. *Произвольным образом возьмем в касательном расслоении* $\mathbf{T}M$ *геодезическую кривую* C. *Пусть* ξ *– поле касательных векторов вдоль кривой* C. *Тогда*

1) *если вектор* $\xi^{\bullet}=\left(\xi^k\right)$ *ненулевой, то векторы* $\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)$, $\delta^{\mathrm{V}}(\xi)$ *линейно независимы;*

2) *если векторы* $\xi^{\bullet}$ *и* $\xi^{\bar{\bullet}}$ *ненулевые и неколлинеарные, то векторы* $\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)$, $\delta^{\mathrm{V}}(\xi)$, $\delta^{\mathrm{E}}(\xi)$ *в точке с нулевыми слоевыми координатами линейно независимы;*

3) *если векторы* $\xi^{\bullet}$, y, $\xi^{(\bullet)}$ *ненулевые и некомпланарные, то векторы* $\delta^{\mathrm{V}}(\xi)$, $\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)$, $\gamma\delta$, $\delta^{\mathrm{E}}(\xi)$ *линейно независимы.*

Доказательство.

1. Произвольным образом возьмем линейную комбинацию векторов $\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)=\begin{pmatrix}\xi^k\\ \xi^{\bar{k}}\end{pmatrix}$, $\delta^{\mathrm{V}}(\xi)=\begin{pmatrix}0\\ \xi^k\end{pmatrix}$ и приравняем ее нулю $\lambda_1\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)+\lambda_2\delta^{\mathrm{V}}(\xi)=0$, то есть $\lambda_1\xi^k=0$, $\lambda_1\xi^{\bar{k}}+\lambda_2\xi^k=0$. Если вектор $\xi^{\bullet}=\left(\xi^k\right)\neq 0$, то из первого равенства получим $\lambda_1=0$, и тогда второе равенство примет вид: $\lambda_2\xi^k=0$. Это показывает, что из $\xi^{\bullet}=\left(\xi^k\right)\neq 0$ следует $\lambda_2=0$.

2. Произвольным образом возьмем линейную комбинацию векторов

$$\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)=\begin{pmatrix}\xi^k\\ \xi^{\bar{k}}\end{pmatrix},\quad \delta^{\mathrm{V}}(\xi)=\begin{pmatrix}0\\ \xi^k\end{pmatrix},\quad \delta^{\mathrm{E}}(\xi)=\begin{pmatrix}0\\ \xi^{\bar{k}}\end{pmatrix}$$

и приравняем ее нулю $\lambda_1\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)+\lambda_2\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+\lambda_3\delta^{\mathrm{E}}(\xi)=0$, то есть $\lambda_1\xi^k=0$, $\lambda_1\xi^{\bar{k}}+\lambda_2\xi^k+\lambda_3\xi^{\bar{k}}=0$. Если вектор $\xi^{\bullet}=\left(\xi^k\right)\neq 0$, то из первого равенства получим $\lambda_1=0$, и тогда второе равенство примет вид: $\lambda_2\xi^k+\lambda_3\xi^{\bar{k}}=0$, откуда следует, что если векторы $\xi^{\bullet}$ и $\xi^{\bar{\bullet}}=\left(\xi^{\bar{k}}\right)$ неколлинеарны, то $\lambda_2=0$ и $\lambda_3=0$.

3. Произвольным образом возьмем линейную комбинацию векторов

$$\delta^{\mathrm{V}}(\xi)=\begin{pmatrix}0\\ \xi^j\end{pmatrix},\quad \tilde{\tilde{\delta}}(\xi)=\begin{pmatrix}\xi^j\\ \xi^{\bar{j}}\end{pmatrix},\quad \gamma\delta=\begin{pmatrix}0\\ y^j\end{pmatrix},\quad \delta^{\mathrm{E}}(\xi)=\begin{pmatrix}0\\ \xi^{\bar{j}}+\Gamma_i^j\xi^i\end{pmatrix}$$

и приравняем ее нулю

$$\lambda_1\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+\lambda_2\tilde{\tilde{\delta}}(\xi)+\lambda_3\gamma\delta+\lambda_4\delta^{\mathrm{E}}(\xi)=\begin{pmatrix}\lambda_2\xi^j\\ \lambda_1\xi^j+\lambda_2\xi^{\bar{j}}+\lambda_3y^j+\lambda_4\left(\xi^{\bar{j}}+\Gamma_i^j\xi^i\right)\end{pmatrix}=0.$$

