UDC 519.832.3+519.711.2+519.615.7

REDUCING THE m-PARAMETER N-MODEL UNCERTAINTY TO A PROBABILISTIC DISTRIBUTION OVER MODELS THROUGH HAVING UNIFIED MODEL OUTPUTS

Romanuke V. V., associate professor, c. t. s., associate professor

Khmelnitskiy National University

The study concerns the problem of selecting the single model for working and processing on an object data certainly, what is needed when the object is described or identified in more than one mathematical model. Any pattern is regarded unavailable, occurring widely on the prime stage of the object investigation. Thus the being concerned problem cannot be resolved as a classical optimization. And then the only way to optimize and to select the optimal model is to determine a probabilistic measure over the set of the mathematical models. Without preliminary object identification the most non-contradictory method of the plain definition of that probabilistic measure is the minimax principle, giving the second player optimal strategy as such measure. The target of the study is to state a probabilistic distribution over those models, considering them equi-output-parametrized. For that there is the job of unifying all the parameters of each model into a parametrical unit, whereupon this unit is going to be associated with the appropriate probability from the probabilistic distribution in the second player optimal strategy, generated by the minimax principle. On this ground there has been suggested a method of reducing the uncertainty in modeling mathematically the object with m parameters, when there are N models for fulfilling this and the pattern data are unavailable. Uncertainty reduction is made through determining the minimax probabilistic distribution over those models by unifying all the parameters of each model into a parametrical unit with its probability. There have been stated three ways of such unification, restated explicitly for the cases when the number of mathematical models equals to three or four.

Key words: uncertainty, mathematical model, minimax probabilistic distribution, minimaxed expectation value.

Романюк В. В. СУЖЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ N МОДЕЛЕЙ С m ПАРАМЕТРАМИ К ВЕРОЯТНОСТНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ НА МОДЕЛЯХ ПОСРЕДСТВОМ ОБЪЕДИНЕНИЯ МОДЕЛЬНЫХ ВЫХОДОВ / Хмельницкий национальный университет, Украина

В исследовании рассматривается проблема выбора единственной модели для детерминированной работы с объектными данными, что необходимо в случаях, когда объект описывается или идентифицируется более чем одной математической моделью. При этом никакого образца в наличии не имеется, что случается повсеместно на начальной стадии исследования объекта. Соответственно, рассматриваемая проблема не может быть разрешена на основе классической оптимизации. И тогда единственным способом оптимизировать и выбирать оптимальную модель является определение вероятностной меры на множестве математических моделей. Без предварительной идентификации объекта наиболее непротиворечивым методом простого задания этой вероятностной меры является принцип минимакса, предоставляющий оптимальную стратегию второго игрока в качестве такой меры. Цель исследования состоит в описании вероятностного распределения на моделях, принимая то, что у них равное количество выходных параметров. Для этого следует объединять все параметры каждой модели в некую параметрическую единицу, после чего эта единица будет ассоциирована с соответствующей вероятностью из вероятностного распределения в оптимальной стратегии второго игрока, получаемой по принципу минимакса. На этой основе предложен метод сужения неопределённости в математическом моделировании объекта с m параметрами, когда для выполнения этого имеется N моделей, а опорные данные недоступны. Сужение неопределённости осуществляется с помощью определения минимаксного вероятностного распределения на этих моделях при объединении всех параметров каждой модели в некую параметрическую единицу со своей вероятностью. Изложено три способа такого объединения, которые выписаны явно для случаев, когда число математических моделей равняется трём или четырём.

Ключевые слова: неопределённость, математическая модель, минимаксное вероятностное распределение, ожидаемое значение по минимаксу.

