УДК 519.172

# ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА ГРАФА С ЦИКЛИЧЕСКИМИ ФРАГМЕНТАМИ

Курапов С. В., к. ф.-м. н., доцент, Чеченя В. С., аспирант

*Запорожский национальный университет*

В работе представлен метод для построения топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений ребер для графа с циклическими фрагментами. Задача построения рисунка суграфа для непланарного графа может быть представлена как поиск (выделение) подмножества циклов из совместного множества единичных циклов, достигающих нулевого значения функционала Мак-Лейна. Удаление циклов производилось с учетом максимального изменения значения функционала Мак-Лейна и с одновременным выполнением правила «удаляем цикл – удаляется только одно ребро».

*Ключевые слова: граф, топологический рисунок графа, суграф, гиперграф, множество циклов, функционал Мак-Лейна.*

Курапов С. В., Чеченя В. С. ПОБУДОВА ТОПОЛОГІЧНОГО РИСУНКА ГРАФА З ЦИКЛІЧНИМИ ФРАГМЕНТАМИ / *Запорізький національний університет, Україна*

У роботі представлений метод для побудови топологічного рисунка графа з мінімальним числом перетинів ребер для графа з циклічними фрагментами. Завдання побудови рисунка суграфа для непланарного графа може бути представлена як пошук (виділення) підмножини циклів зі всієї множини одиничних циклів, що досягають нульового значення функціоналу Мак-Лейна. Видалення циклів відбувається з урахуванням максимальної зміни значення функціоналу Мак-Лейна та з одночасним виконанням правила «видаляємо цикл - видаляється лише одне ребро».

*Ключові слова: граф, топологічний рисунок графа, суграф, гіперграф, множина циклів, функціонал Мак-Лейна.*

Kurapov S. V., Chechenja V. S. CONSTRUCTION OF TOPOLOGICAL PICTURE OF GRAPH WITH CYCLIC FRAGMENTS / *Zaporizhzhya National University, Ukraine*

In this work a method is presented for the construction of topological picture of graph with the minimum number of crossings of ribs for a graph with cyclic fragments. The task of construction of picture of sugrapha for a nonplanar graph can be presented as a search (selection) of subset of cycles from the joint great number of single cycles, arriving at a zero value of functional of Mak-Leyna. The delete of cycles was produced taking into account the maximal change of value of functional of Mak-Leyna and with simultaneous implementation of rule «delete a cycle – an only one rib retires».

*Key words: graph, the topological pattern of the graph, subgraph, hypergraph, the set of cycles, the functional McLean.*

## ВВЕДЕНИЕ

При проектировании плоских конструктивов, часто приходится представлять принципиальную электрическую схему в виде графа с циклическими фрагментами. Данная математическая модель с соответствующей степенью адекватности описывает топологические свойства проведения соединений и взаимное расположение элементов при решении задачи построения топологического рисунка с минимальным числом пересечений. Одной из первых публикаций по представлению топологического описания рисунка графа с пересечением ребер для двух циклических фрагментов была работа [5].

Автору удалось преобразовать данную задачу к решению известной задачи теории графов по представлению двудольного графа с минимальным числом пересечения ребер (рис. 1). Однако решение приводится только для двух фрагментов, и это породило развитие идей цепочного построения топологического рисунка графа для нескольких фрагментов [1]. Однако данные математические модели зависят от выбора первоначальной цепочки соединений, что приводит к задаче оптимального перебора вариантов.

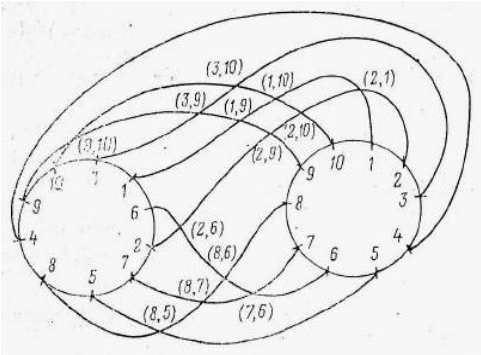



Рис. 1. Пересечения ребер в двух фрагментов

Развитие методов построение топологического рисунка для неориентированных графов с неизбежностью приводит к постановке вопроса о применимости данных методов для решения задачи построения топологического рисунка графа с циклическими фрагментами [2].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать такие электрические конструкции, в которых соединения между элементами располагаются в одной или нескольких плоскостях. К таким конструкциям относятся печатные платы, микросборки, интегральные микросхемы и т.д. Здесь обычно корпуса интегральных схем задаются циклическими фрагментами.

Процесс построения начинается с того, что каждому гиперребру гиперграфа принципиальной электрической схемы ставится в соответствии электрическая цепь, а вершины характеризуют элементы схемы. Далее каждому гиперребру ставится в соответствие вершина графа Кёнига. В таком построении вершины характеризующие элементы могут быть представлены циклическими фрагментами, которые задаются набором ориентированных ребер в зависимости от технологических ограничений (рис. 2). Таким образом, осуществляется переход к частично ориентированному графу G = (X,U;P), здесь X – множество вершин графа, U – множество ребер и P – трехместный предикат. Будет называть граф с циклическими фрагментами, частично ориентированный граф, у которого ребра, принадлежащие циклическому фрагменту, ориентированы (рис. 2).

Самым важным вопросом при построении топологического рисунка частично ориентированного графа является выделение множества единичных циклов $\tilde{N}_f^t$.

