

32. Ємець О. О. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колечкіна, С. І. Недобачій. – Полтава : «Легат», 1999. – 64 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/488>.
33. Ємець О. О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування [Електронний ресурс] : монографія / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/377>.
34. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, Л. М. Колечкіна // Монографія. – К. : Наук. думка, 2005. – 117 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/474>.
35. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях [Электронный ресурс] / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. – К. : Наук. думка, 2008. – 159 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473>.
36. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях [Електронний ресурс] : монографія / О. А. Емец, О. А. Черненко. – К. : Наук. думка, 2011. – 154 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/467>.
37. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення [Електронний ресурс] : монографія / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 174 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353>.
38. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с. – Режим доступу : <http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376>.
39. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія / О. О. Ємець, О-лра О. Ємець // Монографія. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с.
40. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації: монографія / О. О. Ємець, О. О. Черненко. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 204 с.
41. Леонова М. В. Про оцінювання допустимих множин в методі гілок та меж для задачі про призначення / М. В. Леонова // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 21-23 березня 2013 р.). – Полтава : ПУЕТ, 2013. – С. 185-189.
42. Леонова М. В. Алгоритм розв'язування задачі про оптимальні призначення методом гілок та меж / М. В. Леонова // Штучний інтелект. – 2013. – №2. – С. 14-20.
43. Леонова М. В. Задача навчального розкладу / М. Леонова // Матеріали III Всеукраїнського наукового семінару «Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини» (КОНЕМ-2013). – Полтава : РВВПУЕТ, 2013. – С. 31-36.
44. Ємець О. О. Симплексна форма загального переставного многогранника, заданого незвідною системою / О. О. Ємець, М. В. Леонова // Інформатика та системні науки (ІСН-2012) : Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Полтава, 1-3 березня 2012 р.). – Полтава : ПУЕТ, 2012. – С. 89-95.

УДК [519.674:519:688] : 32-11

СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ЗАДАНЫХ С ПОМОЩЬЮ R-ФУНКЦИЙ

Лисняк А. А., к. ф.-м. н., доцент

Запорожский национальный университет

В статье описан подход к автоматическому построению дискретных моделей геометрических объектов, представленных функционально. Предложены подходы к оптимизации дискретных моделей на базе треугольных конечных элементов, которые основываются на локальном преобразовании

элементов сетки. Рассмотренное преобразование стремится аппроксимировать особые точки объекта, опираясь на анализ дифференциальных характеристик его границы.

Ключевые слова: R-функция, визуализация, геометрическая модель, дискретная модель, метод конечных элементов.

Лісняк А. О. СПОСОБ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ЗАДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ R-ФУНКЦІЙ / Запорізький національний університет, Україна

У роботі описано підхід до автоматичної побудови дискретних моделей геометричних об'єктів, представлених функціонально. Запропоновано підходи до оптимізації дискретних моделей на базі трикутних скінченних елементів, які виконуються на основі локального перетворення елементів сітки. Розглянуте перетворення прагне апроксимувати особливі точки об'єкта, спираючись на аналіз дифференціальних характеристик границі об'єкта.

Ключові слова: R-функція, візуалізація, геометрична модель, дискретна модель, метод скінченних елементів.

Lisnyak A. A. CONSTRUCTION OF DISCRETE MATHEMATICAL MODELS OF GEOMETRIC OBJECTS DEFINED BY R-FUNCTIONS / Zaporozhe national university, Ukraine

This paper describes the approach for automatic generation of discrete models of functional representation of geometrical objects. Approaches for discrete models optimization on the basis of triangles are proposed in the paper. These approaches based on the local transformation of finite elements. The local transformation approximates character points of the object and uses differential properties of the object border.

Key words: R-function, visualization, geometrical model, discrete model, method of finite elements.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Математические модели геометрических объектов, заданных в виде математических формул, определяют некоторое бесконечное множество точек объекта на плоскости или в пространстве. Использование такого описания для задач визуализации с применением вычислительной техники или определения напряженно-деформированного состояния конструкции с использованием вычислительных методов (метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод конечных разностей) приводит к необходимости перехода от аналитической модели геометрического объекта к соответствующей дискретной [3, 4, 8]. Как правило, такой переход реализуется путем построения дискретной модели на основе непересекающихся элементов треугольной или четырехугольной формы с определенной точностью. Ввиду высокой топологической гибкости на практике более распространенными являются элементы треугольной формы [5, 25]. Покрытие плоскости геометрического объекта в двумерном или поверхности в трехмерном пространстве набором непересекающихся треугольных элементов называют триангуляцией, конечно-элементной сеткой или просто сеткой.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ

Построение сетки или триангуляция заданного набора точек на плоскости хорошо изучена [1, 2, 6, 23, 25, 34]. Кроме работ, посвященных построению триангуляции, существует ряд методов, направленных на автоматическую оптимизацию существующей триангуляции, которая основана на изменении связей между узлами сетки, добавлении и изменении положения узлов [22, 24, 26, 32, 33, 35, 39]. Большинство методов построения и оптимизации триангуляции разработано для плоскости, но могут быть обобщены до пространственного случая [27, 36, 37].

Возможности и перспективы описания границы геометрического объекта с использованием R-функций представлены в работах научной школы академика В.Л. Рвачева [16-18, 9-14].