Романюк В. В. ЗВУЖЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ N МОДЕЛЕЙ З m ПАРАМЕТРАМИ ДО ЙМОВІРНІСНОГО РОЗПОДІЛУ НА МОДЕЛЯХ ЧЕРЕЗ ОБ’ЄДНАННЯ МОДЕЛЬНИХ ВИХОДІВ / Хмельницький національний університет, Україна

У дослідженні розглядається проблема вибору єдиної моделі для детермінованої роботи з об’єктними даними, що необхідно у випадках, коли об’єкт описується або ідентифікується більш ніж однією математичною моделлю. При цьому ніякого зразка в наявності немає, що трапляється повсякчасно на початковій стадії дослідження об’єкта. Відповідно розглянута проблема не може бути вирішена на основі класичної оптимізації. І тоді єдиним способом оптимізувати і вибирати оптимальну модель є визначення імовірнісної міри на множині математичних моделей. Без попередньої ідентифікації об’єкта найбільш несуперечливим методом простого завдання цієї імовірнісної міри є принцип мінімаксу, що надає оптимальну стратегію другого гравця у якості такої міри. Мета дослідження полягає в описі імовірнісного розподілу на моделях, приймаючи те, що у них рівна кількість вихідних параметрів. Для цього слід об’єднувати всі параметри кожної моделі у деяку параметричну одиницю, після чого ця одиниця буде асоційована з відповідною імовірністю з імовірнісного розподілу в оптимальній стратегії другого гравця, одержуваної за принципом мінімаксу. На цій основі запропоновано метод звуження невизначеності у математичному моделюванні об'єкта з m параметрами, коли для виконання цього є N моделей, а опорні дані недоступні. Звуження невизначеності здійснюється за допомогою визначення мінімаксного ймовірнісного розподілу на цих моделях при об'єднанні всіх параметрів кожної моделі у деяку параметричну одиницю зі своєю імовірністю. Викладено три способи такого об'єднання, котрі виписані явно для випадків, коли число математичних моделей дорівнює трьом або чотирьом.

Ключові слова: невизначеність, математична модель, мінімаксний імовірнісний розподіл, очікуване значення за мінімаксом.

PREAMBLING THE PROBLEM

When an object of investigation is described or identified in more than one mathematical model, then the investigator collides with the problem of selecting the single model for working and processing on the object data certainly [1, 2]. However, this problem cannot be resolved as a classical optimization for the case neither of differently classified models, nor of equal precision (error rate) models. Therefore in every watch moment or sample the arising model uncertainty should be reduced into some unifying model [3, 4].

SURVEYING THE PROBLEM RESOLUTION WAYS

The classical optimization resolves the model uncertainty problem just if there are pattern values of the object parameters, that could help in getting the models classified, comparing also their outputs to the pattern ones [2, 3, 5, 6]. But if there is no pattern at all, what occurs widely on the prime stage of the object investigation [7, 8], then the only way to optimize and to select the optimal model is to determine or to define a probabilistic measure over the set of the mathematical models [9, 10]. Nevertheless, determining such measure requires at least some pattern data, might be obtained during the initial process of watching or identifying the object. So without preliminary object identification there is an open discussion about defining a probabilistic measure over the set of the object models. And the most non-contradictory method of the plain definition of that probabilistic measure is the minimax principle [11, 12], giving the second player optimal strategy (SPOS) as such measure. This method had been implemented for cases with three and four mathematical models [13, 14], though they were pre-stated to produce just the single output parameter [2, 3, 9, 10, 15, 16].

TARGET AND JOB

May there be N non-identified mathematical models, each of which gives the same number of output parameters. The target of the initiated investigation is to state a probabilistic distribution over these models, considering them equi-output-parametrized [17, 18]. For that there is the job of unifying all the parameters of each model into a parametrical unit, whereupon this unit is going to be associated with the appropriate probability from the probabilistic distribution in SPOS, generated by the minimax principle [11, 12, 19, 20].

UNCERTAINTY REDUCTION

In common generality, say that the j-th mathematical model has its m output parameters, $m \in \mathbb{N}$, and $j = \overline{1, N}$ by $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. The case $N = 2$ under condition of the pattern data unavailability is resolved only into equiprobable distribution $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, because there cannot be verified or refuted any nonobservational hypothesis on the two-element distribution.