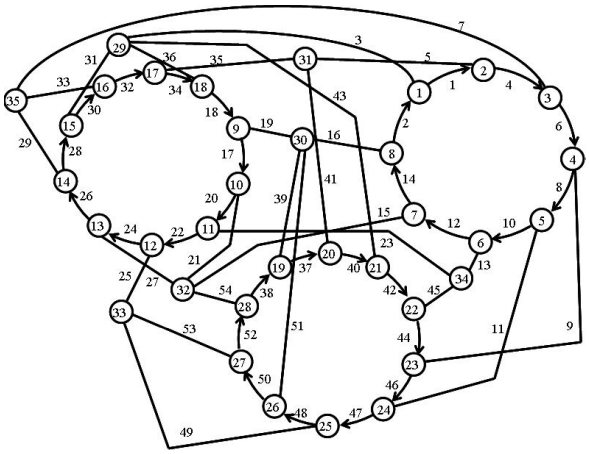
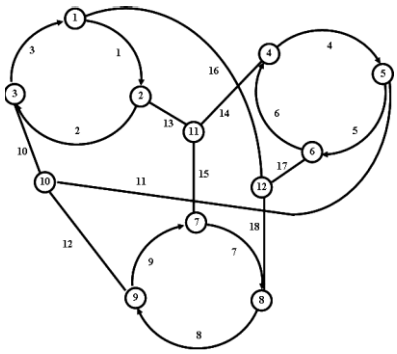
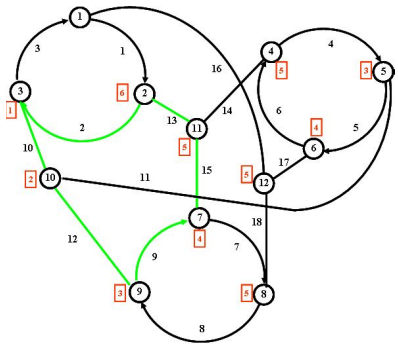


Рис. 2. Граф с циклическими фрагментами

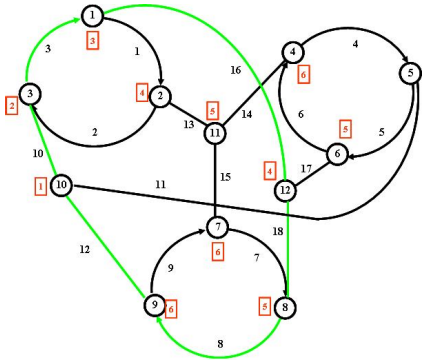
Рассмотрим методы построения единичных циклов для графов с циклическими фрагментами. Выделим произвольное ребро графа, не принадлежащее циклическим фрагментам, и удалим его из рассмотрения. Теперь построим минимальные s-t цепи для двух несмежных концевых вершин ребра s и t с учетом ориентации ребер поиском в ширину. Добавим к полученным минимальным цепям удаленное ребро и получим единичные циклы для выбранного ребра. Все множество единичных циклов образуется как объединение всех единичных циклов для неориентированных ребер. В качестве примера, рассмотрим граф на рис. 3,а и его единичные циклы относительно ребра $u_{10}$: $\{u_2,u_9,u_{10},u_{12},u_{13},u_{15}\}$, $\{u_3,u_8,u_{10},u_{12},u_{16},u_{18}\}$ полученные алгоритмом поиска в ширину.



а)

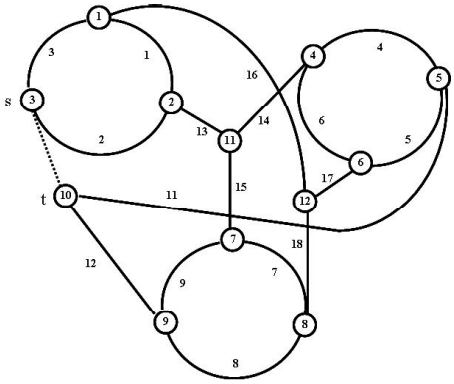


б)

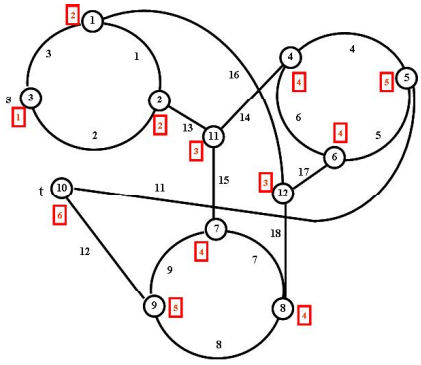


в)

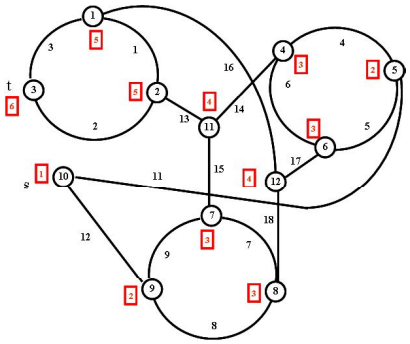
Рис. 3. Граф с циклическими фрагментами а) и его единичные циклы для ребра $u_{10}$ б) и в)



а)



б)



в)

Рис. 4. Неориентированный граф а) и его единичные циклы для ребра $u_{10}$ б) и в)

Другой способ выделения единичных циклов для графа с циклическими фрагментами заключается в формировании множества единичных циклов для ребра неориентированного графа, с последующим удалением циклов, имеющих разнонаправленные ориентированные ребра. В качестве примера, рассмотрим граф на рис. 4, *а* и его единичные циклы (рис. 4, *б* и *в*). Здесь для ребра $u_{10}$ множество единичных циклов в неориентированном графе: $\{u_2,u_9,u_{10},u_{12},u_{13},u_{15}\}$, $\{u_3,u_8,u_{10},u_{12},u_{16},u_{18}\}$, $\{u_2,u_4,u_{10},u_{11},u_{13},u_{14}\}$, $\{u_3,u_5,u_{10},u_{11},u_{16},u_{17}\}$. Для получения множества единичных циклов графа, имеющего циклические фрагменты, нужно удалить последние два цикла, как имеющие разнонаправленные ориентированные ребра.

Все множество единичных циклов $\tilde{N}_f^{\tau}$ для графа с циклическими фрагментами имеет вид:

$$c_1=\{u_2,u_9,u_{10},u_{12},u_{13},u_{15}\},\ c_2=\{u_3,u_8,u_{10},u_{12},u_{16},u_{18}\},\ c_3=\{u_5,u_8,u_{11},u_{12},u_{17},u_{18}\},\ c_4=\{u_4,u_9,u_{11},u_{12},u_{14},u_{15}\},$$

$$c_5=\{u_1,u_7,u_{13},u_{15},u_{16},u_{18}\},\ c_6=\{u_6,u_7,u_{14},u_{15},u_{17},u_{18}\},\ c_7=\{u_1,u_6,u_{13},u_{14},u_{16},u_{17}\},\ c_8=\{u_1,u_7,u_{13},u_{15},u_{16},u_{18}\}.$$

Естественно к ним добавляются циклы, описывающие циклические фрагменты:

$$c_9=\{u_1,u_2,u_3\},\ c_{10}=\{u_4,u_5,u_6\},\ c_{11}=\{u_7,u_8,u_9\}.$$

Таким образом, алгоритм выделения единичных циклов в частично ориентированном графе выглядит следующим образом:

1. Представляем частично ориентированный граф в виде неориентированного графа и известным алгоритмом [2,3] выделяем множество единичных циклов $\tilde{N}^{\tau}$.
2. Переходим к рассмотрению частично ориентированного графа и удаляем те циклы из множества единичных циклов $\tilde{N}^{\tau}$, у которых имеются не совпадающие ориентированные ребра.

