УДК 539.3

ДЕЙСТВИЕ НОРМАЛЬНОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗОК НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Александров И. А., аспирант, Матузко Ю. О., к. ф.-м. н., ст. преподаватель,
Приварников А. К., д. ф.-м. н., профессор

Запорожский национальный университет

Получено точное решение (в квадратурах) граничной задачи теории упругости о действии на многоугольную область границы однородного изотропного полупространства касательной нагрузки, направленной в одну сторону, и нормальной нагрузки, равномерно распределенных в области. Проведен анализ числовых результатов, обоснована их достоверность.

Ключевые слова: первая граничная задача теории упругости, упругое однородное изотропное полупространство, нормальная и касательная нагрузки, многоугольная область нагружения.

Александров І. О., Матузко Ю. О., Приварников А. К. ДІЯ НОРМАЛЬНОГО ТА ДОТИЧНОГО НАВАНТАЖЕНЬ НА ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР / Запорізький національний університет, Україна

Отримано точний розв’язок (у квадратурах) граничної задачі теорії пружності про дію на багатокутну область межі однорідного ізотропного півпростору дотичного навантаження, спрямованого в один бік, та нормального навантаження, які рівномірно розподілені в області. Проведено аналіз чисельних результатів, обґрунтована їх вірогідність.

Ключові слова: перша гранична задача теорії пружності, пружний однорідний ізотропний півпростір, нормальне та дотичне навантаження, багатокутна область навантаження.

Alexandrov I. A., Matuzko Yu. O., Privarnikov A. K. AN ELASTIC SEMISPACE UNDER THE NORMAL AND TANGENTIAL LOAD / Zaporizhzhya national university, Ukraine

In the case of finding of the stresses and the displacements in the automobile roads the road itself is considered to be an elastic multilayer semispace with the finite number of layers [1, 2]. The load, created by the wheel, consists of two components – the normal load and the tangential load. It is considered that these components are evenly distributed in the domain of the contact of the wheel with the road [2, 3]. It is convenient to consider the domain of the contact as the convex polygon. It is necessary to solve the problem of elasticity theory, connected with the action of the normal and the tangential loads, which are evenly distributed in the polygonal domain, on the elastic multilayer foundation. To evaluate the stresses and the displacements in the multilayer foundation with the required accuracy it is necessary to solve an analogical problem for the elastic homogeneous semispace [3, 4, 5]. Note that the solution for the polygonal domain 10 of the semispace has been obtained only for the case of the normal load [5]. This article gives the exact solution (in quadratures) of the problem connected with the action of the normal and the *tangential loads*, which are evenly distributed in the polygonal domain. The method of the solution is based on the principle of superposition and on the known solutions of Boussinesq problem and Cherutti problem, connected with the action of the normal and the tangential concentrated forces on the elastic homogeneous isotropic semispace. The stresses and the displacements in the semispace $z \geq 0$ have been given in the form of the double integrals over the polygonal domain. The subintegral functions can have the integrable singularity, if the point (x, y, z) belongs to the loading site. These singularities have been eliminated and the double integrals have been transformed into the one-dimensional integrals after the division of the loading site into the triangles with the common vertex at the point $(x, y, 0)$ and the change of the variables. The exact expressions for all subintegral functions of the one-dimensional integrals have been obtained. These functions have the derivatives of any order. That is why it is recommended to use Gauss quadrature formula of the highest accuracy degree for the approximate evaluation of the one-dimensional integrals with the help of the computer [8]. The numerical results for the case of the semispace under the normal and the tangential evenly distributed in the polygonal domain loads have been given in the paper. The normal loading is directed to the exterior of the semispace and the tangential loading is parallel to the side of the rectangle. The characteristic of the laws of the distribution of the stresses and the displacements in the elastic semispace corresponds to the physics. The stresses and the displacements in the semispace in the distance from the loading site have been compared with the corresponding stresses and displacements in the semispace under the concentrated forces. The concentrated forces are statically equivalent to the distributed loads, the forces act in the center of the rectangle. The proximity of the numerical values in the points of the semispace, which are remote from the load, substantiates the validity of the theoretical results, the calculating formulas and the numerical results.

Key words: the first boundary problem, the elastic homogeneous isotropic semispace, the normal and tangential load, the polygonal domain.