As every mathematical model has the same number of output parameters, then the models may be separated by those parameters. This means that for the k-th parameter there should be found a probabilistic distribution over its N output values $\left\{ v_j^{\langle k \rangle} \right\}_{j=1}^{N}$, where $v_j^{\langle k \rangle}$ is the fixed value of the k-th parameter of the j-th mathematical model. Due to the pattern data unavailability, such a probabilistic distribution for $N \in \{3, 4\}$ and $m = 1$ was determined [13, 14] in SPOS of the 3×3 and 4×4 games with the matrix

$$\mathbf{H}_1 = \left(h_{ij}^{\langle 1 \rangle} \right)_{N \times N} \text{ for } h_{ij}^{\langle 1 \rangle} = \left| v_i^{\langle 1 \rangle} - v_j^{\langle 1 \rangle} \right| \text{ at } i = \overline{1, N} \text{ and } j = \overline{1, N} \,. \tag{1}$$

In essence, the matrix $\mathbf{H}_1$ there [13, 14] had appeared the function of two [13] and three [14] variables, which are the distances

$$\left\{ h_{12}^{\langle 1 \rangle}, h_{23}^{\langle 1 \rangle} \right\} \text{ and } \left\{ h_{12}^{\langle 1 \rangle}, h_{23}^{\langle 1 \rangle}, h_{34}^{\langle 1 \rangle} \right\} \tag{2}$$

correspondingly. Consequently, three-element and four-element SPOS were the functions of the distances (2), although there was the continuum of SPOS in both cases, and the single SPOS was determined as the nearest probabilistic distribution to the equiprobable distribution: some $\mathbb{R}^3$-point $\begin{bmatrix} \breve{q}_1^{\langle 1 \rangle} & \breve{q}_2^{\langle 1 \rangle} & \breve{q}_3^{\langle 1 \rangle} \end{bmatrix}$ was nearest to

$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ and some $\mathbb{R}^4$-point $\begin{bmatrix} \breve{q}_1^{\langle 1 \rangle} & \breve{q}_2^{\langle 1 \rangle} & \breve{q}_3^{\langle 1 \rangle} & \breve{q}_4^{\langle 1 \rangle} \end{bmatrix}$ was nearest to $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ correspondingly by the least-squares method.

Up to now the set of SPOS in the game with the matrix (1), being the function of variables $\left\{ h_{j-1\,j}^{\langle 1 \rangle} \right\}_{j=2}^{N}$, is not generally found for the integer $N > 4$. But suppose that the k-th matrix

$$\mathbf{H}_k = \left(h_{ij}^{\langle k \rangle} \right)_{N \times N} \quad \text{for} \quad h_{ij}^{\langle k \rangle} = \left| v_i^{\langle k \rangle} - v_j^{\langle k \rangle} \right| \quad \text{at} \quad i = \overline{1, N} \quad \text{and} \quad j = \overline{1, N} \quad \text{by} \quad k = \overline{1, m} \tag{3}$$

is constructed for the k-th parameter of N models with its values $\left\{ v_j^{\langle k \rangle} \right\}_{j=1}^{N}$, being the function of the variables $\left\{ h_{j-1\,j}^{\langle k \rangle} \right\}_{j=2}^{N}$. And suppose that the set of SPOS in the game with the matrix (3) is already found and narrowed to a probabilistic distribution $\left\{ \breve{q}_j^{\langle k \rangle} \right\}_{j=1}^{N}$, being the nearest to the equiprobable distribution $\left\{ N^{-1} \right\}_{j=1}^{N}$, where $\breve{q}_j^{\langle k \rangle}$ is the probability of selecting the value $v_j^{\langle k \rangle}$ of the k-th parameter from the j-th mathematical model, $\sum_{j=1}^{N} \breve{q}_j^{\langle k \rangle} = 1$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Then it remains only to unify the probabilities along each model through its parameters, what lets to state as an $\mathbb{R}^N$-point the probabilistic distribution $\left\{ \breve{q}_j \right\}_{j=1}^{N}$ over N models, where $\breve{q}_j$ is the probability of selecting the j-th mathematical model with its values $\left\{ v_j^{\langle k \rangle} \right\}_{k=1}^{m}$.