Процесс построения топологического рисунка графа с циклическими фрагментами определяется последовательностью решения следующих задач:

- проверка графа на планарность,
- выделение максимально плоского суграфа,
- построение топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений,
- разбиение топологического рисунка графа на минимальное число планарных суграфов.

## ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНО ПЛОСКОГО СУГРАФА

**Определение 1.** *Будем говорить, что максимально плоский суграф графа – это плоский топологический рисунок графа, полученный из исходного графа путем удаления минимального количества ребер.*

Рассмотрим данный процесс построения для графа, представленного на рис. 2, без детального описания алгоритмов. Для нашего случая множество единичных циклов $\tilde{N}_f^{\tau}$ для частично ориентированного графа имеет вид:

$$c_1 = \{u_1,u_3,u_5,u_{34},u_{35},u_{36}\};\quad c_2 = \{u_1,u_3,u_5,u_{40},u_{41},u_{43}\};\quad c_3 = \{u_2,u_3,u_{16},u_{18},u_{19},u_{36}\};$$

$$c_4 = \{u_4,u_5,u_7,u_{32},u_{33},u_{35}\};\quad c_5 = \{u_1,u_2,u_4,u_6,u_8,u_{10},u_{12},u_{14}\};\quad c_9 = \{u_8,u_9,u_{10},u_{13},u_{44},u_{45}\};$$

$$c_{10} = \{u_{10},u_{11},u_{13},u_{44},u_{45},u_{46}\};\quad c_{12} = \{u_{12},u_{13},u_{15},u_{20},u_{21},u_{23}\};\quad c_{13} = \{u_2,u_3,u_{12},u_{13},u_{14},u_{42},u_{43},u_{45}\};$$

$$c_{14} = \{u_{14},u_{15},u_{16},u_{17},u_{19},u_{21}\};\quad c_{17} = \{u_{17},u_{19},u_{21},u_{38},u_{39},u_{54}\};\quad c_{18} = \{u_{20},u_{21},u_{22},u_{24},u_{27}\};$$

$$c_{21} = \{u_{17},u_{18},u_{21},u_{26},u_{27},u_{28},u_{31},u_{36}\};\quad c_{22} = \{u_{28},u_{29},u_{30},u_{33}\};\quad c_{23} = \{u_{30},u_{31},u_{32},u_{34},u_{36}\};$$

$$c_{24} = \{u_1,u_3,u_4,u_7,u_{28},u_{29},u_{31}\};\quad c_{28} = \{u_{18},u_{19},u_{34},u_{35},u_{37},u_{39},u_{41}\};\quad c_{29} = \{u_{18},u_{19},u_{36},u_{37},u_{39},u_{40},u_{43}\};$$

$$c_{30} = \{u_{38},u_{39},u_{50},u_{51},u_{52}\};\quad c_{33} = \{u_{48},u_{49},u_{50},u_{53}\}.$$

Для полноты системы единичных циклов добавляются ориентированные циклы конструктивных фрагментов

$$c_{ф1} = \{u_{17},u_{18},u_{20},u_{22},u_{24},u_{26},u_{28},u_{30},u_{32},u_{34}\},\quad c_{ф2} = \{u_1,u_2,u_4,u_6,u_8,u_{10},u_{12},u_{14}\}$$

$$\text{и } c_{ф3} = \{u_{37},u_{38},u_{40},u_{42},u_{44},u_{46},u_{47},u_{48},u_{50},u_{52}\}.$$

Например, для нашего случая (рис. 2) множество единичных циклов, выделенных традиционным алгоритмом [2, 3], имеет вид:

$$c_1 = \{u_1,u_3,u_5,u_{34},u_{35},u_{36}\};\quad c_2 = \{u_1,u_3,u_5,u_{40},u_{41},u_{43}\};$$

$$c_3 = \{u_2,u_3,u_{16},u_{18},u_{19},u_{36}\};\quad c_4 = \{u_4,u_5,u_7,u_{32},u_{33},u_{35}\};$$

$$c_5 = \{u_1,u_2,u_4,u_6,u_8,u_{10},u_{12},u_{14}\};\quad \underline{c}_6 = \{u_1,u_3,u_4,u_6,u_9,u_{42},u_{43},u_{44}\};$$

$$\underline{c}_7 = \{u_4,u_5,u_6,u_9,u_{40},u_{41},u_{42},u_{44}\};\quad \underline{c}_8 = \{u_8,u_9,u_{11},u_{46}\};$$

$$c_9 = \{u_8,u_9,u_{10},u_{13},u_{44},u_{45}\};\quad c_{10} = \{u_{10},u_{11},u_{13},u_{44},u_{45},u_{46}\};$$

$$\underline{c}_{11} = \{u_{10},u_{11},u_{12},u_{14},u_{16},u_{47},u_{48},u_{51}\};\quad c_{12} = \{u_{12},u_{13},u_{15},u_{20},u_{21},u_{23}\};$$

$$c_{13} = \{u_2,u_3,u_{12},u_{13},u_{14},u_{42},u_{43},u_{45}\};\quad c_{14} = \{u_{14},u_{15},u_{16},u_{17},u_{19},u_{21}\};$$

$$\underline{c}_{15} = \{u_{14},u_{15},u_{16},u_{38},u_{39},u_{54}\};\quad \underline{c}_{16} = \{u_{17},u_{18},u_{20},u_{23},u_{36},u_{42},u_{43},u_{45}\};$$

$$c_{17} = \{u_{17},u_{19},u_{21},u_{38},u_{39},u_{54}\};\quad c_{18} = \{u_{20},u_{21},u_{22},u_{24},u_{27}\};$$