Для построения дискретных геометрических моделей, заданных в неявном виде, существует несколько классов методов: методы исчерпывания, методы продолжения, методы рекурсивного деления [20, 21, 28, 29, 30, 31, 38]. Анализ этих методов показывает, что задача имеет несколько решений, которые хорошо работают в случае гладкой границы геометрического объекта. Основной проблемой, особенно в случае функционально заданной границы, является правильность расположения дискретных элементов в областях, имеющих геометрические особенности. Выявление и оптимизация сетки в таких областях может качественно улучшить результаты вычислительных экспериментов и ощутимо повысить результаты компьютерной визуализации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть x – произвольная точка в двумерном или в трехмерном пространстве и $F(x)=0$ – уравнение, множество решений которого определяет поверхности геометрического объекта. Следовательно, произвольный геометрический объект Ω может быть определен в виде

$$\partial\Omega = \{x : F(x) = 0\}. \quad (1)$$

В основе данного представления лежит теорема Жордана-Брауэна, которая гарантирует, что $\partial\Omega$ разбивает Евклидово пространство на два подмножества, одно из которых внутреннее для Ω , другое – неограниченное внешнее.

Основной трудностью практического применения функционального подхода является сложность построения первоначального множества опорных узлов, лежащих на границе или поверхности геометрического объекта, представленного в виде (1). Эта задача равносильна поиску корней нелинейного уравнения $F(x) = 0$.

Набор точек на плоскости или поверхности, соединенных непересекающимися симплексами, образует конечно-элементную сетку на основе треугольных элементов. Пусть $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $x_i \in E^d$, $d = \overline{2,3}$ – набор таких точек, тогда триангуляция M набора точек P , состоящего из n элементов, является совокупностью трех множеств:

- множество номеров узлов сетки $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$;
- множество ребер $E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}$, где $e_i = (v_j, v_l)$ упорядоченная пара номеров узлов такая, что $v_j < v_l$, $v_j \in V$, $v_l \in V$;
- множество треугольников $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}\}$, где $t_i = (v_j, v_g, v_h)$ – упорядоченная тройка несовпадающих номеров узлов такая, что $v_j = \min(v_j, v_g, v_h)$ и $(v_j, v_g, v_h) \neq (v_j, v_h, v_g)$.

Следовательно, дискретное представление на базе треугольных элементов для произвольного объекта Ω может быть представлено объединением трех множеств

$$M(P) = \{V, E, T\}, \quad (2)$$

которые должны удовлетворять следующим свойствам:

- $\bigcup_{t \in T} t$ покрывает границу (поверхность) $\partial\Omega$ плоского (пространственного) геометрического объекта с некоторой точностью;
- площадь любого треугольника $t \in T$ больше нуля;
- пересечение любых двух элементов $t_1 \in T$, $t_2 \in T$ является пустым множеством, ребром $e \in E$ или узлом $v \in V$.

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Конечно-элементную сетку (2) плоского или пространственного геометрического объекта, представленного выражением (1), можно построить, используя следующую последовательность действий (схема на рис. 1).

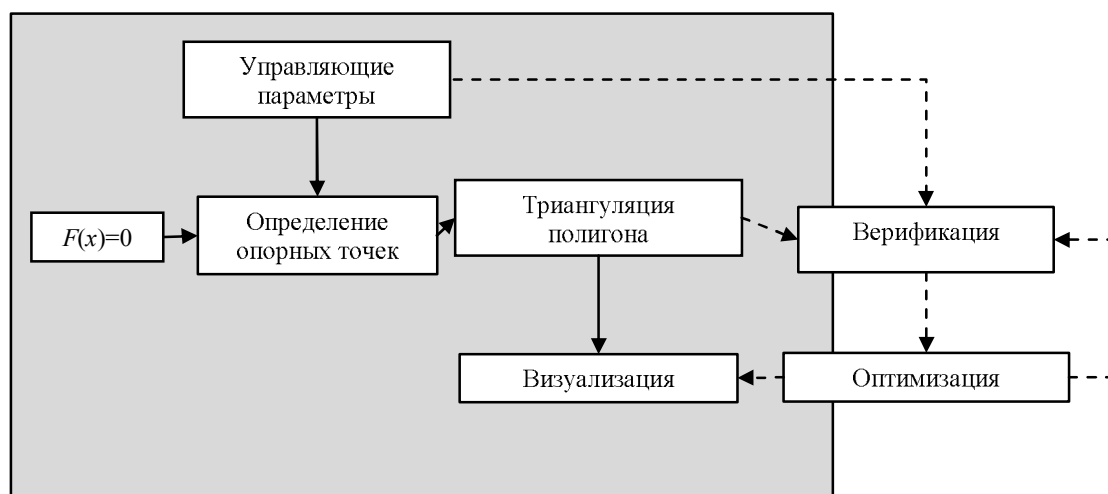


Рис. 1. Схема построения дискретного представления геометрического объекта

Множество опорных точек на границе плоского геометрического объекта Ω может быть получено путем определения точек пересечения некоторой структурированной сетки, покрывающей область вокруг Ω , с его границей (рис. 2).