Последнее равносильно равенствам $\lambda_2\xi^j=0$, $\lambda_1\xi^j+\lambda_2\xi^{\bar{j}}+\lambda_3y^j+\lambda_4\left(\xi^{\bar{j}}+\Gamma_i^j\xi^i\right)=0$. Поскольку $\xi^{\bullet}=\left(\xi^k\right)\neq 0$, то $\lambda_2=0$. В таком случае, второе равенство примет вид $\lambda_1\xi^j+\lambda_3y^j+\lambda_4\left(\xi^{\bar{j}}+\Gamma_i^j\xi^i\right)=0$. Поскольку векторы $\xi^{\bullet}$, $y=\left(y^k\right)$, $\xi^{(\bar{\bullet})}=\left(\xi^{\bar{k}}+y^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{k}\xi^{\beta}\right)_k$ некомпланарны, то $\lambda_1=0$, $\lambda_3=0$, $\lambda_4=0$, что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к рассмотрению уплощающих свойств.

Теорема 5. *Пусть X – инфинитезимальное проективное преобразование, описываемое уравнением $\mathbf{L}_X\nabla=\beta\otimes\delta+\delta\otimes\beta$. Тогда полный лифт X^{C}, относительно связности горизонтального лифта ∇^{H}, обладает следующими уплощающими свойствами:*

1) X^{C} *является 1-г.и.п. тогда и только тогда, когда* $\beta=0$, *то есть, когда* X *является инфинитезимальным аффинным преобразованием. При этом,* X^{C} *также является инфинитезимальным аффинным преобразованием*;

2) X^{C} *является 2-г.и.п. тогда и только тогда, когда* $\beta\neq 0$ *и* $S\left(\nabla\beta\right)=0$

3) X^{C} *является 3-г.и.п. тогда и только тогда, когда* $\beta\neq 0$, $S\left(\nabla\beta\right)\neq 0$ *и*

$$S\left(\begin{vmatrix}2\beta^{\mathrm{H}}+\gamma(\nabla\beta) & (\nabla\beta)^{\mathrm{V}} & 0\\ 3(\nabla\beta)^{\mathrm{E}}+\gamma\left(\nabla^2\beta\right) & \left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}} & (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\\ 4\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{E}}+\gamma\left(\nabla^3\beta\right) & \left(\nabla^3\beta\right)^{\mathrm{V}} & 2\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\end{vmatrix}\right)=0.$$

4) *в общем случае,* X^{C} *является 4-г.и.п.*

Доказательство.

1. Нетрудно проверить равенство

$$\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right)=a_1^{\mathrm{V}}\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{V}}(\xi)+a_1^{\gamma}\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\gamma\delta . \tag{24}$$

В таком случае равенство

$$\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right)=0 \tag{25}$$

следует из равенств

$$a_1^{\mathrm{V}}=2\beta^{\mathrm{H}}(\xi)+\gamma(\nabla\beta)(\xi)=0,\quad a_1^{\gamma}=(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)=0 . \tag{26}$$

Если слоевые координаты равны нулю ($y^k=0$), то $\gamma\delta=0$ и равенство (24) примет вид

$$\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right)=a_1^{\mathrm{V}}\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{V}}(\xi).$$

Если вектор $\xi^{\bullet}=\left(\xi^k\right)$ ненулевой, то согласно 1 леммы 2, $\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{V}}(\xi)\neq 0$. Тогда равенство (25) влечет равенство $a_1^{\mathrm{V}}=0$. Кроме того, так как $\gamma(\nabla\beta)=0$, а в индуцированной координатной окрестности горизонтальный лифт β^{H} имеет компоненты $\left(\Gamma_j^k\beta_k,\beta_j\right)$, где $\Gamma_j^k=y^{\alpha}\Gamma_{\alpha j}^k=0$, то

$$a_1^{\mathrm{V}}=2\beta^{\mathrm{H}}(\xi)=2\xi^j\Gamma_j^k\beta_k+2\beta_j\xi^{\bar{j}}=2\beta_j\xi^{\bar{j}} .$$