$$\underline{c}_{19} = \{u_{24},u_{25},u_{27},u_{52},u_{53},u_{54}\};\quad \underline{c}_{20} = \{u_2,u_3,u_{14},u_{15},u_{26},u_{27},u_{28},u_{31}\};$$

$$c_{21} = \{u_{17},u_{18},u_{21},u_{26},u_{27},u_{28},u_{31},u_{36}\};\quad c_{22} = \{u_{28},u_{29},u_{30},u_{33}\};$$

$$c_{23} = \{u_{30},u_{31},u_{32},u_{34},u_{36}\};\quad c_{24} = \{u_1,u_3,u_4,u_7,u_{28},u_{29},u_{31}\};$$

$$\underline{c}_{25} = \{u_{34},u_{35},u_{36},u_{40},u_{41},u_{45}\};\quad \underline{c}_{26} = \{u_1,u_2,u_5,u_{16},u_{37},u_{39},u_{41}\};$$

$$\underline{c}_{27} = \{u_2,u_3,u_{16},u_{37},u_{39},u_{40},u_{43}\};\quad c_{28} = \{u_{18},u_{19},u_{34},u_{35},u_{37},u_{39},u_{41}\};$$

$$c_{29} = \{u_{18},u_{19},u_{36},u_{37},u_{39},u_{40},u_{43}\};\quad c_{30} = \{u_{38},u_{39},u_{50},u_{51},u_{52}\};$$

$$\underline{c}_{31} = \{u_{10},u_{11},u_{13},u_{22},u_{23},u_{25},u_{47},u_{49}\};\quad \underline{c}_{32} = \{u_{22},u_{23},u_{25},u_{44},u_{45},u_{46},u_{47},u_{49}\};$$

$$c_{33} = \{u_{48},u_{49},u_{50},u_{53}\}.$$

Помеченные циклы имеют ориентированные ребра, не совпадающие с другими ориентированными ребрами для соответствующего направления вращения корпусов элементов, и их следует удалить из множества единичных циклов частично ориентированного графа. Следует заметить, что задание единичных циклов только относительно направленных ребер, порождает не полное множество единичных циклов в частично ориентированных графах. В качестве примера, можно рассмотреть формирование единичного цикла $c_{24} = \{u_1,u_3,u_4,u_7,u_{28},u_{29},u_{31}\}$ на рис. 2, где по ориентированному ребру $u_{28}$ проходит цикл $c_{22}: = \{u_{28},u_{29},u_{30},u_{33}\}$ меньшей длины, а по ориентированным ребрам $u_1$ и $u_4$ проходят циклы $c_1 = \{u_1,u_3,u_5,u_{34},u_{35},u_{36}\}$, $c_2 = \{u_1,u_3,u_5,u_{40},u_{41},u_{43}\}$, $c_4 = \{u_4,u_5,u_7,u_{32},u_{33},u_{35}\}$ также меньшей длины. Поэтому нужно пользоваться алгоритмом, описанным выше, то есть формировать $\tilde{N}_f^{\tau}$ из $\tilde{N}^{\tau}$.

Принципиальное отличие задачи построения топологического рисунка графа с циклическими фрагментами от задачи построения рисунка неориентированного графа заключается в вопросе формирования множества единичных циклов. Если множество единичных циклов сформировано, то остальные процессы и методы ничем не отличаются от решения классической задачи построения топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений.

Выделим базис для нашего графа с циклическими фрагментами.

$$c_1 = \{u_1,u_3,u_5,u_{34},u_{35},u_{36}\};\quad c_2 = \{u_1,u_3,u_5,u_{40},u_{41},u_{43}\};\quad c_3 = \{u_2,u_3,u_{16},u_{18},u_{19},u_{36}\};$$

$$c_4 = \{u_4,u_5,u_7,u_{32},u_{33},u_{35}\};\quad c_9 = \{u_8,u_9,u_{10},u_{13},u_{44},u_{45}\};\quad c_{10} = \{u_{10},u_{11},u_{13},u_{44},u_{45},u_{46}\};$$

$$c_{12} = \{u_{12},u_{13},u_{15},u_{20},u_{21},u_{23}\};\quad c_{13} = \{u_2,u_3,u_{12},u_{13},u_{14},u_{42},u_{43},u_{45}\};\quad c_{14} = \{u_{14},u_{15},u_{16},u_{17},u_{19},u_{21}\};$$

$$c_{17} = \{u_{17},u_{19},u_{21},u_{38},u_{39},u_{54}\};\quad c_{18} = \{u_{20},u_{21},u_{22},u_{24},u_{27}\};\quad c_{22} = \{u_{28},u_{29},u_{30},u_{33}\};$$

$$c_{23} = \{u_{30},u_{31},u_{32},u_{34},u_{36}\};\quad c_{24} = \{u_1,u_3,u_4,u_7,u_{28},u_{29},u_{31}\};\quad c_{28} = \{u_{18},u_{19},u_{34},u_{35},u_{37},u_{39},u_{41}\};$$

$$c_{30} = \{u_{38},u_{39},u_{50},u_{51},u_{52}\};\quad c_{33} = \{u_{48},u_{49},u_{50},u_{53}\}.$$

Так как выделенный базис не удовлетворяет нулевому значению фунционала Мак-Лейна $F(c_б) = 82$, то последовательно будем удалять из базиса циклы с обязательным соблюдением условия, что при удалении цикла цикломатическое число графа уменьшается ровно на единицу. Это соответствует тому, что при удалении цикла, удаляется одно и только одно ребро.

$$c_1 = \{u_1,u_3,u_5,u_{34},u_{35},u_{36}\};\quad c_3 = \{u_2,u_3,u_{16},u_{18},u_{19},u_{36}\};\quad c_4 = \{u_4,u_5,u_7,u_{32},u_{33},u_{35}\};$$

$$c_{10} = \{u_{10},u_{11},u_{13},u_{44},u_{45},u_{46}\};\quad c_{12} = \{u_{12},u_{13},u_{15},u_{20},u_{21},u_{23}\};\quad c_{14} = \{u_{14},u_{15},u_{16},u_{17},u_{19},u_{21}\};$$

$$c_{22} = \{u_{28},u_{29},u_{30},u_{33}\};\quad c_{33} = \{u_{48},u_{49},u_{50},u_{53}\};\quad c_{ф1} = \{u_{17},u_{18},u_{20},u_{22},u_{24},u_{26},u_{28},u_{30},u_{32},u_{34}\};$$

$$c_{ф2} = \{u_1,u_2,u_4,u_6,u_8,u_{10},u_{12},u_{14}\};\quad c_{ф3} = \{u_{37},u_{38},u_{40},u_{42},u_{44},u_{46},u_{47},u_{48},u_{50},u_{52}\}.$$

После проведения операции удаления циклов, значение функционала Мак-Лейна для оставшихся циклов равно 0. Удаление циклов производилось с учетом максимального изменения значения функционала Мак-Лейна и с одновременным выполнением правила «удаляем цикл – удаляется только одно ребро».