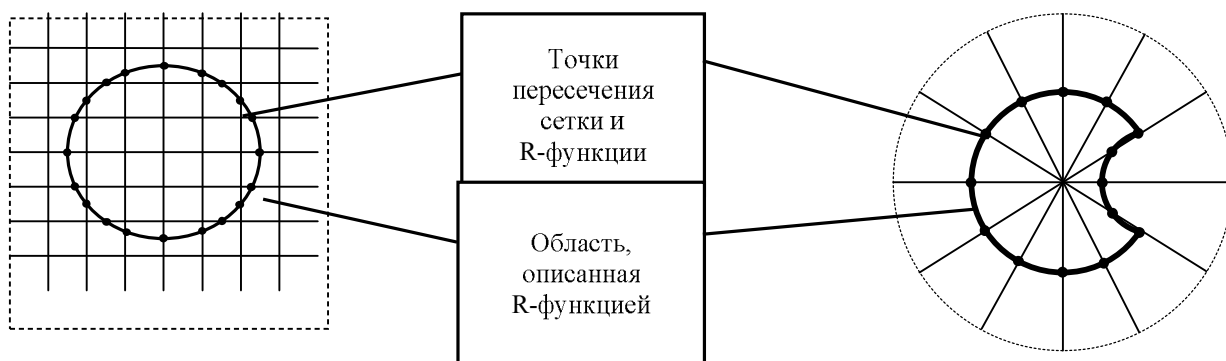


Рис. 2. Определение множества опорных точек

При этом необходимо учитывать, что такая сетка должна целиком покрывать область моделирования, а шаг ее ячеек h может выбираться произвольно, но должен быть меньше размеров наименьшей геометрической особенности объекта Ω . Для построения структурированной сетки может быть выбрана произвольная система координат.

Определив точки пересечения структурированной сетки с границей объекта Ω и используя, например, метод золотого сечения или другие методы для нахождения корней нелинейного уравнения, получаем исходный набор точек P конечно-элементной сетки $M(P)$ (рис. 3).

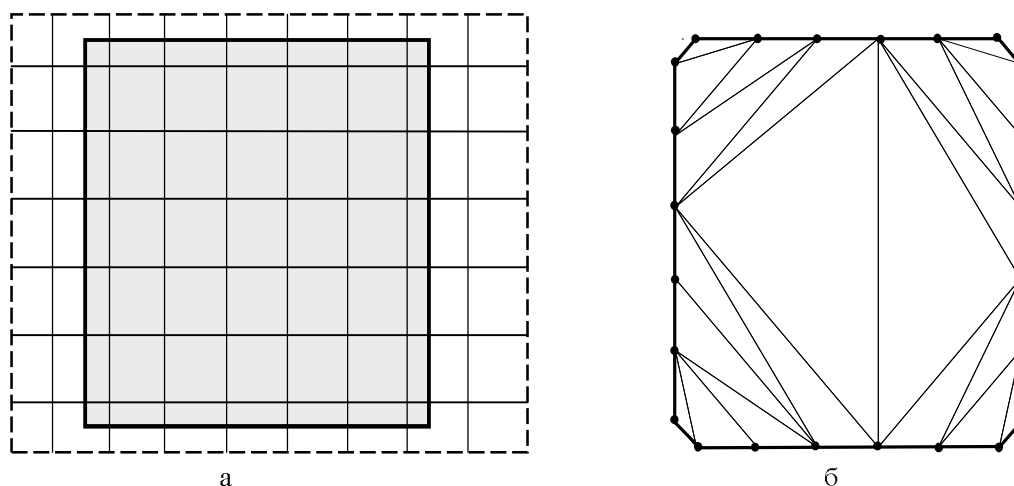


Рис. 3. Конечно-элементная сетка опорного набора точек границы геометрического объекта

Пусть $L \subset E$ – множества ребер, которые принадлежат границе геометрического объекта $\partial\Omega$. Следовательно, L образует один или несколько замкнутых контуров, которые аппроксимируют границу объект $\partial\Omega$. При такой аппроксимации происходит потеря участков $\partial\Omega$ в окрестности которых находятся особые точки (рис. 3, б). С точки зрения функционального подхода на базе теории R-функции особыми или угловыми являются точки, производные в которых не существуют. С геометрической точки зрения такие точки, как правило, являются такими, в которых происходит нарушение гладкости $\partial\Omega$ и образуются углы (изломы).

Для выявления потерянных участков границы можно, определив отклонение между нормальными к ребрам и нормальными к поверхности в их центрах, скорректировать положение узлов сетки таким образом, чтобы оно было минимальным. Для каждого ребра $e \in L$ такое отклонение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{m}(e) &= -\frac{\Delta F(c)}{\|\Delta F(c)\|}, \\ \varepsilon &= 1 - \vec{n}(e) \cdot \vec{m}(e), \end{aligned} \quad (3)$$

где c – центр ребра e ; $\vec{n}(e)$ – вектор нормаль к ребру e ; $\Delta F(c)$ – вектор градиента.

Используя (3), среднеквадратичное отклонение нормалей ребер можно представить в следующем виде

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\sum_{e \in L} \|e\|} \sum_{e \in L} \|e\| \left(1 - (\vec{n}(e) \cdot \vec{m}(e))^2\right). \quad (4)$$

Выражение (4) можно использовать как одну из оценок качества аппроксимации границы плоского геометрического объекта, которое совместно с выражением (3) дает возможность определить ребра, которые необходимо корректировать.

Если значение ε_n больше некоторой заданной величины, то положение узлов сетки должно быть скорректировано.

