Сравнивая полученные изображения для рассмотренных соответствующих функций вида $F(x,y)=\frac{1}{5}\sin x\cos y-\frac{3}{2}\cos\left(7\frac{(x-\pi)^2+(y-\pi)^2}{4}\right)e^{-\left((x-\pi)^2+(y-\pi)^2\right)}$ и $G(x,y)=x+y+\cos\left(x^2+y^2\right)$ (см. табл. 1, 2 соответственно), видно, что «общий» вид графика свойства поверхности можно заметить уже на первых итерациях.

Визуализация свойства *Форма* наглядно отображает все экстремальные точки независимо от значения функции в этих точках, поскольку изображение исключает такие характеристики поверхности как угол между градиентом и осью OZ. Это позволяет наблюдать за развитием волновых деформаций поверхности.

Свойство *Фронт волны* отражает относительную крутизну распространяемых волн, опуская при этом характеристику форма поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толок О. В. Принципи візуальної підтримки властивостей поверхні на основі реконструкції реалістичного образу / О. В. Толок // Збірник наукових праць. Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки, біологічні науки. — Запоріжжя, Запорізький національний університет. — 1998. — С. 76-79.
2. Толок А. В. Визуализация некоторых дифференциальных свойств поверхности на основе реконструкции реалистичного образа / А. В. Толок, В. В. Мухин // XXV Юбилейная международная конференция и дискуссионный клуб IT+SE’98 «Новые информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе». (Ч. 1. Украина, Крым, Ялта–Гурзуф, 15-24 мая). — 1998. — С. 162-164.
3. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных / Н. Вирт. — М. : Мир, 1989. — 360 с.
4. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — М.-Л. : Физматгиз, 1962. — 708 с.
5. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15 : Учебный курс / Е. Г. Макаров. — СПб. : Питер, 2011. — 400 с.

УДК 531.36

МОДЕЛЮВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗВОРОТНОГО ЗВ’ЯЗКУ

[1]Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, [1]Коломійчук О. П., к. ф.-м. н., [2]Святовець І. Ф.

[1]Ін-т математики НАН України

[2]Запорізька державна інженерна академія

Пропонується один з можливих підходів визначення умов побудови майже консервативної системи за допомогою зворотного зв’язку. Наводяться приклади знаходження керування для побудови майже консервативної системи.

Ключові слова: майже консервативна система, зворотний зв'язок, вектор керувань.

Новицкий В. В., Коломийчук О. П., Святовец И. Ф. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЧТИ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ / Ин-т математики НАН Украины, Запорожская государственная инженерная академия, Украина

Предлагается один из возможных подходов определения условий построения почти консервативной системы с помощью обратной связи. Приводятся примеры нахождения управления для построения почти консервативной системы.

Ключевые слова: почти консервативная система, обратная связь, вектор управления.

Novitsky V. V., Kolomiychuk O. P., Svyatovets I. F. MODELING THE ALMOST CONSERVATIVE SYSTEM USING FEEDBACK / In-t of Mathematics of NAS of Ukraine, Zaporizhzhya State Engineering Academy, Ukraine

This article examines the controlled linear stationary system even order. Matrix of coefficients of the variable has the form ($F_0+\varepsilon F_1$) where ε is a small parameter. The system is not almost conservative, i.e. condition of skew and nonsingularity is not satisfied. We solve the problem to formation almost conservative system from the given controlled system by using feedback. The feedback is formed so that the conditions of skew and nonsingularity are satisfied for the obtained closed system. We obtained the matrix equation whose solution matrix K_0 takes part in the formation of a skew matrix, and as a result, in the constructing almost conservative system. To solve the equation we use the method the addition of the sum of some skew matrix and its transpose to one of the sides of the equation. This matrix is used to equalize the ranks of the left and right sides of the equation if structure certain other given matrices allows it.

We show how the Kronecker product of matrices can be applying to the task of constructing almost conservative system. The necessary and sufficient condition for the existence of solutions of the system with respect to the system under consideration is shown.