Как видно по ребрам проходит не боле чем два цикла, что полностью соответствует теореме Мак-Лейна. При этом мы получили базис подпространства циклов, описывающий топологический рисунок плоского суграфа (рис. 5).

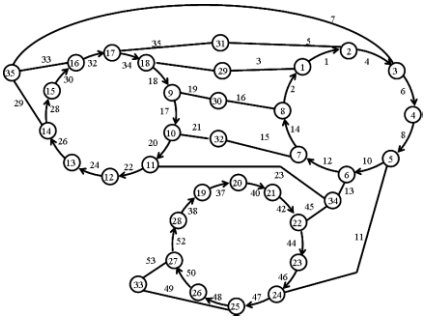


Рис. 5. Плоский суграф

Дальнейшее построение осуществляется с применением методов векторной алгебры пересечений [3]. Для проведения ребра $(x_{12},x_{23})$ в качестве координатно-базисной системы применяется обод $c_0 = \{u_6,u_7,u_8,u_{11},u_{22},u_{23},u_{24},u_{26},u_{29},u_{37},u_{38},u_{40},u_{42},u_{45},u_{47},u_{49},u_{52},u_{53}\}$. Если технология изготовления плоского конструктива позволяет проводить соединения внутри циклического фрагмента, то возможно проведение соединений $(x_{15},x_{18})$, $(x_{10},x_{13})$, где в качестве координатно-базисной системы возможно применить циклический фрагмент $c_{ф1}$. Также возможно проведение соединения $(x_{19},x_{26})$, где в качестве координатно-базисной системы применен циклический фрагмент $c_{ф3}$. Проведение соединения $(x_{12},x_{23})$ представлено на рис. 6, *а*. Проведение соединений $(x_{15},x_{18})$, $(x_{10},x_{13})$ и $(x_{19},x_26)$ представлено на рис. 6, *б*. После проведения данных соединений система циклов изменится:

$$c_1 = \{u_1,u_3,u_5,u_{34},u_{35},u_{36}\} \rightarrow (x_1,x_2,x_{17},x_{18},x_{29},x_{31});$$

$$c_3 = \{u_2,u_3,u_{16},u_{18},u_{19},u_{36}\} \rightarrow (x_1,x_8,x_9,x_{18},x_{29},x_{30});$$

$$c_4 = \{u_4,u_5,u_7,u_{32},u_{33},u_{35}\} \rightarrow (x_2,x_3,x_{16},x_{17},x_{31},x_{35});$$

$$c_{10} = \{u_{10},u_{11},u_{13},u_{44},u_{45},u_{46}\} \rightarrow (x_5,x_6,x_{22},x_{23},x_{24},x_{34});$$

$$c_{12} = \{u_{12},u_{13},u_{15},u_{20},u_{21},u_{23}\} \rightarrow (x_6,x_7,x_{10},x_{11},x_{32},x_{34});$$

$$c_{14} = \{u_{14},u_{15},u_{16},u_{17},u_{19},u_{21}\} \rightarrow (x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{30},x_{32});$$

$$c_{22} = \{u_{28},u_{29},u_{30},u_{33}\} \rightarrow (x_{14},x_{15},x_{16},x_{35});$$

$$c_{33} = \{u_{48},u_{49},u_{50},u_{53}\} \rightarrow (x_{25},x_{26},x_{27},x_{33});$$

$$c_{34} = \{u_{22},u_{23},u_{25},u_{37},u_{38},u_{40},u_{42},u_{45},u_{52},u_{53}\} \rightarrow (x_{11},x_{12},x_{19},x_{20},x_{21},x_{22},x_{27},x_{28},x_{33},x_{34});$$

$$c_{ф1,а} = \{u_{30},u_{31},u_{32},u_{34}\} \rightarrow (x_{15},x_{16},x_{17},x_{18});$$

$$c_{ф1,в} = \{u_{17},u_{18},u_{26},u_{27},u_{28},u_{31}\} \rightarrow (x_9,x_{10},x_{13},x_{14},x_{15});$$

$$c_{ф1,с} = \{u_{20},u_{22},u_{24},u_{27}\} \rightarrow (x_{10},x_{11},x_{12},x_{13});$$

$$c_{ф2} = \{u_1,u_2,u_4,u_6,u_8,u_{10},u_{12},u_{14}\} \rightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8);$$

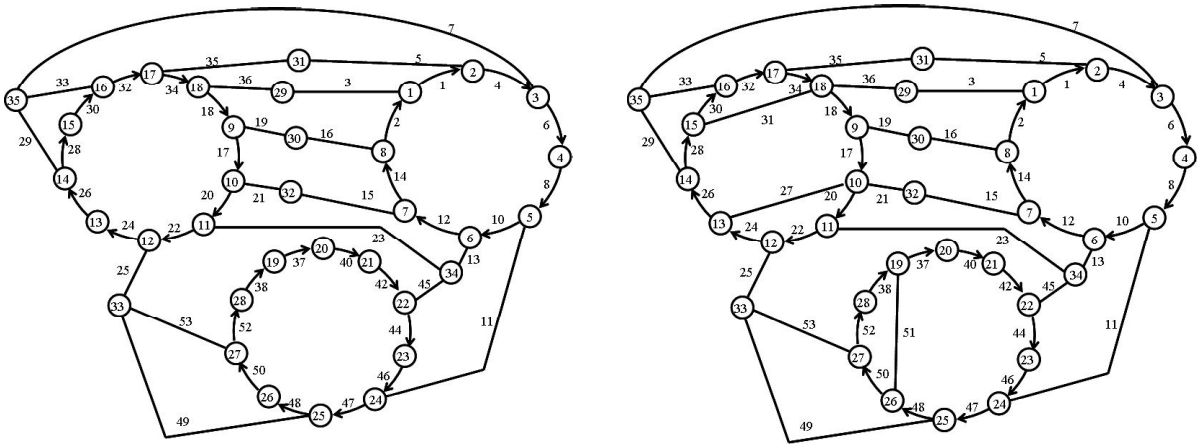
$$c_{ф3,а} = \{u_{37},u_{40},u_{42},u_{44},u_{46},u_{47},u_{48},u_{51}\} \rightarrow (x_{19},x_{20},x_{21},x_{22},x_{23},x_{24},x_{25},x_{26});$$