Рассмотрим произвольный узел p_i , множества L и смежные с ним узлы p_j и p_k (рис. 4, а). Вектор корректировки Δp_i можно записать в следующем виде

$$\Delta p_i = \frac{1}{\|p_i p_j\| + \|p_i p_k\|} \left(\|p_i p_j\| v(p_i p_j) + \|p_i p_k\| v(p_i p_k) \right), \quad (5)$$

$$v(p_m p_n) = \left(\overline{p_m c_{mn}} \cdot \vec{m}(c_{mn}) \right) \cdot \vec{m}(c_{mn}),$$

где $v(p_m p_n)$ – проекция половины вектора $\overline{p_m p_n}$ на вектор нормали к середине c_{mn} ребра $p_m p_n$.

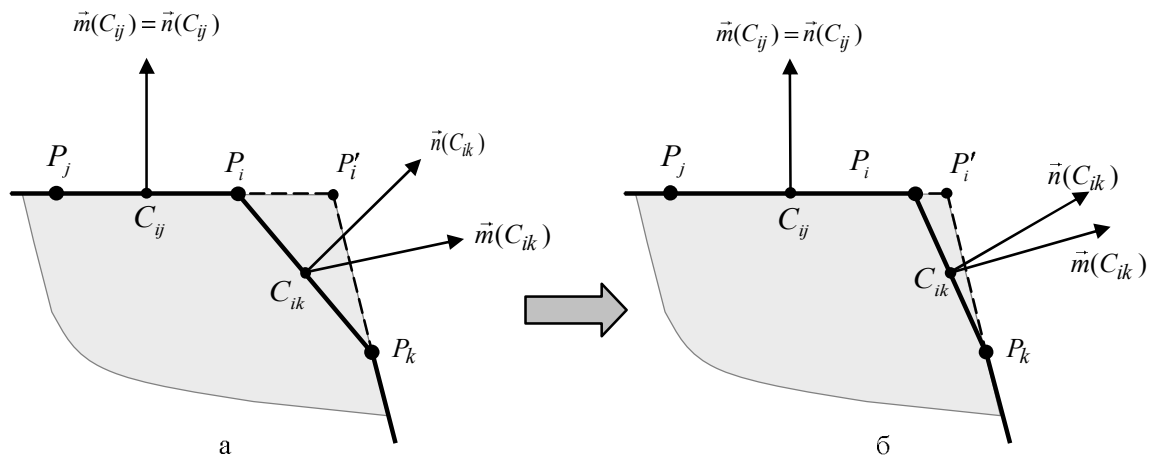


Рис. 4. Пример поиска особых точек

Таким образом, получаем новое положение узла $p'_i = p_i + \Delta p_i$. Применяя подобное преобразование для множества всех граничных узлов $P \in L$, получим оператор следующего вида

$$N_1(P) : p'_i \leftarrow p_i + \Delta p_i, \quad p_i \in P. \quad (6)$$

Каждая итерация применения оператора (6) будет стремиться минимизировать (4) и приближать узлы p_i к их наилучшему положению p'_i (рис. 4, б).

Для определения кривизны поверхности $k(p)$, как и в предыдущем случае, рассмотрим произвольный узел $p \in L$, и смежные с ним узлы p_i и p_j (рис. 5). Определим $k(p)$ кривизну границы $\partial\Omega$ в точке p в следующем виде

$$k_i(p) = \begin{cases} 0, & \langle \overline{p_i p}, \vec{n}(p) \rangle = 0, \\ 2 \frac{\sqrt{\|\overline{p_i p}\|^2 - \langle \vec{n}(p), \overline{p_i p} \rangle^2}}{\|\overline{p_i p}\|^2}, & \langle \overline{p_i p}, \vec{n}(p) \rangle \neq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$k(p) = \max(k_i(p), k_j(p)).$$

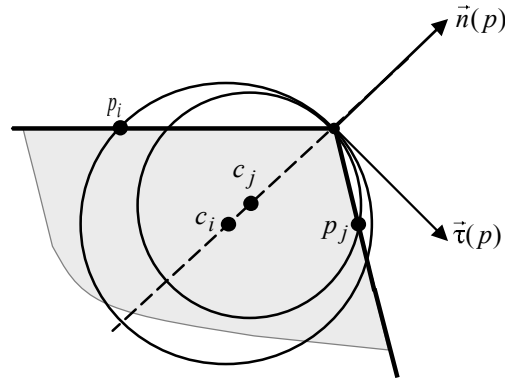


Рис. 5. Определение радиуса кривизны поверхности

Определяя кривизну (7) в каждой точке образующей L , можем разделить множество узлов на границе $\partial\Omega$ на особые (угловые) и регулярные. При этом, особым узлам будут соответствовать большие значения кривизны, а регулярным – малые. Построим множество H следующего вида

$$H(P) = \{k(p) : p \in P\}. \quad (8)$$

Множество $H(P)$ определяет атрибуты, характеризующие геометрические свойства L . Расположив элементы множества $H(P)$ вдоль координатной оси, можем разбить его на два подмножества, используя, например, один из методов оптимизации K-means (K-средних), который минимизирует суммарное квадратичное отклонение всех элементов $H(P)$ от нескольких главных точек, где главные точки являются центрами масс каждого из полученных подмножеств [1, 7, 19].