The examples of finding the control vector to construct almost conservative system. In the first example we use two approaches to find the unknown matrix 1) direct solution of the equation for finding K_0 and 2) the use of Kronecker product. In the second example, in addition to these two approaches we suggested finding the best approximation according to the method of least squares. To calculate K_0 we deal with the pseudoinverse. It is shown that the solutions obtained in various ways are the same. Theoretical results agree with the examples.

Keywords: almost conservative system, feedback, control vector.

УМОВИ ПОБУДОВИ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗВОРОТНОГО ЗВ'ЯЗКУ

Проаналізувавши ряд гіроскопічних систем, дійшли висновку, що серед них часто зустрічаються майже консервативні [1-3]. Для майже консервативних систем розроблено методи їх дослідження на стійкість, та знайдено алгоритми побудови оптимального керування. Для ефективного їх використання виникла задача побудови керування для зведення систем, які не є майже консервативними до майже консервативних моделей [4].

Розглядається керована лінійна стаціонарна система

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x + Gu\,, \tag{1}$$

де $x = [x_1, x_2, \ldots, x_{2n}]^T$ – $2n$-вимірний вектор стану, $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ – m-вимірний вектор керувань, ε – малий параметр; $F_0, F_1 \in R_{2n\times 2n}$, $G \in R_{2n\times m}$. Ця система не є майже консервативною [5], тобто не виконується умова кососиметричності чи невиродженості матриці F_0: $F_0^T \neq -F_0$ або $\det(F_0) = 0$. Необхідно знайти умови побудови з (1) майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку вигляду

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x\,, \tag{2}$$

де $K_0, K_1 \in R_{m\times 2n}$.

Тобто, майже консервативною повинна стати замкнена система (1), (2)

$$\dot{x} = (F_0 - GK_0 + \varepsilon(F_1 - GK_1))x\,. \tag{3}$$

З умов майже консервативності [5] маємо

$$F_0 - GK_0 = -(F_0 - GK_0)^T, \quad \det(F_0 - GK_0) \neq 0\,. \tag{4}$$

Звідси приходимо до рівняння

$$GK_0 + K_0^T G^T = F_0 + F_0^T\,, \tag{5}$$

розв'язок якого, а саме матриця K_0, бере участь у формуванні кососиметричної матриці (4), а як наслідок – майже консервативної системи.

Знайдемо умови існування розв'язку рівняння (5). Додамо до правої частини рівняння (5) суму деякої невідомої кососиметричної матриці Q_0 та її транспонованої [6]. Отримаємо

$$GK_0 + K_0^T G^T = F_0 + F_0^T + Q_0 + Q_0^T \tag{6}$$

чи

$$(GK_0 - F_0 - Q_0) + \left(K_0^T G^T - F_0^T - Q_0^T\right) = 0\,. \tag{7}$$

Звідси

$$GK_0 - F_0 - Q_0 = 0 \tag{8}$$

або

$$GK_0 = F_0 + Q_0. \qquad (9)$$

Пояснимо роль матриці Q_0. Зрозуміло, що необхідною умовою існування розв'язку рівняння (9) є рівність рангів правої і лівої частин. Матриця Q_0 слугує для зрівнювання рангів у випадках, коли це дозволяє зробити структура інших заданих матриць.

Проілюструємо сказане на прикладі.