The probabilities $\left\{ \breve{q}_j^{\langle k \rangle} \right\}_{k=1}^{m}$ along the j-th model may be unified only through summing them up or putting them into product. The influence of parameters is unknown, so their unification into the parametrical unit cannot be accomplished with appropriate weights, unless they all are equal, where minimax approach is ignored as the problem might have been ultra-minimaxed. Thus in summing,

$$\breve{q}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \breve{q}_j^{\langle k \rangle} \quad \text{for} \quad j = \overline{1, N} \tag{4}$$

and in multiplying,

$$\breve{q}_j = \frac{\prod_{k=1}^{m} \breve{q}_j^{\langle k \rangle}}{\sum_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{m} \breve{q}_i^{\langle k \rangle}} \quad \text{for} \quad j = \overline{1, N}\,. \tag{5}$$

Clearly, that (5) can be generalized to

$$\breve{q}_j = \frac{\left(\prod_{k=1}^{m} \breve{q}_j^{\langle k \rangle} \right)^{\frac{1}{m}}}{\sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{m} \breve{q}_i^{\langle k \rangle} \right)^{\frac{1}{m}}} \quad \text{for} \quad j = \overline{1, N} \tag{6}$$

and (6) is generalized finally to

$$\breve{q}_j = \frac{\left(\prod_{k=1}^{m} \breve{q}_j^{\langle k \rangle} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\sum_{i=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{m} \breve{q}_i^{\langle k \rangle} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{by} \quad \gamma > 0 \quad \text{for} \quad j = \overline{1, N}\,. \tag{7}$$

The summation in (4) can be generalized in two ways:

$$\breve{q}_j = \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} \breve{q}_j^{\langle k\rangle}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{m} \breve{q}_i^{\langle k\rangle}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} \text{ by } \gamma > 0 \text{ for } j = \overline{1, N} \tag{8}$$

and

$$\breve{q}_j = \frac{\sum_{k=1}^{m}\left(\breve{q}_j^{\langle k\rangle}\right)^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\left(\breve{q}_i^{\langle k\rangle}\right)^{\gamma}} \text{ by } \gamma > 0 \text{ for } j = \overline{1, N}\,. \tag{9}$$

Anyone can ensure oneself that for any of (4) — (9) here is that $\sum_{j=1}^{N} \breve{q}_j = 1$.

Surely, for $N = 3$ and $N = 4$ the statements (7) — (9) are restated explicitly due to [13, 14] and denotations

$$h_{12}^{\langle k\rangle} = a_k\,,\ \ h_{23}^{\langle k\rangle} = b_k\,,\ \ h_{34}^{\langle k\rangle} = c_k\,.$$

Essentially, for $N = 3$ there are

$$\breve{q}_1^{\langle k\rangle} = \frac{2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2}{4\left(a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k\right)}\,,\ \ \breve{q}_2^{\langle k\rangle} = \frac{a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2}{4\left(a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k\right)}\,,\ \ \breve{q}_3^{\langle k\rangle} = \frac{a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2}{4\left(a_k^2 + b_k^2 + a_k b_k\right)} \tag{10}$$

by $k = \overline{1, m}$ and

$$d_3^{\langle 7\rangle} = \left(\prod_{k=1}^{m}\left(2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{11}$$

$$\breve{q}_1 = \frac{1}{d_3^{\langle 7\rangle}}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \ \breve{q}_2 = \frac{1}{d_3^{\langle 7\rangle}}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \ \breve{q}_3 = \frac{1}{d_3^{\langle 7\rangle}}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{12}$$

as (7),

$$d_3^{\langle 8\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{m}\left(2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{13}$$

$$\breve{q}_1 = \frac{1}{d_3^{\langle 8\rangle}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \ \breve{q}_2 = \frac{1}{d_3^{\langle 8\rangle}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \ \breve{q}_3 = \frac{1}{d_3^{\langle 8\rangle}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{14}$$

as (8),

$$d_3^{\langle 9\rangle} = \sum_{k=1}^{m}\left(2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right)^{\gamma} + \sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2\right)^{\gamma} + \sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2\right)^{\gamma}, \tag{15}$$

$$\breve{q}_1 = \frac{1}{d_3^{\langle 9\rangle}}\sum_{k=1}^{m}\left(2a_k^2 + a_k b_k + b_k^2\right)^{\gamma},\ \ \breve{q}_2 = \frac{1}{d_3^{\langle 9\rangle}}\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2\right)^{\gamma},\ \ \breve{q}_3 = \frac{1}{d_3^{\langle 9\rangle}}\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2 + a_k b_k + 2b_k^2\right)^{\gamma} \tag{16}$$