Пусть P – множество узлов, входящих в L , тогда множество угловых P_{corner} и регулярных $P_{regular}$ узлов, таких что, $P = P_{corner} \cup P_{regular}$ и $P_{corner} \cap P_{regular} = \emptyset$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu_{corner}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{corner}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{corner}^{(t)}} k(p), \\ \mu_{regular}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{regular}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{regular}^{(t)}} k(p), \\ P_{corner}^{(t)} &= \left\{ p : \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{regular}^{(t)}\|, p \in P \right\}, \\ P_{regular}^{(t)} &= \left\{ p : \|k(p) - \mu_{regular}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\|, p \in P \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mu_{corner}^0 = \max(k(p))$, $p \in P$ – начальное положение главных точек множества угловых узлов; $\mu_{regular}^0 = \min(k(p))$, $p \in P$ – начальное положение главных точек множеств не угловых узлов.

Кроме потери особых точек границы набор опорных точек может обладать узлами, расстояние между которыми намного меньше шага регулярной сетки. Такие узлы могут порождать элементы вырожденной формы. Для таких узлов можно применить операцию слияния, но оптимальным является применение операции локального сглаживания для всех регулярных узлов сетки. Локальное смещение узла $p \in L$, используя сглаживание Лапласа, скорректированного с учетом кривизны поверхности, можем записать в следующем виде

$$\begin{aligned} u(p) &= p - \frac{p_j + p_i}{2}, \\ \Delta u(p) &= c \cdot (u(p) - (u(p) \cdot n(p))n(p)), \end{aligned} \quad (10)$$

где p_i, p_j – узлы, связанные с p общими ребрами, c – константа из промежутка $[0; 1]$.

Таким образом, применяя (10) для множества регулярных узлов, получим оператор сглаживания $R(P)$ в следующем виде

$$R(P) : p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P_{regular}, \quad (11)$$

где p' – новое положение узла p .

Операторы поиска особых точек (6) и сглаживания (11) на практике вносят некоторую накопительную вычислительную погрешность. Поэтому необходимо выполнять периодичное проецирование граничных узлов на поверхность $\partial\Omega$ в направлении нормалей к узлам. Пусть $proj_{\partial\Omega}^{\vec{n}(p)}(p)$ – точка на границе $\partial\Omega$, полученная проецированием произвольного узла p в направлении вектора $n(p)$, тогда вектор смещения узла можно записать в следующем виде

$$\Delta g(p) = p - proj_{\partial\Omega}^{\vec{n}(p)}(p). \quad (12)$$

Следовательно, оператор проецирования с учетом (12) будет иметь вид

$$G(P): p' \leftarrow p + \Delta g(p), \quad p \in P_{regular}, \quad (13)$$

где p' – новое положение узла p .

Оператор (8) сглаживает ребра границы геометрического объекта, однако при практическом применении, линейные размеры граничных ребер необходимо изменять в зависимости от характеристик кривизны поверхности. Пусть κ_n – количество узлов, равномерно распределенных по границе с некоторой кривизной, тогда для произвольного ребра $e \in L$, образованного парой узлов p_i, p_j , можно определить величину ε_k в следующем виде

$$\varepsilon_k(e) = \vec{n}(p_i) \cdot \vec{n}(p_j) - \alpha(\kappa_n), \quad (14)$$

где $\alpha(\kappa_n) = \cos\left(\frac{2\pi}{\kappa_n}\right)$.

Если для всех граничных ребер $\varepsilon_k(e) \geq 0$, то кривые участки границы обладают достаточным количеством точек на криволинейном участке границы и требуют добавления новых узлов, в случае если $\varepsilon_k(e) < 0$.

Ребра, для которых $\varepsilon_k(e) < 0$, необходимо разбить и спроецировать на границы $\partial\Omega$ (рис. 6).

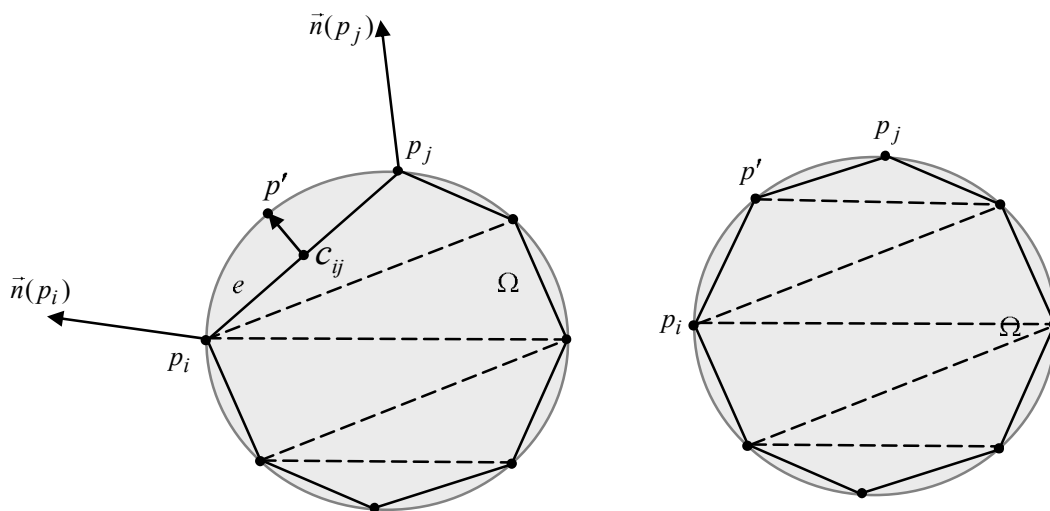


Рис. 6. Добавление узлов на границе геометрического объекта

Выполнив оценку и разбиение всех ребер $e \in L$, получим множество новых узлов P^* в следующем виде

$$P^* = \left\{ p : p = proj_{\partial\Omega}^{\vec{n}(e)}\left(\frac{p_i + p_j}{2}\right), \varepsilon_{\kappa}(e) < 0, e \in L \right\}, \quad (15)$$

где p_i, p_j – пара точек, образующих ребро e .