Возьмем на M произвольное векторное поле X. Для произвольной точки $p\in M$ от точки $\tilde{p}=(p,y)\in\mathbf{T}M$ отложим вектор ξ: $\xi^j=X^j$ и $\xi^{\bar{j}}=X^j$; через точку $\tilde{p}$ в направлении вектора ξ проведем геодезическую кривую **C** . Тогда $a_1^{\mathrm{V}}=2\beta^{\mathrm{H}}(\xi)=2\beta_j\xi^{\bar{j}}=2\beta_jX^j=2\beta(X)$. Отсюда равенство $a_1^{\mathrm{V}}=0$ влечет равенство $\beta(X)=0$; из произвольности точки $p\in M$ и векторного поля X следует $\beta=0$. С другой стороны, равенство $\beta=0$ влечет равенство $\nabla\beta=0$, которые вместе влекут равенства (26) для произвольного ξ. Отсюда получаем равенства (24) и равенства $L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right)=0$, которые показывают, что полный лифт X^{C} является абсолютно каноническим 1-г.и.п.

2. Подобным образом получим, что

$$\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right)\wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right)=M^{\mathrm{V}\gamma}\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{V}}(\xi)\wedge\gamma\delta+$$
$$+M^{\mathrm{VE}}\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{V}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{E}}(\xi)+M^{\gamma\mathrm{E}}\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\gamma\delta\wedge\delta^{\mathrm{E}}(\xi), \tag{27}$$

где

$$M^{\mathrm{V}\gamma}=\begin{vmatrix}a_1^{\mathrm{V}} & a_1^{\gamma}\\ a_2^{\mathrm{V}} & a_2^{\gamma}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1^{\mathrm{V}} & (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\\ a_2^{\mathrm{V}} & \left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\xi^3\right)\end{vmatrix},\ M^{\mathrm{VE}}=\begin{vmatrix}a_1^{\mathrm{V}} & 0\\ a_2^{\mathrm{V}} & a_2^{\mathrm{E}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1^{\mathrm{V}} & 0\\ a_2^{\mathrm{V}} & (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\end{vmatrix},$$

$$M^{\gamma\mathrm{E}}=\begin{vmatrix}a_1^{\gamma} & 0\\ a_2^{\gamma} & a_2^{\mathrm{E}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1^{\gamma} & 0\\ a_2^{\gamma} & (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\left(\xi^2\right)\end{vmatrix} \tag{28}$$

являются минорами матрицы $\begin{pmatrix}a_1^{\mathrm{V}} & a_1^{\gamma} & 0\\ a_2^{\mathrm{V}} & a_2^{\gamma} & a_2^{\mathrm{E}}\end{pmatrix}$.

Если слоевые координаты равны нулю ($y^k=0$), то $\gamma\delta=0$ и равенство (27) примет вид

$$\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right)\wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right)=M^{\mathrm{VE}}\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{V}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{E}}(\xi). \tag{29}$$

Ввиду 2 леммы 2, для ненулевых и неколлинеарных векторов векторы $\xi^{\bullet}=\left(\xi^k\right)$ и $\xi^{\bar{\bullet}}=\left(\xi^{\bar{k}}\right)$ верно $\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{V}}(\xi)\wedge\delta^{\mathrm{E}}(\xi)\neq 0$. В таком случае, из равенства (29) следует, что равенство

$$\tilde{\bar{\delta}}(\xi)\wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right)\wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right)=0 \tag{30}$$

влечет равенство $M^{\mathrm{VE}}=0$, то есть $a_1^{\mathrm{V}}a_2^{\mathrm{E}}=0$. Учитывая выражения для компонентов лифтов в индуцированной координатной окрестности, имеем

$$a_1^{\mathrm{V}} = 2\beta^{\mathrm{H}}(\xi) + \gamma(\nabla\beta)(\xi) = 2\beta_j \xi^{\bar{j}}, \quad a_2^{\mathrm{E}} = (\nabla\beta)^{\mathrm{V}}(\xi^2) = \nabla_j \beta_i \xi^i \xi^j.$$