Нехай $G \in R_{2\times 1}$, $K_0 \in R_{1\times 2}$, $F_0, Q_0 \in R_{2\times 2}$. Тоді рівняння (9) в матричному вигляді запишеться так

$$\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} + q_{12} \\ f_{21} - q_{12} & f_{22} \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

З відомої нерівності [3]

$$rang(AB) \le \min\{rang(A), rang(B)\} \qquad (11)$$

випливає, що ранг лівої частини рівності (10) не більший за одиницю, а правої не більший за двійку. Визначимо умови, за яких можливо підібрати значення елемента q_{12} так, щоб ліва та права частини (10) мали одиничні ранги. Для лівої частини це умови відмінності від нуля g_{11} або g_{21} та k_{11} або k_{12}. Для правої частини ці умови знайдемо, обчисливши і прирівнявши до нуля її визначник

$$q_{12}^2 + q_{12}(f_{12} - f_{21}) + f_{22} f_{11} - f_{12} f_{21} = 0 \qquad (12)$$

та, розв'язавши

$$q_{12} = \frac{f_{21} - f_{12}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{f_{12}^2 + 2 f_{12} f_{21} + f_{21}^2 - 4 f_{22} f_{11}}. \qquad (13)$$

З останнього випливає, що елементи матриці F_0 повинні бути пов'язані умовою

$$(f_{12} + f_{21})^2 - 4 f_{22} f_{11} \ge 0. \qquad (14)$$

Нехай, наприклад, $f_{11} = 0$. Тоді

$$q_{12} = \frac{f_{21} - f_{12}}{2} \pm \frac{1}{2}(f_{12} + f_{21}). \qquad (15)$$

Тобто $q_{12} = f_{21}$, або $q_{12} = -f_{12}$. Значить матриця правої частини рівності (10) може мати один з двох виглядів

$$(F_0 + Q_0)_1 = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} + f_{21} \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix}, \quad (F_0 + Q_0)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{12} + f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Спробуємо розв'язати рівняння (10) зі знайденими матрицями правої частини. У випадку, якщо права частина має вигляд $(F_0 + Q_0)_1$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} g_{11}k_{11} = 0, \quad & g_{11}k_{12} = f_{12} + f_{21}, \\ g_{21}k_{11} = 0, \quad & g_{21}k_{12} = f_{22}, \end{aligned} \qquad (17)$$

яка не має розв'язку.

Якщо права частина має вигляд $(F_0 + Q_0)_2$, система для пошуку невідомих компонент матриці K_0

$$\begin{aligned} g_{11}k_{11} = 0, \quad & g_{11}k_{12} = 0, \\ g_{21}k_{11} = f_{21} + f_{12}, \quad & g_{21}k_{12} = f_{22} \end{aligned} \qquad (18)$$

має розв'язок

$$k_{11} = \frac{f_{21} + f_{12}}{g_{21}}, \quad k_{12} = \frac{f_{22}}{g_{21}} \qquad (19)$$

за умови, якщо $g_{11} = 0$, $g_{21} \ne 0$.

З аналізу отриманих результатів (17), (19) випливає, що умова рівності рангів правої і лівої частин рівності (9) є необхідною, але не достатньою.

Покажемо, як у поставленій задачі формування майже консервативної системи можна застосувати кронекерівський добуток матриць. Для цього скористаємося результатами, викладеними в [7]. З них випливає, що рівняння (9) еквівалентно рівнянню

$$\tilde{G}k_0 = f_0 + q_0 , \tag{20}$$

де

$$\tilde{G} = G \otimes I , \tag{21}$$

$I \in R_{2n\times 2n}$ – одинична матриця, $\tilde{G} \in R_{4n^2\times 2mn}$.

$$k_0 = \begin{bmatrix} K_{1*}^T \\ K_{2*}^T \\ \ldots \\ K_{m*}^T \end{bmatrix}, \quad f_0 + q_0 = \begin{bmatrix} F_{1*}^T + Q_{1*}^T \\ F_{2*}^T + Q_{2*}^T \\ \ldots \\ F_{2n*}^T + Q_{2n*}^T \end{bmatrix}, \tag{22}$$

K_{i*}, $F_{i*} + Q_{i*}$ – i -ий рядок відповідної матриці.

$$k_0 \in R_{2mn\times 1}, \quad f_0 + q_0 \in R_{4n^2\times 1} .$$

Система (20) має $4n^2$ рівнянь з $2mn$ невідомими для матриці K_0 та з $2n^2 - n$ невідомими для матриці Q_0. З іншого боку, якщо (5) розв'язувати безпосередньо, число рівнянь для знаходження компонент матриці K_0 буде $2n^2 + n$ в силу симетричності правої та лівої частин рівності. Отже, у випадку, коли $2mn > 2n^2 + n$, можна $2mn - \left(2n^2 + n\right)$ компонент задати самостійно. Тоді загальна кількість невідомих для K_0 та Q_0 буде дорівнювати $2n^2 + n + 2n^2 - n = 4n^2$, що співпадає з кількістю рівнянь.