as (9); and for $N = 4$ there are

$$\breve{q}_1^{\langle k\rangle} = \frac{3a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k}{2\left(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k\right)}\,,\ \ \breve{q}_2^{\langle k\rangle} = \frac{a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + 3a_k b_k + b_k c_k + 2a_k c_k}{2\left(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k\right)}\,,$$

$$\breve{q}_3^{\langle k\rangle} = \frac{a_k^2 + 2b_k^2 + c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k + 2a_k c_k}{2\left(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k\right)}\,,\ \ \breve{q}_4^{\langle k\rangle} = \frac{a_k^2 + 2b_k^2 + 3c_k^2 + a_k b_k + 3b_k c_k}{2\left(4b_k^2 + 3a_k^2 + 3c_k^2 + 4a_k b_k + 4b_k c_k + 2a_k c_k\right)} \tag{17}$$

by $k = \overline{1, m}$ and

$$d_4^{\langle 7\rangle}=\left(\prod_{k=1}^{m}\left(3a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}+$$

$$+\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+3c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{18}$$

$$\breve{q}_1=\frac{1}{d_4^{\langle 7\rangle}}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(3a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \breve{q}_2=\frac{1}{d_4^{\langle 7\rangle}}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\breve{q}_3=\frac{1}{d_4^{\langle 7\rangle}}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \breve{q}_4=\frac{1}{d_4^{\langle 7\rangle}}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+3c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{19}$$

as (7),

$$d_4^{\langle 8\rangle}=\left(\sum_{k=1}^{m}\left(3a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+3c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{20}$$

$$\breve{q}_1=\frac{1}{d_4^{\langle 8\rangle}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(3a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \breve{q}_2=\frac{1}{d_4^{\langle 8\rangle}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\breve{q}_3=\frac{1}{d_4^{\langle 8\rangle}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k+2a_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}},\ \breve{q}_4=\frac{1}{d_4^{\langle 8\rangle}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+3c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k\right)\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{21}$$

as (8),

$$d_4^{\langle 9\rangle}=\sum_{k=1}^{m}\left(3a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k\right)^{\gamma}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k+2a_kc_k\right)^{\gamma}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k+2a_kc_k\right)^{\gamma}+\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+3c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k\right)^{\gamma}, \tag{22}$$

$$\breve{q}_1=\frac{1}{d_4^{\langle 9\rangle}}\sum_{k=1}^{m}\left(3a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k\right)^{\gamma},\ \breve{q}_2=\frac{1}{d_4^{\langle 9\rangle}}\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+3a_kb_k+b_kc_k+2a_kc_k\right)^{\gamma},$$

$$\breve{q}_3=\frac{1}{d_4^{\langle 9\rangle}}\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k+2a_kc_k\right)^{\gamma},\ \breve{q}_4=\frac{1}{d_4^{\langle 9\rangle}}\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+2b_k^2+3c_k^2+a_kb_k+3b_kc_k\right)^{\gamma} \tag{23}$$

as (9).

And for many cases of m-parameter model uncertainties the statements (11) — (16) and (18) — (23) are sufficient, inasmuch as five and more mathematical models of the object identification or description is an uncommon rarity.

INFERENCE

The reduced m-parameter N-model uncertainty with the fixed data $\left\{v_j^{\langle k\rangle}\right\}_{j=1}^{N}$ into the probabilistic distribution $\left\{\breve{q}_j\right\}_{j=1}^{N}$ of (7) — (9) may be applied strictly in using the j-th mathematical model with probability $\breve{q}_j$ every time, when there are the fixed data $\left\{v_j^{\langle k\rangle}\right\}_{j=1}^{N}$ on the object event or its watch moment. This particularly is very hard, and investigator can apply the distribution of probabilities $\left\{\breve{q}_j\right\}_{j=1}^{N}$ nonstrictly, calculating either the minimaxed expectation values

$$\tilde{v}^{\langle k\rangle}=\sum_{j=1}^{N}\breve{q}_j v_j^{\langle k\rangle}\quad \forall\ k=\overline{1,\,m}$$

after parametric unification or the minimaxed expectation values

$$\tilde{v}^{\langle k\rangle}=\sum_{j=1}^{N}\breve{q}_j^{\langle k\rangle} v_j^{\langle k\rangle}\quad \forall\ k=\overline{1,\,m}\,. \tag{24}$$