Множество новых точек необходимо пополнять до тех пор, пока не будет достигнутого нужного количества узлов на криволинейном участке границы. Добавление новых узлов повлечет локальную

перестройку сетки M и всех составляющих ее множеств, которую можем представить в виде операции сложения вида

$$M' = M(P) + M(P^*), \quad (16)$$

где M' – сетка, построенная на новом наборе опорных узлов.

Вставку множества новых узлов (15) в сетку M можно выполнить, используя вместо $\varepsilon_{\kappa}(e)$ критерий вида

$$\varepsilon_{edge}(e) = \max_{e \in \partial\Omega} \Delta(e, \partial\Omega), \quad (17)$$

где $\Delta(e, \partial\Omega)$ – расстояние от ребра e до участка границы $\partial\Omega$, который аппроксимирован ребром e .

Справедливой будет следующая теорема.

Теорема 1. Для произвольного граничного ребра e сетки M можно, путем вставки конечного числа узлов, обеспечить выполнение условия $\varepsilon_{edge}(e) \leq \varepsilon$ для любого наперед заданного ε .

Доказательство. Пусть ε – малая величина, e – некоторое граничное ребро, $h = \varepsilon_{edge}(e)$ и l длина дуги участка границы, который аппроксимирует ребро e (рис. 7). Очевидно, что $h < l$. Добавим на границе $m = \left\lceil \frac{l}{h} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{h}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ точек, разбив участок границы на $m+1$ равных частей. Присоединив эти точки к сетке, получим, что длина каждого нового участка границы не будет превышать ε , следовательно, максимальное расстояние от ребер сетки до соответствующих участков границы не будет превышать ε .

Теорема доказана.

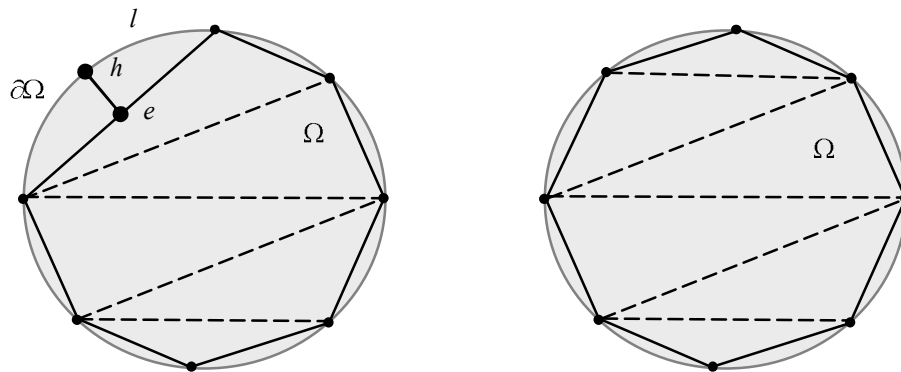


Рис. 7. Уточнение участка границы

Естественным следствием теоремы 1 является теорема 2.

Теорема 2. Для исходной сетки M путем вставки конечного числа узлов можно достичь, чтобы значения соотношения

$$\varepsilon_{edge}(M) = \frac{1}{n} \sum_{e \in L} \max \Delta(e, \partial\Omega) \quad (18)$$

было меньше любого наперед заданного ε .

Доказательство. Пусть ε – малая величина, $e_i \in L$ – граничное ребро, $h_i = \varepsilon_{edge}(e_i)$ и l_i длина дуги участка границы, который аппроксимирует ребро e_i , $i = \overline{0, |L|}$. Очевидно, что $h_i < l_i$. Добавим на участке границы, который аппроксимирует e_i $m_i = \left\lceil \frac{l_i}{h_i} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{h_i}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ точек, разобьем участок границы на $m_i + 1$ равных частей. Присоединив эти точки к сетке, получим, что длина каждого нового участка границы не будет превышать ε , и максимальное расстояние от ребер сетки до соответствующих участков границы не будет превышать ε . Следовательно, добавив таким образом $m = \sum_i m_i$ новых узлов,

получим, что среднее максимальное расстояние от ребер сетки до соответствующих участков границы не будет превышать ε .

Теорема доказана.

На практике оценку вида (17) совместно с критерием (14) можно использовать для оптимизации качества аппроксимации геометрического объекта Ω . При этом, величину k_n и ε должен выбирать исследователь, исходя из модельных ограничений.

Применение операторов (6), (11), (13) и (16) оптимизирует положение узлов сетки на границе геометрического объекта, при этом форма и размеры элементов сетки, покрывающих внутреннюю часть объекта, не учитываются. На практике, особенно при использовании метода конечных элементов, на форму и размеры элементов накладываются ограничения. Форма элементов, как правило, должна стремиться к правильной, площадь не должна превышать наперед заданную величину и сетка должна сгущаться в областях возможной концентрации напряжений.

Для решения такой задачи удобнее всего использовать методы на основе критерия Делоне и методы добавления новых узлов в уже существующую сетку, такие как метод Рапперта и Off-center [35, 36].