Для рівняння, записаного у вигляді (20), діють відомі умови існування розв'язку [3]. А саме: необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь є рівність рангу матриці, яка стоїть при невідомих, та рангу розширеної матриці. У нашому випадку ця умова запишеться у вигляді

$$rang\left(\tilde{G}\right) = rang\left(\tilde{G}/\left(f_0 + q_0\right)\right), \tag{23}$$

де $\tilde{G}/\left(f_0 + q_0\right)$ – розширена матриця системи, отримана додаванням стовпця $f_0 + q_0$ до матриці $\tilde{G}$.

Скориставшись формулою [3] $rang(A \otimes B) = rang(A) rang(B)$, будемо мати

$$rang\left(\tilde{G}\right) = rang(G) rang(I) = 2n \cdot rang(G). \tag{24}$$

Отже, необхідна і достатня умова існування розв'язку рівняння (20) має вигляд

$$rang\left(\tilde{G}/\left(f_0 + q_0\right)\right) = 2n \cdot rang(G). \tag{25}$$

ПРИКЛАДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ВЕКТОРА КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ

Приклад 1. Задана система (1) при $2n = 2$, $m = 2$, $F_0^T \neq -F_0$. Знайти матрицю керування K_0 таку, що $F_0 - GK_0 = -\left(F_0 - GK_0\right)^T$.

Для цього випадку у загальному вигляді матриці F_0, G, K_0 запишуться так:

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Застосуємо два підходи до пошуку K_0: 1) безпосереднє розв'язання рівняння (5); 2) використання кронекерівського добутку.

1) При безпосередньому розв'язку (5), в силу симетричності правої та лівої частин рівності, маємо систему трьох рівнянь для знаходження невідомих компонент матриці K_0

$$\begin{cases} g_{11}k_{11} + g_{12}k_{21} - f_{11} = 0, \\ g_{11}k_{12} + g_{12}k_{22} + g_{21}k_{11} + g_{22}k_{21} - f_{12} - f_{21} = 0, \\ g_{21}k_{12} + g_{22}k_{22} - f_{22} = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Якщо покласти $k_{22} = 0$, отримаємо наступні значення шуканих елементів

$$k_{11} = \frac{-g_{12}g_{21}f_{12} - g_{12}g_{21}f_{21} + g_{12}g_{11}f_{22} + g_{21}g_{22}f_{11}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})},$$

$$k_{12} = \frac{f_{22}}{g_{21}}, \tag{28}$$

$$k_{21} = \frac{-g_{21}^2 f_{11} + g_{21}g_{11}f_{12} + g_{21}g_{11}f_{21} - g_{11}^2 f_{22}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})}.$$

2) При використанні другого підходу задамо кососиметричну матрицю

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & q_{12} \\ -q_{12} & 0 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

У розгорнутому вигляді рівняння (20) запишеться наступним чином

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & g_{12} \\ g_{21} & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & g_{21} & 0 & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} + q_{12} \\ f_{21} - q_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Умова (23) виконується, а саме

$$rang(\tilde{G}) = rang(\tilde{G}/(f_0 + q_0)) = 4, \tag{31}$$

а значить існує розв'язок рівняння. Знайдемо його, але спочатку згадаємо, що кількість компонент матриці K_0, які можна знайти з системи, дорівнює $2n^2 + n = 3$, а для матриці Q_0 – $2n^2 - n = 1$. Задамо, як і в попередньому розв'язку, $k_{22} = 0$, та отримаємо значення невідомих елементів