$$c_{ф3,в} = \{u_{38},u_{50},u_{51},u_{52}\} \rightarrow (x_{19},x_{26},x_{27},x_{28});$$

$$c_0 = \{u_6,u_7,u_8,u_{11},u_{24},u_{25},u_{26},u_{29},u_{49}\} \rightarrow (x_3,x_4,x_5,x_{12},x_{13},x_{14},x_{24},x_{25},x_{33},x_{35}).$$

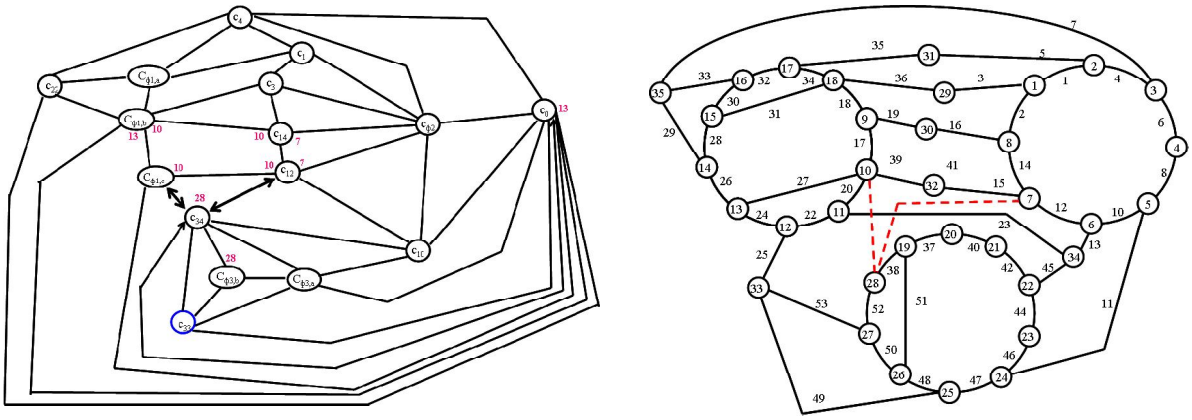
## ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА ГРАФА С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Предварительным этапом построения топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений является построение графа циклов для максимально плоского суграфа. На графе циклов определяются все минимальные маршруты для непроведенных соединений (ребер), например, см. рис. 7, *а* для проведения соединения $(x_{10},x_{28})$, и рис. 8, *а* для проведения соединения $(x_9,x_{19})$.



а) б)

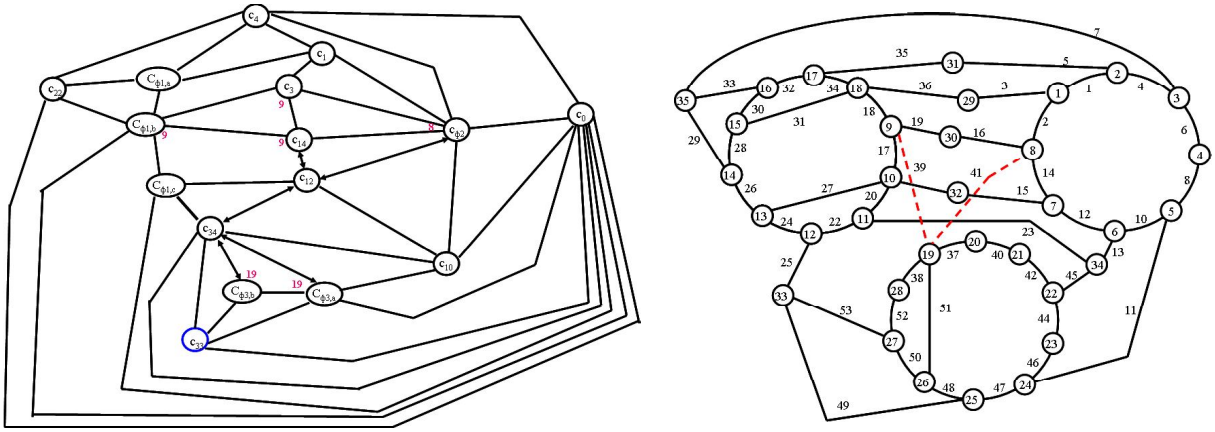
Рис. 6. Проведение соединений методами векторной алгебры пересечений



а) б)

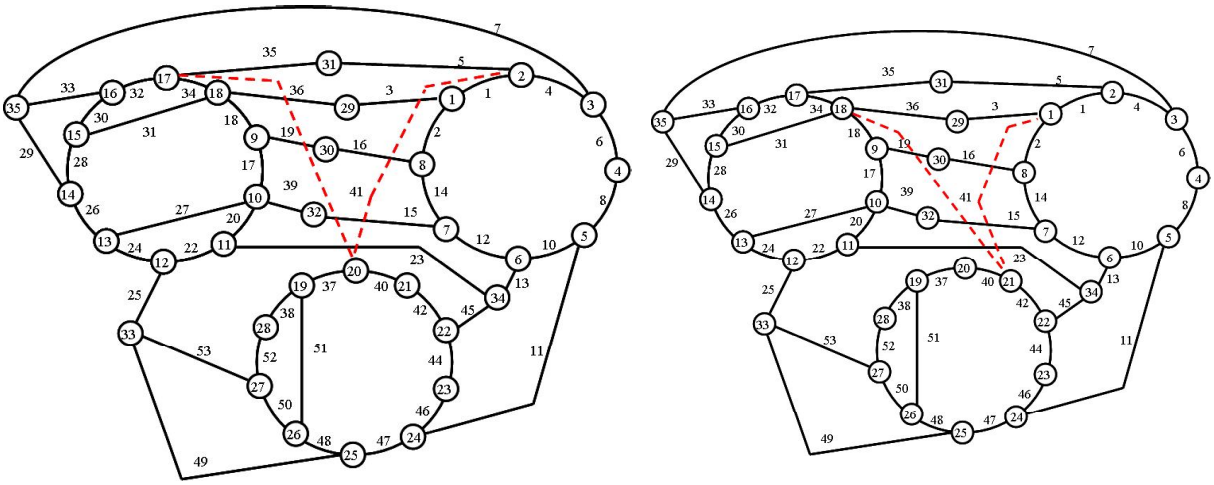
Рис. 7. Проведение минимального маршрута для ребра ($x_{28}$,$x_{10}$)

Топологическим рисунком графа будем называть граф с заданным вращением вершин ($G, \hbar$). После проведения всех минимальных маршрутов для ранее исключенных ребер (соединений) производится выбор непересекающихся маршрутов для проведения каждого ребра (рис. 9, *а-г*).