В качестве практического примера конечно-элементной сетки геометрического объекта, заданного в функциональном виде, рассмотрим квадрат с окружностью в его центре (рис. 8, а).

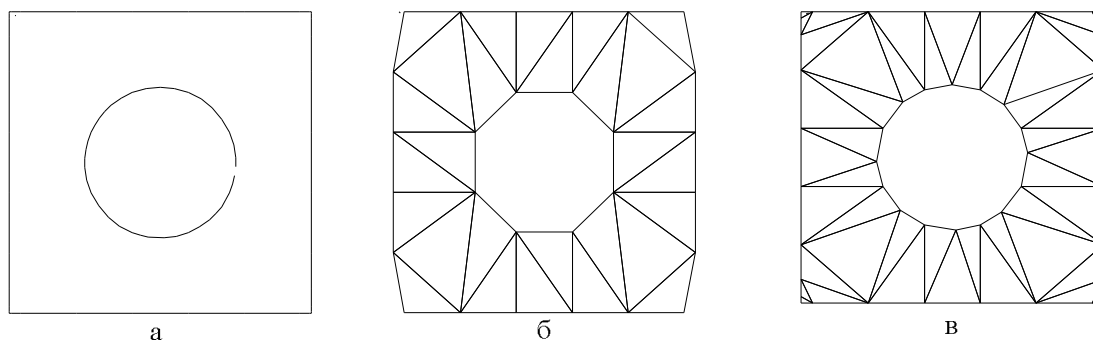


Рис. 8. Конечно-элементная сетка геометрического объекта

Уравнение геометрического объекта, заданного стороной квадрата a и радиусом окружности R , имеет вид

$$F(x, y, a, R) = F_{rect}(x, y, a) \wedge -F_{circle}(x, y, 0, 0, r). \quad (19)$$

Результат определения множества опорных узлов и конечно-элементная сетка объекта представлена на рис. 8, б. Результат выполнения оператора минимизации отклонения нормалей и добавление новых узлов сетки на криволинейных участках границы дает сетку, представленную на рис. 8, в. Применение оптимизации на основе критерия Делоне и метода Рапперта с различными управляющими параметрами представлены на рис. 9, а-в.

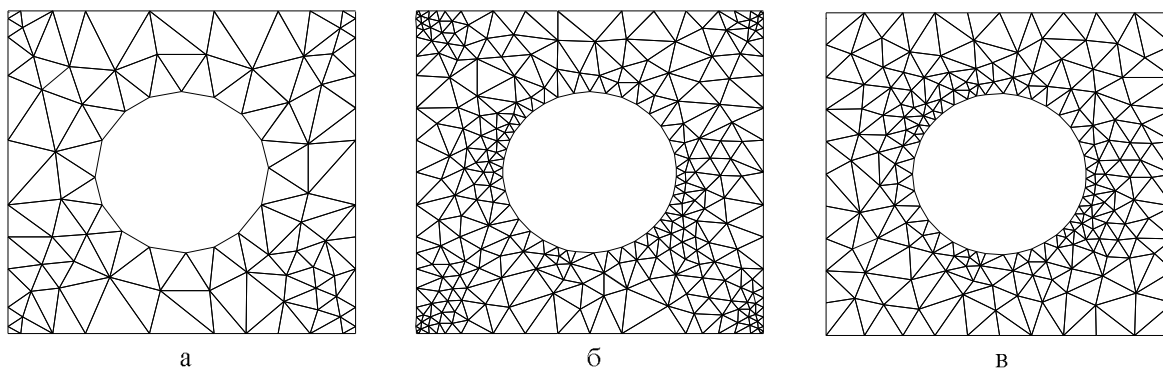


Рис. 9. Конечно-элементная сетка геометрического объекта

ВЫВОДЫ

В статье описан подход, позволяющий автоматически строить дискретные модели геометрических объектов, представленных функционально. При этом, он, в силу универсальности используемых действий, может быть применен для решения как плоских, так и пространственных задач.

Доказаны теоремы о возможности достижения наперед заданной точности построения дискретных моделей на базе разработанного подхода.

Предложены подходы к оптимизации дискретных моделей на базе треугольных конечных элементов, основанные на локальном преобразовании элементов сетки. Преобразование стремится аппроксимировать особые точки объекта, опираясь на анализ дифференциальных характеристик его границы. В результате применения таких подходов может быть получена дискретная модель с неравномерной сеткой на основе треугольных элементов, которая сгущается в областях с наибольшей кривизной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вятчин Д. А. Нечёткие методы автоматической классификации / Д. А. Вятчин. – Минск : Технопринт, 2004. – 219 с.
2. Галанин М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов. – М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2006. – № 9. – 32 с. – (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН).
3. Галанин М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов. – М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2006. – № 10. – 32 с. – (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН).
4. Гоменюк С. И. Геометрическое моделирование объектов сложной формы с использованием R-функций / С. И. Гоменюк, А. А. Лисняк, С. В. Чопоров // Труды Первой международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности» (4-6 февраля 2009, Ижевск, Удмуртская республика, Россия). – Ижевск : Удмуртский государственный университет, 2009. – С. 132-136.
5. Гоменюк С. И. Применение инструментальной системы FORTU для исследования задач механики композитов / С. И. Гоменюк // Тезисы докладов международной конференции «Dynamical system modeling and stability investigation». – К. : Вестник Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, 2003. – С. 295.
6. Гоменюк С. И. Методы описания геометрических областей в САПР / С. И. Гоменюк, Д. Н. Морозов, Ю. А. Сысоев, А. А. Лисняк // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 2. – С. 36-44.
7. Делоне Б. Н. О пустоте сферы / Б. Н. Делоне // Известия АН СССР. – М. : ОМОН, 1934. – № 4. – С. 793-800.
8. Дюран Б. Кластерный анализ / Б. Дюран, П. Одел. – М. : Статистика, 1977. – 128 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошной среды / О. Зенкевич, И. Чанг. – М. : Недра, 1974. – 238 с.
10. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков : ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
11. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 98-104.
12. Максименко-Шейко К. В. Решение обратной задачи аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Труды Первой международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования», 2009. – Т. 2. – С. 71-74.
13. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании объектов, обладающих симметрией / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 75-83.
14. Максименко-Шейко К. В. R-функции и аналитическое описание поверхностей геометрических объектов в трехмерном пространстве / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, Т. И. Шейко // Проблемы машиностроения. – 2007. – Т. 10. – № 2. – С. 59-67.