В таком случае, верно равенство

$$\beta_i \xi^{\bar{i}} \nabla_j \beta_i \xi^i \xi^j = 0. \tag{31}$$

Для произвольной точки $p \in \mathbf{T}_p M$ возьмем два ненулевых и неколлинеарных вектора $X, Y \in \mathbf{T}_p M$, которые в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p$ имеют компоненты X^k, Y^k. Рассмотрим касательный вектор $\tau \in \mathbf{T}_{\tilde{p}}(\mathbf{T}M)$ с компонентами $\tau^k = X^k$ и $\tau^{\bar{k}} = Y^k$ в индуцированной координатной окрестности. Через точку $\tilde{p} = (p, 0)$ в направлении вектора τ проведем геодезическую кривую $\mathbf{C}$ в касательном расслоении $\mathbf{T}M$. Тогда $\xi_{\tilde{p}} = \tau$, $\xi^k = X^k$, $\xi^{\bar{k}} = Y^k$ и равенство (31) примет вид

$$\beta_p(Y) \cdot (\nabla\beta)_p(X, X) = 0. \tag{32}$$

Если $\beta_p = 0$, то очевидно

$$\beta_p \otimes S(\nabla\beta)_p = 0, \tag{33}$$

где S – оператор симметрирования.

Поэтому предположим, что $\beta_p \neq 0$; в таком случае, найдется такой ненулевой вектор $Y \in \mathbf{T}_p M$, что $\beta_p(Y) \neq 0$. Тогда из равенства (32) получим равенство

$$(\nabla\beta)_p(X, X) = 0 \tag{34}$$

для всех ненулевых векторов $X \in \mathbf{T}_p M$, каждый из которых неколлинеарен вектору Y. Так как $(\nabla\beta)_p$ – тензор (2-линейная форма), то равенство (34) остается в силе и при $X = 0$. Осталось проверить равенство (34) для всех векторов X, коллинеарных вектору Y. При $n > 1$ найдется такой вектор $Z \in \mathbf{T}_p M$, $Z \neq 0$, что $\beta_p(Z) = 0$. Рассмотрим вектор $T = Y + Z$. Очевидно, $\beta_p(T) = \beta_p(Y) + \beta_p(Z) = \beta_p(Y) \neq 0$ и $T \neq 0$. Вектор T неколлинеарен вектору Y. Так как $\beta_p(T) \neq 0$, то векторы Y и T можно поменять ролями. Тогда равенство (34) выполняется для всех векторов X, неколлинеарных вектору T. Таковыми, в частности, являются векторы, коллинеарные вектору Y. Из равенства (34), в силу произвольности вектора X, получается равенство

$$S(\nabla\beta)_p = 0, \tag{35}$$

а значит и равенство (33). Так как последнее верно для произвольной точки $p \in M$, то мы приходим к равенству

$$\beta \otimes S(\nabla\beta) = 0. \tag{36}$$

Теперь перейдем к доказательству равенства

$$S(\nabla\beta) = 0. \tag{37}$$

Произвольно возьмем точку $p \in M$. Если $\beta_p \neq 0$, то из равенства (33) немедленно получим равенство (35). Поэтому пусть $\beta_p = 0$. Покажем, что $(\nabla\beta)_p = 0$ и тогда равенство (35) также будет выполняться. Допустим противное, то есть $(\nabla\beta)_p \neq 0$. Пусть β_i и Γ_{ij}^k – компоненты β и ∇ соответственно в координатной окрестности $(U; u^k)$. Найдется такой вектор $y = (y^k) \in \mathbb{R}^n$, что $\left(y^k \nabla_k \beta_i\big|_p\right) \neq 0$. С другой стороны $\nabla_k \beta_i\big|_p = \partial_k \beta_i\big|_p - \Gamma_{ki}^{\alpha}\big|_p \beta_\alpha\big|_p = \partial_k \beta_i\big|_p$, и тогда $\left(y^k \partial_k \beta_i\big|_p\right) \neq 0$.