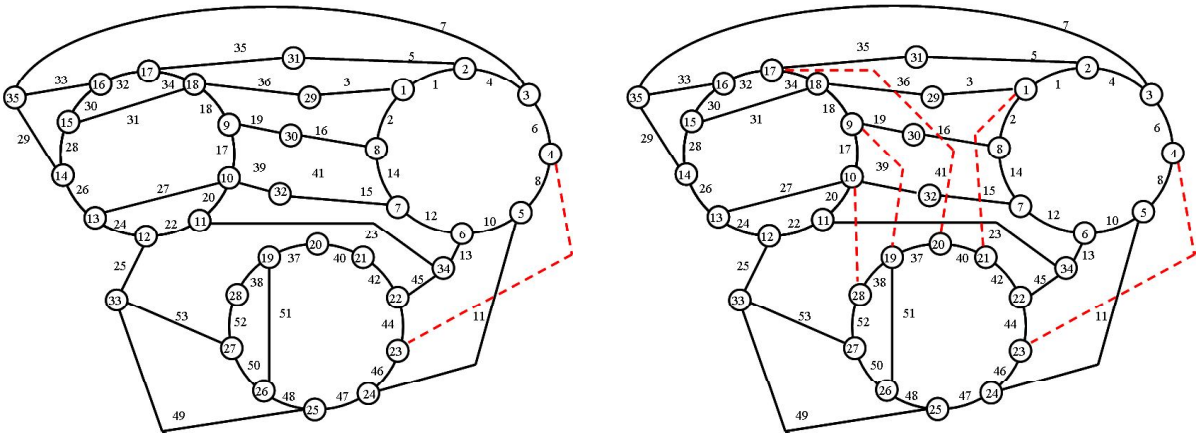


а) б)

Рис. 8. Проведение минимального маршрута для ребра ($x_9$,$x_{19}$)



а) б)



в) г)

Рис. 9. Проведение ранее исключенных соединений

Следующим этапом является введение мнимых вершин для пересекающихся ребер (рис. 10) и построение топологического рисунка графа путем задания вращения всех вершин как истинных, так и мнимых:

$$\hbar = \{ \hbar_1 = <x_8,x_{44},x_{29},x_2>;\ \hbar_2 = <x_1,x_{31},x_3>;\ \hbar_3 = <x_2,x_{35},x_4>;\ \hbar_4 = <x_3,x_{42},x_5>;\ \hbar_5 = <x_4,x_{42},x_6>;$$

$$= <x_5,x_{34},x_7>;\ \hbar_7 = <x_6,x_{40},x_8>;\ \hbar_8 = <x_7,x_{44},x_1>;\ \hbar_9 = <x_{18},x_{30},x_{46},x_{10}>;\ \hbar_{10} = <x_9,x_{46},x_{36},x_{11},x_{13}>;$$

$$\hbar_{11} = <x_{10},x_{36},x_{12}>;\ \hbar_{12} = <x_{11},x_{33},x_{13}>;\ \hbar_{13} = <x_{14},x_{10},x_{12}>;\ \hbar_{14} = <x_{15},x_{13},x_{35}>;\ \hbar_{15} = <x_{16},x_{18},x_{14}>;$$

$$\hbar_{16} = <x_{17},x_{15},x_{35}>;\ \hbar_{17} = <x_{16},x_{31},x_{45},x_{18}>;\ \hbar_{18} = <x_{17},x_{45},x_9,x_{15}>;\ \hbar_{19} = <x_{28},x_{37},x_{20},x_{26}>;\ \hbar_{20} = <x_{19},x_{38},x_{21}>;$$

$$\hbar_{21} = <x_{20},x_{41},x_{22}>;\ \hbar_{22} = <x_{21},x_{34},x_{23}>;\ \hbar_{23} = <x_{22},x_{42},x_{24}>;\ \hbar_{24} = <x_{23},x_{42},x_{25}>;\ \hbar_{25} = <x_{26},x_{24},x_{33}>;$$

$$\hbar_{26} = <x_{27},x_{19},x_{25}>;\ \hbar_{27} = <x_{28},x_{26},x_{33}>;\ \hbar_{28} = <x_{19},x_{27},x_{36}>;\ \hbar_{29} = <x_{45},x_1>;\ \hbar_{30} = <x_9,x_{43}>;$$

$$\hbar_{31} = <x_{17},x_2>;\ \hbar_{32} = <x_{46},x_{39}>;\ \hbar_{33} = <x_{12},x_{27},x_{25}>;\ \hbar_{34} = <x_6,x_{22},x_{41}>;\ \hbar_{35} = <x_3,x_{16},x_{14}>;$$

$$\hbar_{36} = <x_{11},x_{10},x_{37},x_{28}>;\ \hbar_{37} = <x_{36},x_{46},x_{38},x_{19}>;\ \hbar_{38} = <x_{37},x_{39},x_{41},x_{20}>;\ \hbar_{39} = <x_{32},x_{43},x_{40},x_{38}>;$$

$$\hbar_{40} = <x_{39},x_{44},x_7,x_{41}>;\ \hbar_{41} = <x_{38},x_{40},x_{34},x_{21}>;\ \hbar_{42} = <x_5,x_4,x_{24},x_{23}>;\ \hbar_{43} = <x_{30},x_{45},x_{44},x_{39}>;$$

$$\hbar_{44} = <x_1,x_8,x_{40},x_{43}>;\ \hbar_{45} = <x_{18},x_{17},x_{29},x_{43}>;\ \hbar_{46} = <x_9,x_{32},x_{37},x_{10}>\}.$$