15. Максименко-Шейко К. В. Конструктивные средства метода R-функций для автоматизации построения уравнений сложных геометрических объектов / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Вісник Запорізького державного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2004. – № 2. – С. 66-76.
16. Рвачев В. Л. Автоматизация программирования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, Г. П. Манько. – К. : Наукова думка, 1983. – 229 с.
17. Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – К. : Наукова думка, 1976. – 287 с.
18. Рвачев В. Л. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов / В. Л. Рвачев, А. Н. Шевченко. – К. : Техніка, 1988. – 198 с.
19. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К. : Наукова думка, 1982. – 106 с.
20. Arthurand D. K-means lower bound implementation [Электронный ресурс] / David Arthurand, Sergei Vassilvitskii. – Режим доступа : www.stanford.edu/~darthur/kMeansLbTest.zip.
21. Chernyaev E. V. Marching Cubes 33 : Construction of Topologically Correct Isosurfaces / Evgeni V. Chernyaev // Computer Graphics and Visualization : GRAPHICON'95, 3-7 July. 1995. – Saint-Petersburg, 1995. – С. 21-29.
22. Efficient Implementation of Marching Cubes Cases with Topological Guarantees / Thomas Lewiner, Hélio Lopes, Antonio Wilson Vieira, Geovan Tavares // Journal of Graphics Tools. – 2003. – №8(2). – P. 1-15.
23. Freitag L. A. Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing / L. A. Freitag, C. Ollivier-Gooch // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1995. – № 40. – P. 3979-4002.
24. George P. Delaunay Triangulation and Meshing. Application to Finite / P. George, H. Borouchaki. – Hermes Science Publications, 1998. – 413 p.
25. George P. L. Tet meshing : construction, optimization and adaptation / P. L. George // Proceedings of 8th International Meshing Roundtable. – 1999. – P. 133-141.
26. Hjelle Ø. Triangulations and Applications (Mathematics and Visualization) / Øyvind Hjelle, Morten Dæhlen. – Springer. – 2006. – 234 p.
27. Joe B. Construction of three-dimensional improved-quality triangulations using local transformations / B. Joe // SIAM J. Sci. Comput. – 1995. – № 16(6). – P. 1292-1307.
28. Liseikin V. D. Grid generation methods. Second edition / Vladimir D. Liseikin. – Spring, 2010. – 390 p.
29. Lorensen W. E. Marching Cubes: A High-Resolution 3D Surface Construction Algorithm / W. E. Lorensen, H. E. Cline // Computer Graphics. – 1987. – № 21(4). – P. 163-169.
30. Marching Cubes without Skinny Triangles / Carlos A. Dietrich, Carlos E. Scheidegger [and other] // Computing in Science and Engineering. – 2009. – № 11(2). – P. 82-87.
31. Montani C. A modified look-up table for implicit disambiguation of Marching Cubes / Claudio Montani, Riccardo Scateni, Roberto Scopigno // The Visual Computer. – 1994. – № 10(6). – P. 353-355.
32. Patera J. A comparison of fundamental methods for ISO surface extraction / Jan Patera, Václav Skala // Machine Graphics & Vision International Journal. – 2004. – № 13(4). – P. 329-343.
33. Puppo E. RGB subdivision / E. Puppo, D. Panozzo // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. – 2009. – № 15(2). – P. 295-310.
34. Puppo E. Selectively refinable subdivision meshes / E. Puppo // Symposium on Geometry Processing 2010. – 2010. – P. 153-162.
35. Rebay S. Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm // Journal Of Computational Physics. – 1993. – № 106. – P. 125-138.
36. Ruppert J. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation / Jim Ruppert // Journal of Algorithms. – 1995. – № 18(3). – P. 548-585.
37. Shewchuk J. Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generation / J. Shewchuk // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2002. – № 22(1-3). – P. 21-74.
38. Shewchuk J. Delaunay Refinement Mesh Generation: PhD thesis, School of Computer Science / J. Shewchuk. – Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, 1997. – 207 p.
39. Skala V. Precision of iso-surface extraction from volume data and visualization / Václav Skala // Proceedings of ALGORITMY 2000: Conference on Scientific Computing. – 2000. – P. 368-378.
40. Warren J. Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach / Joe Warren, Henrik Weimer. – Morgan Kaufmann, 2001. – 320 p.