Берем полный лифт от равенства (36), получим $\beta^{\mathrm{V}} \otimes S(\nabla\beta)^{\mathrm{C}} + \beta^{\mathrm{C}} \otimes S(\nabla\beta)^{\mathrm{V}} = 0$. Для точки $\tilde{p} = (p, y) \in \mathbf{T}M$ последнее равенство примет вид $\beta^{\mathrm{V}}\big|_{\tilde{p}} \otimes S(\nabla\beta)^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} + \beta^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} \otimes S(\nabla\beta)^{\mathrm{V}}\big|_{\tilde{p}} = 0$. Отсюда, учитывая равенства $\beta^{\mathrm{V}}\big|_{\tilde{p}} = \left(\beta_k\big|_p, 0\right) = 0$ и $\beta^{\mathrm{C}}\big|_{\tilde{p}} = \left(y^\alpha \partial_\alpha \beta_k\big|_p, \beta_k\big|_p\right) = \left(y^\alpha \partial_\alpha \beta_k\big|_p, 0\right) \neq 0$, будем иметь

$\beta^{\mathrm{C}}\Big|_{\tilde{p}} \otimes S\left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{V}}\Big|_{\tilde{p}} = 0$, что в свою очередь влечет равенство $S\left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{V}}\Big|_{\tilde{p}} = 0$. Из этого получается равенство (35).

Таким образом, в силу произвольности точки $p \in M$, из равенства (30) следует равенство (37). С другой стороны, пусть верно равенство (37). Беря вертикальный лифт от этого равенства, приходим к равенству

$$\left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{V}} = 0. \tag{38}$$

По определению оператора симметрирования, для тензорного поля $\omega \in \mathsf{T}_2^0\left(M\right)$ и произвольного векторного поля $\bar{\tilde{X}}$ на $\mathbf{T}M$, будем иметь $\left(\nabla\left(S\left(\omega\right)\right)\right)^{\mathrm{V}}\left(\bar{\tilde{X}}^2\right) = \left(\nabla\omega\right)^{\mathrm{V}}\left(\bar{\tilde{Y}}^3\right)$. Для ковариантного дифференциала $\omega = \nabla\beta$ последнее равенство примет вид $\left(\nabla\left(S\left(\nabla\beta\right)\right)\right)^{\mathrm{V}}\left(\bar{\tilde{X}}^2\right) = \left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\bar{\tilde{Y}}^3\right)$. Беря ковариантный дифференциал от равенства (37), а затем вертикальный лифт, получим $\left(\nabla\left(S\left(\nabla\beta\right)\right)\right)^{\mathrm{V}} = 0$. С учетом этого, последнее равенство примет вид

$$\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}}\left(\bar{\tilde{X}}^3\right) = 0. \tag{39}$$

Учитывая равенства (38) и (39) в равенстве (28), получим равенства $M^{\mathrm{V}\gamma} = 0$, $M^{\mathrm{VE}} = 0$, $M^{\gamma\mathrm{E}} = 0$. Подставляя их в равенство (27), находим равенство (30).

Таким образом, полный лифт X^{C} является 2-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\beta \neq 0$ и $S\left(\nabla\beta\right) = 0$.

3. Аналогично, нетрудно проверить равенство

$$\bar{\tilde{\delta}}\left(\xi\right) \wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^4\right) = \begin{vmatrix} a_1^{\mathrm{V}} & a_1^{\gamma} & 0 \\ a_2^{\mathrm{V}} & a_2^{\gamma} & a_2^{\mathrm{E}} \\ a_3^{\mathrm{V}} & a_3^{\gamma} & a_3^{\mathrm{E}} \end{vmatrix} \bar{\tilde{\delta}}\left(\xi\right) \wedge \delta^{\mathrm{V}}\left(\xi\right) \wedge \gamma\delta \wedge \delta^{\mathrm{E}}\left(\xi\right).$$

В таком случае, равенство $\bar{\tilde{\delta}}\left(\xi\right) \wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^4\right) = 0$ равносильно равенству

$$\begin{vmatrix} a_1^{\mathrm{V}} & a_1^{\gamma} & 0 \\ a_2^{\mathrm{V}} & a_2^{\gamma} & a_2^{\mathrm{E}} \\ a_3^{\mathrm{V}} & a_3^{\gamma} & a_3^{\mathrm{E}} \end{vmatrix} = 0,$$

которое равносильно равенству

$$S\left(\begin{vmatrix} 2\beta^{\mathrm{H}} + \gamma\left(\nabla\beta\right) & \left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{V}} & 0 \\ 3\left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{E}} + \gamma\left(\nabla^2\beta\right) & \left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}} & \left(\nabla\beta\right)^{\mathrm{V}} \\ 4\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{E}} + \gamma\left(\nabla^3\beta\right) & \left(\nabla^3\beta\right)^{\mathrm{V}} & 2\left(\nabla^2\beta\right)^{\mathrm{V}} \end{vmatrix}\right) = 0.$$

4. Этот случай следует из равенства

$$\bar{\tilde{\delta}}\left(\xi\right) \wedge L_{1,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^2\right) \wedge L_{2,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^3\right) \wedge L_{3,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^4\right) \wedge L_{4,X^{\mathrm{C}}}\left(\xi^5\right) = 0,$$

которое получается непосредственно из леммы 1. Теорема доказана.