For (24) with $N=3$ and $N=4$ the statements (10) and (17) are valid. In advancing the process of watching the object there will be acquired the nonnegative weights $\left\{\left\{w_j^{\langle k\rangle}\right\}_{j=1}^{N}\right\}_{k=1}^{m}$ which help to determine the k-th probabilistic measure from probabilities $\left\{\mu_j^{\langle k\rangle}\right\}_{j=1}^{N}$ over the set of N mathematical models, where

$$\mu_j^{\langle k\rangle}=\frac{w_j^{\langle k\rangle}}{\sum_{i=1}^{N}w_i^{\langle k\rangle}}\quad \text{for}\quad j=\overline{1,\,N}\quad \text{by}\quad k=\overline{1,\,m}\,.$$

And then the probability $\mu_j^{\langle k\rangle}$ should be used in the same way as the probability $\breve{q}_j^{\langle k\rangle}$.

REFERENCES

1. Shen-tu H. Feedback structure based entropy approach for multiple-model estimation / H. Shen-tu, A. Xue, Y. Guo // Chinese Journal of Aeronautics. — 2013. — Volume 26, Issue 6. — P. 1506 — 1516.
2. Jeong C. Bayesian multiple structural change-points estimation in time series models with genetic algorithm / C. Jeong, J. Kim // Journal of the Korean Statistical Society. — 2013. — Volume 42, Issue 4. — P. 459 — 468.
3. Mechelen I. V. A unifying model involving a categorical and/or dimensional reduction for multimode data / I. V. Mechelen, J. Schepers // Computational Statistics & Data Analysis. — 2007. — Volume 52, Issue 1. — P. 537 — 549.
4. Gómez V. U. Ring: A unifying meta-model and infrastructure for Smalltalk source code analysis tools / V. U. Gómez, S. Ducasse, T. D'Hondt // Computer Languages, Systems & Structures. — 2012. — Volume 38, Issue 1. — P. 44 — 60.
5. Ocampo C. J. Field exploration of coupled hydrological and biogeochemical catchment responses and a unifying perceptual model / C. J. Ocampo, M. Sivapalan, C. E. Oldham // Advances in Water Resources. — 2006. — Volume 29, Issue 2. — P. 161 — 180.
6. Kask K. Unifying tree decompositions for reasoning in graphical models / K. Kask, R. Dechter, J. Larrosa, A. Dechter // Artificial Intelligence. — 2005. — Volume 166, Issues 1 — 2. — P. 165 — 193.
7. Miyamichi J. Some maximal absolutely unstable sign patterns of 4×4 matrices / J. Miyamichi // Systems & Control Letters. — 1982. — Volume 1, Issue 6. — P. 404 — 408.
8. Xu D. Estimation of periodic-like motions of chaotic evolutions using detected unstable periodic patterns / D. Xu, Z. Li, S. R. Bishop, U. Galvanetto // Pattern Recognition Letters. — 2002. — Volume 23, Issues 1 — 3. — P. 245 — 252.
9. Mahsuli M. Sensitivity measures for optimal mitigation of risk and reduction of model uncertainty / M. Mahsuli, T. Haukaas // Reliability Engineering & System Safety. — 2013. — Volume 117. — P. 9 — 20.
10. Kwiatkowska M. Compositional probabilistic verification through multi-objective model checking / M. Kwiatkowska, G. Norman, D. Parker, H. Qu // Information and Computation. — 2013. — Volume 232. — P. 38 — 65.
11. Riis M. Applying the minimax criterion in stochastic recourse programs / M. Riis, K. A. Andersen // European Journal of Operational Research. — 2005. — Volume 165, Issue 3. — P. 569 — 584.
12. Huang M.-N. L. Minimax and maximin efficient designs for estimating the location-shift parameter of parallel models with dual responses / M.-N. L. Huang, C.-S. Lin // Journal of Multivariate Analysis. — 2006. — Volume 97, Issue 1. — P. 198 — 210.
13. Романюк В. В. Единственное решение в общей строгой задаче устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости с принципом гарантировано минимальных абсолютных

отклонений / В. В. Романюк // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. — 2013. — № 2. — С. 176 — 182.