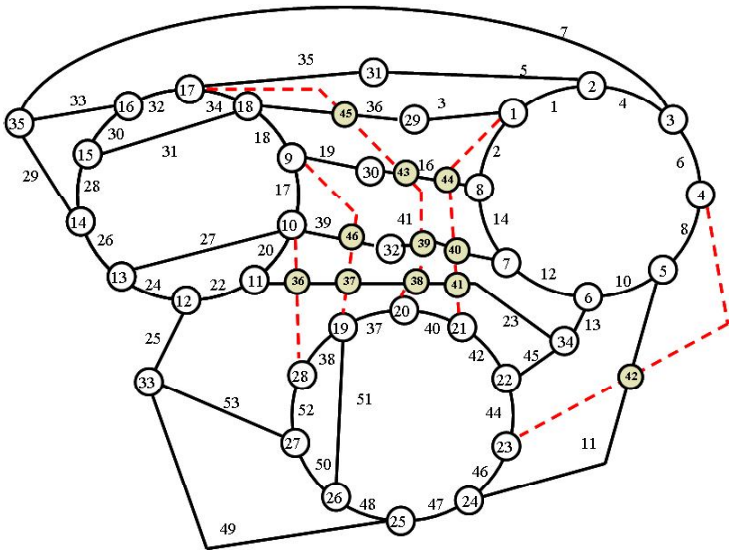
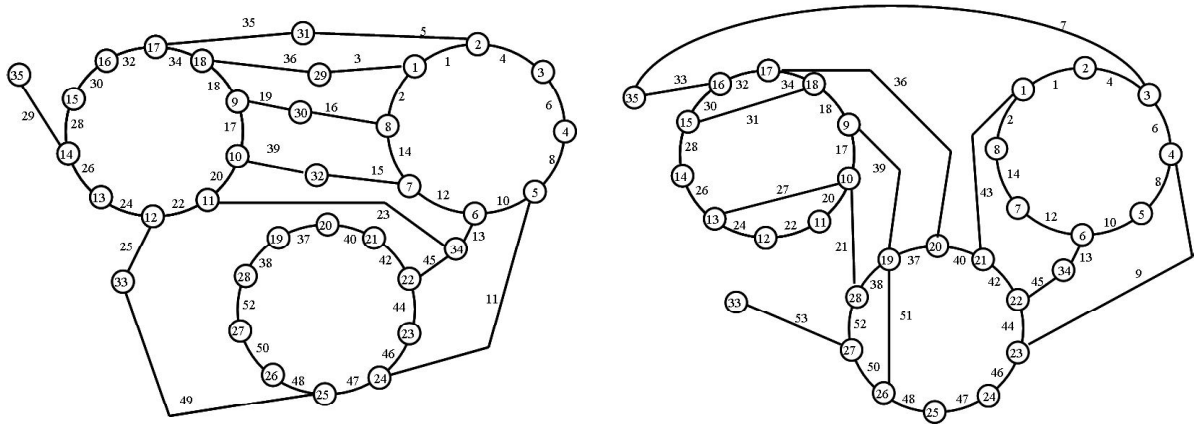


Рис. 10. Введение мнимых вершин, характеризующих пересечение соединений

# РАССЛОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА ГРАФА

Определив топологический рисунок графа, можно построить граф пересечений ребер относительно мнимых вершин. Произведя раскраску вершин графа пересечений, определим число и топологический рисунок планарных суграфов (рис. 11).



а) б)

Рис. 11. Расслоение топологического рисунка графа

Следующий этап – построение геометрического рисунка графа относительно вычисленного топологического рисунка. Геометрические построения можно осуществить множеством способов, подробное описание которых представлено в работах [6-10].

# ВЫВОДЫ

Решение задачи построения рисунка графа носит двойственный характер. С одной стороны, при решении следует учитывать топологические свойства, такие как: планаризация графа, определение минимального числа пересечения ребер, взаимное расположение вершин и ребер, разбиение рисунка графа на части и др. Геометрическими методами определяются координаты вершин и конфигурация ребер, расстояние между ними и другие метрические характеристики. Современная концепция построения рисунка графа и его визуализация должна быть построена следующим образом: вначале создается топологический рисунок графа алгебраическими методами без конкретной геометрической прорисовки на плоскости, затем, на основании топологического рисунка, строится его геометрическое изображение.

# ЛИТЕРАТУРА


1. Базилевич Р. П. Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного конструирования электронных устройств / Р. П. Базилевич. – Львов : Изд-во при Львов ун-те, 1981. – 168 с.
2. Курапов С. В. Векторная алгебра и рисунок графа / С. В. Курапов, В. В. Савин. – Запорожье : ЗДУ, 2003. – 200 с.
3. Курапов С. В. Алгоритмические методы в теории графов / С. В. Курапов. – Запорожье : ЗДУ – 2012. – 190 с.
4. Раппопорт Л. И. Векторная алгебра пересечений / Л. И. Раппопорт, Б. Н. Мороговский, С. А. Поливцев // В кн. : Многопроцессорные вычислительные структуры. – Таганрог, 1982. – Вып. 2(11). – С. 53-56.
5. Щемелинин В. М. Задача оптимального представления графа электрической схемы / В. М. Щемелинин //В кн. : Микроэлектроника. – М. : Советское радио, 1975. – Вып. 9. – С. 253-261.
6. G. Di Battista. Algorithms for Drawing Graphs: an Annotated Bibliography / G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, I.G. Tollis // Computational Geometry, Theory and Applications. – 1994. – N 4. – P. 235-282.
7. Liu C. L. On the deletion of nonplanar edges of a graph / C. L. Liu, R. C. Geldmacher // [1978]. – SIAM J.Comput (to appear)/ (3.1.4; 3.2.2.; A1.2).
8. Sugiyama Kozo. Graph Drawing and applications / Kozo Sugiyama. – New Jersey : World Scientific, 2002. – 128 p.
9. Takao Nishizeki. Planar Graph Drawing / Takao Nishizeki, Md. Saidur Rahman. – New Jersey : World Scientific, 2004. – 310 p.
10. Roberto Tamassia. Handbook of Graph Drawing and Visualization / Roberto Tamassia. – Charman and Hall/CRC. – 2013. – 844 p.