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Получен инструментарий для исследования уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального преобразования относительно связности горизонтального лифта (теорема 1, предложение 5). Его использование позволило выявить уплощающие свойства полного лифта инфинитезимального проективного преобразования (теорема 5). Сопоставление производных Ли от аффинной связности для инфинитезимального проективного преобразования, с одной стороны, и инфинитезимального конциркулярного или голоморфно-проективного преобразований, с другой стороны, дает возможность постановки задачи о применении полученного инструментария к исследованию уплощающих свойств полного лифта указанных преобразований. Кроме того, свойство 1 теоремы 5 представляет собой условие, при котором порядок уплощения полного лифта совпадает с порядком уплощения самого инфинитезимального проективного преобразования (он равен 1). В связи с этим возникает задача нахождения условий, при которых полный лифт, уже произвольного инфинитезимального преобразования, сохраняет порядок уплощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yano K. Tangent and cotangent bundles. Differential geometry / K. Yano, S. Ishihara. – New York : Marcel Dekker, 1973 – 434 p.
2. Yano K. Differential geometry of tangent bundles of order 2 / K. Yano, S. Ishihara // Kodai Math. Semin. Repts. – 1968. – Vol. 20, No. 3. – P. 318-354.
3. Лейко С. Г. Р-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия / С. Г. Лейко // Математика. – 1992. – № 2. – С. 62-71. – (Известия вузов).
4. Лейко С. Г. Р-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия / С. Г. Лейко // Математика. – 1998. – № 6. – С. 35-45. – (Известия вузов).
5. Зубрилин К. М. Р-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях второго порядка, индуцированные конциркулярными преобразованиями баз / К. М. Зубрилин // Український математичний журнал. – 2009 – Т. 61, № 3. – С. 346-364.
6. Зубрилин К. М. Р-геодезические преобразования, индуцированные инфинитезимальными голоморфно-проективными преобразованиями келеровых пространств / К. М. Зубрилин // Математика. – 2012. – № 11. – С. 36-50. – (Известия вузов).
7. Зубрілін К. М. Р-геодезичні дифеоморфізми дотичних розшарувань із зв'язністю горизонтального ліфта, індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами баз / К. М. Зубрілін // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 48-60.
8. Кобаяси Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 344 с.
9. Yano K. The theory of Lie derivatives and its applications / K. Yano. – Amst. N: Holland publ. Groningen., 1957. – 299 p.

УДК 517.95 : 517.988

О ПОСТРОЕНИИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Колосова С. В., к. ф.-м. н., доцент, Луханин В. С., магистрант, Сидоров М. В., к. ф.-м. н., доцент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Рассматриваются некоторые вопросы построения последовательных приближений для одной нелинейной краевой задачи в областях сложной геометрии. Если известна функция Грина задачи, доказывается возможность построения двусторонних приближений к положительному решению задачи.

Ключевые слова: функция Грина, квазифункция Грина, последовательные приближения.

Колосова С. В., Луханін В. С., Сидоров М. В. ПРО ПОБУДОВУ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ / Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

Розглянуто деякі підходи до побудови послідовних наближень для однієї нелінійної крайової задачі в областях складної геометрії. Якщо знаємо функцію Гріна задачі, доводиться можливість побудови двобічних наближень до додатного розв'язку задачі.

Ключові слова: функція Гріна, квазіфункція Гріна, послідовні наближення.

Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. ABOUT CONSTRUCTION ITERATIVE METHODS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS / Kharkov National University of Radioelectronics, Ukraine

In this paper we consider nonlinear boundary value problem $-\Delta u = f(u)$ in $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, $u = 0$ on $\partial\Omega$. The approximations (including two-sides ones) to converge to the positive solution are constructed.

Keywords: Green's function, Green's quasi-function, method of successive approximations.