14. Romanuke V. V. Selection of quasiequiprobable distribution from continuum of optimal strategies to the generalized strictly formulated problem of removing single-parameter four-model uncertainty within assuredly minimized deviation approach / V. V. Romanuke // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2013. — № 1. — С. 93 — 110.
15. Ding J. Parameter identification of multi-input, single-output systems based on FIR models and least squares principle / J. Ding, F. Ding, S. Zhang // Applied Mathematics and Computation. — 2008. — Volume 197, Issue 1. — P. 297 — 305.
16. Liu Y. Multi-innovation stochastic gradient algorithm for multiple-input single-output systems using the auxiliary model / Y. Liu, Y. Xiao, X. Zhao // Applied Mathematics and Computation. — 2009. — Volume 215, Issue 4. — P. 1477 — 1483.
17. Xiang L. Hierarchical least squares algorithms for single-input multiple-output systems based on the auxiliary model / L. Xiang, L. Xie, Y. Liao, R. Ding // Mathematical and Computer Modelling. — 2010. — Volume 52, Issues 5 — 6. — P. 918 — 924.
18. Han Z. Real time prediction for converter gas tank levels based on multi-output least square support vector regressor / Z. Han, Y. Liu, J. Zhao, W. Wang // Control Engineering Practice. — 2012. — Volume 20, Issue 12. — P. 1400 — 1409.
19. Klemelä J. Lower bounds for the asymptotic minimax risk with spherical data / J. Klemelä // Journal of Statistical Planning and Inference. — 2003. — Volume 113, Issue 1. — P. 113 — 136.
20. Saha B. N. Image thresholding by variational minimax optimization / B. N. Saha, N. Ray // Pattern Recognition. — 2009. — Volume 42, Issue 5. — P. 843 — 856.

УДК 519.17

ПРО ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНОСТЬ ГРАФОВ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

[1]Семенюта М. Ф., к. ф.-м. н., доцент, [2]Петренюк Д. А., к. ф.-м. н.

[1]Кировоградская летная академия национального авиационного университета

[2]Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины

В статье проведено исследование структуры графов, не допускающих Фибоначчи грациозную разметку. Доказана теорема, исключающая определенный класс графов, из списка Фибоначчи грациозных графов. Получены результаты относительно Фибоначчи грациозности графа nC_m.

Ключевые слова: разметка графа, Фибоначчи грациозная разметка, Фибоначчи грациозный граф.

[1]Семенюта М. Ф., [2]Петренюк Д. А. ПРО ФІБОНАЧЧІ ГРАЦІОЗНІСТЬ ГРАФІВ ЦИКЛІЧНОЇ СТРУКТУРИ / [1]Кіровоградська льотна академія національного авіаційного університету, [2]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Україна

В статті проведено дослідження структури графів, що не допускають Фібоначчі граціозну розмітку. Доведена теорема, яка виключає певний клас графів зі списку Фібоначчі граціозних графів. Одержано результати відносно Фібоначчі граціозності графа nC_m.

Ключові слова: розмітка графа, Фібоначчі граціозна розмітка, Фібоначчі граціозний граф.

[1]Semenyuta M., [2]Petreniuk D. ON FIBONACCI GRACEFULNESS OF GRAPHS / [1]Kirovograd Flight Academy of National Aviation University, [2]Institute of Cybernetics named V.M. Glushkov of national Academy of Sciences of Ukraine

Relevancy of the subject is indicated in the paper, and some special cases of the general Fibonacci graceful graphs characterization problem are considered. In 1967 Alexander Rosa introduced β-labeling (which was later called gracious labeling) in connection with graph decomposition theory. The case when edge labeling of graph is a bijection from the edge set to the first q numbers of an arbitrary progression $\{a_i\}$, is a natural development of the graph gracefulness concept. The first instance when Fibonacci numbers were used as $\{a_i\}$ progression took place in 1983, but the papers showing the main results on the subject have been published in recent 8 years. In the present study unsolved problems are indicated by analyzing the papers. The