$$k_{11} = \frac{-g_{12}g_{21}f_{12} - g_{12}g_{21}f_{21} + g_{12}g_{11}f_{22} + g_{21}g_{22}f_{11}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})},$$

$$k_{12} = \frac{f_{22}}{g_{21}},$$

$$k_{21} = \frac{-g_{21}^2 f_{11} + g_{21}g_{11}f_{12} + g_{21}g_{11}f_{21} - g_{11}^2 f_{22}}{g_{21}(g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})}, \tag{32}$$

$$q_{12} = \frac{g_{11}f_{22} - g_{21}f_{12}}{g_{21}}.$$

Як бачимо, значення компонент матриці K_0 з (32) та (28) повністю співпадають.

Приклад 2. Нехай для системи (1) $2n = 2$, $m = 1$. Тоді загальний вигляд матриць F_0, G, K_0 наступний

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Застосуємо три підходи: 1) безпосереднє розв'язання рівняння (5); 2) використання результатів, що одержані в 1); 3) знаходження найкращого наближення згідно з методом найменших квадратів.

1) При безпосередньому розв'язку рівняння (5) отримаємо перевизначену систему трьох рівнянь з двома невідомими, а саме

$$\begin{cases} g_{11}k_{11} - f_{11} = 0, \\ g_{11}k_{12} + g_{21}k_{11} - f_{12} - f_{21} = 0, \\ g_{21}k_{12} - f_{22} = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Розв'язок цієї системи існує тільки при накладенні додаткових умов на елементи матриць F_0, G, тобто у частковому випадку.

2) Для застосування другого підходу обчислимо $\tilde{G}$ згідно з (21)

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{11} \\ g_{21} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

та запишемо розширену матрицю $\tilde{G}/(f_0 + q_0)$ з урахуванням, що Q_0 має вигляд (29)

$$\tilde{G}/(f_0 + q_0) = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & f_{11} \\ 0 & g_{11} & f_{12} + q_{12} \\ g_{21} & 0 & f_{21} - q_{12} \\ 0 & g_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Як бачимо, що у загальному вигляді ранги цих матриць не співпадають, а саме $rang(\tilde{G}) = rang(G) rang(I) = 1 \cdot 2 = 2$, а $rang(\tilde{G}/(f_0 + q_0)) = 3$, тобто умова (23) не виконана.

Розглянемо окремі випадки. Нехай

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ g_{21} \end{bmatrix}, \tag{37}$$

тоді

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{21} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}/(f_0 + q_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{12} + q_{12} \\ g_{21} & 0 & f_{21} - q_{12} \\ 0 & g_{21} & f_{22} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Якщо $q_{12} = -f_{12}$, ранги матриць будуть однакові, а рівняння (20) у розгорнутій формі запишеться так

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g_{21} & 0 \\ 0 & g_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{21} + f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}, \tag{39}$$

звідки

$$k_{11} = \frac{f_{21} + f_{12}}{g_{21}}, \quad k_{12} = \frac{f_{22}}{g_{21}}. \tag{40}$$

Такі ж результати матимемо, якщо безпосередньо розв'яжемо рівняння (5) за умови $f_{11} = 0$, $g_{11} = 0$.

3) Розглянемо ще один спосіб знаходження розв'язку рівняння (9). Згідно з методом найменших квадратів, найкраще наближення розв'язку для рівняння (9) визначається формулою [8]

$$K_0^0 = G^+ \cdot (F_0 + Q_0), \tag{41}$$

де G^+ – псевдообернена матриця для G.

З [8]

$$G^+ = C^+ \cdot B^+ = C^* \left(CC^*\right)^{-1} \left(B^* B\right)^{-1} B^*, \tag{42}$$

де $G = C \cdot B$ – скелетний розклад матриці.

Обчисливши за формулою (41) значення K_0^0 і підставивши його в (9), знайдемо значення елементів матриці Q_0, за яких отримана система є тотожністю, або доведемо, що при заданих матрицях F_0 і G рішення K_0 не існує.

Отже, система (9) має вигляд

$$\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12}+q_{12} \\ f_{21}-q_{12} & f_{22} \end{bmatrix}. \tag{43}$$

За формулою (42)

$$G^{+} = \begin{bmatrix} \dfrac{g_{11}}{g_{11}^2+g_{21}^2} & \dfrac{g_{21}}{g_{11}^2+g_{21}^2} \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Підставляючи його в (41), отримаємо

$$K_0^0 = \begin{bmatrix} \dfrac{g_{11}f_{11}}{g_{11}^2+g_{21}^2} + \dfrac{g_{21}(f_{21}-q_{12})}{g_{11}^2+g_{21}^2} & \dfrac{g_{11}(f_{12}+q_{12})}{g_{11}^2+g_{21}^2} + \dfrac{g_{21}f_{22}}{g_{11}^2+g_{21}^2} \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Для порівняння відповідей покладемо, як і в прикладі з першого пункту, $f_{11}=0$, та підставимо знайдене K_0^0 в рівняння (43). Отримаємо наступну систему

$$\begin{gathered} \frac{g_{11}g_{21}(f_{21}-q_{12})}{g_{11}^2+g_{21}^2} = 0, \\ \frac{g_{11}^2(f_{12}+q_{12}) + g_{11}g_{21}f_{22}}{g_{11}^2+g_{21}^2} = f_{12}+q_{12}, \\ \frac{g_{21}^2(f_{21}-q_{12})}{g_{11}^2+g_{21}^2} = f_{21}-q_{12}, \\ \frac{g_{11}g_{21}(f_{12}+q_{12}) + g_{21}^2 f_{22}}{g_{11}^2+g_{21}^2} = f_{22}. \end{gathered} \tag{46}$$

Розв’язок існує у двох випадках

1) якщо $g_{11}=0$, тоді $q_{12}=-f_{12}$ і $k_{11}=\dfrac{f_{21}+f_{12}}{g_{21}}$, $k_{12}=\dfrac{f_{22}}{g_{21}}$, що повністю співпадає з (19) та (40);

2) якщо $g_{21}=0$, тоді $q_{12}=f_{21}$, $f_{22}=0$ і $k_{11}=0$, $k_{12}=\dfrac{f_{12}+f_{21}}{g_{11}}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Лекции по теории гироскопов / А. Ю. Ишлинский, В. И.Борзов, Н. П.Степаненко. — М. : Изд-во МГУ, 1983. — 248 с.
2. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов / Б. В. Булгаков. — М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 1955. — 355 с.
3. Новицький В. В. Гіроскопічний компас як майже консервативна спостережна і керована механічна система / В. В. Новицький, І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук // Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012) : межд. конф.; Севастополь, 10-14 сентября 2012 г. / отв. ред. О.В. Анашкин ; Таврический нац. ун-т имени В.И. Вернадского. — Симферополь : ДИАЙПИ, 2012. — С. 134–135.
4. Новицький В. В. Формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв’язку / В. В. Новицький, І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук // Dynamical system modeling and stability investigation : XVI International Conference: Modelling and stability : Abstracts of conf. reports, Kiev, Ukraine, 29-31 may / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics [etal.] — Kiev, 2013. — С. 376 — (Вісник Київського національного ун-ту імені Т. Шевченка).
5. Коломійчук О. П. Умови формування майже консервативної динамічної системи за допомогою зворотного зв’язку / О. П. Коломійчук, В. В. Новицький, І. Ф. Святовець // «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функції та їх застосування», 23-30 червня 2013 р. Севастополь, Україна. — С. 304.
6. Barnett S. Introduction to mathematical control theory / S. Barnett, R. G. Cameron. — Oxford, 1985. — 404 p.
7. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М. : Наука, 1978. — 280 с.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1967. — 576 с.