ВВЕДЕНИЕ

В расчетах автомобильных дорог на прочность и жесткость дорожная одежда рассматривается как упругое многослойное полупространство с конечным числом слоев [1, 2]. В большинстве случаев область контакта колеса с дорогой можно приближенно считать выпуклым многоугольником. Нагрузка на дорогу со стороны колеса имеет две составляющие – нормальную и касательную. Считается, что эти составляющие равномерно распределены в области контакта колеса с поверхностью дороги [2, 3]. Возникает потребность в решении задачи теории упругости о действии на многослойное упругое основание нормальной и касательной нагрузок, равномерно распределённых в произвольной многоугольной области. Для решения этой задачи необходимо предварительно решить аналогичную задачу для упругого однородного полупространства [3, 4, 5]. В данной работе точно решена (в квадратурах) задача о действии на упругое однородное изотропное полупространство нормальной и касательной нагрузок, равномерно распределенных в произвольной многоугольной области.

Анализ исследований и публикаций. Сформулированная задача была поставлена и решена для многослойного основания и упругого полупространства для частного случая области нагружения в форме круга [4]. Для многоугольной области нагружения делались попытки получить решение только для нормальной нагрузки [5]. Поэтому в практическом отношении задача об определении напряжений и перемещений в упругом однородном изотропном полупространстве, нагруженном нормальной и касательной нагрузками, равномерно распределенными в многоугольной области, остается неисследованной.

Цель работы. Получить точное решение поставленной задачи, предложить удобный способ численной реализации этого решения, обосновать достоверность расчетных формул и численных результатов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Упругое однородное изотропное полупространство отнесем к правой декартовой системе координат $Oxyz$ с началом O на границе. Ось z направим вглубь полупространства по нормали к граничной плоскости. На границу $z=0$ полупространства $z \ge 0$ действуют нормальная нагрузка интенсивности q, а также касательная нагрузка интенсивности τ. Нормальная нагрузка направлена в отрицательную сторону оси z, касательная – в положительную сторону оси x. Требуется определить напряжения и перемещения в произвольной точке полупространстве. Этой физической постановке задачи отвечает такая ее математическая постановка: требуется определить решение уравнений теории упругости в полупространстве $z \ge 0$, которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

при *z=0* $\sigma_{zz}\left(x,y,0\right)=\begin{cases} q,\ \left(x,y\right)\in D, \\ 0,\ \left(x,y\right)\notin D \end{cases}$ $\sigma_{xz}=\begin{cases} \tau,\ \left(x,y\right)\in D, \\ 0,\ \left(x,y\right)\notin D \end{cases}$ $\sigma_{yz}\left(x,y,0\right)=0$;

при $z\to\infty$ $u_x\left(x,y,z\right)\to 0$, $u_y\left(x,y,z\right)\to 0$, $u_z\left(x,y,z\right)\to 0$.

Здесь D – конечная многоугольная область границы полупространства, необязательно выпуклая.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Воспользуемся известными решениями задач Буссинеска и Черутти [4, 6] о действии на упругое однородное изотропное полупространство $z \le 0$ сосредоточенных сил Q и T, которые приложены в точке $\left(0,0,0\right)$. Сила Q направлена в отрицательную сторону оси z, а сила T в положительную сторону оси x.

$$\sigma_{xx}(x,y,z)=\frac{3Q}{2\pi}\cdot\left[\frac{x^2z}{R^5}+\frac{1-2\nu}{3}\left(\frac{R^2-Rz-z^2}{R^3(R+z)}-\frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{yy}(x,y,z)=\frac{3Q}{2\pi}\cdot\left[\frac{y^2z}{R^5}+\frac{1-2\nu}{3}\left(\frac{R^2-Rz-z^2}{R^3(R+z)}-\frac{y^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{zz}(x,y,z)=\frac{3Q}{2\pi}\cdot\frac{z^3}{R^5},\quad \sigma_{yz}(x,y,z)=\frac{3Q}{2\pi}\cdot\frac{yz^2}{R^5},\quad \sigma_{xz}(x,y,z)=\frac{3Q}{2\pi}\cdot\frac{xz^2}{R^5},$$

$$\sigma_{xy}(x,y,z)=\frac{3Q}{2\pi}\cdot\left[\frac{xyz}{R^5}-\frac{1-2\nu}{3}\cdot\frac{xy(2R+z)}{R^3(R+z)^2}\right],\quad 2Gu_x(x,y,z)=-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{xz}{R^3}-(1-2\nu)\frac{x}{R(R+z)}\right],$$

$$2Gu_y=-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{yz}{R^3}-(1-2\nu)\frac{y}{R(R+z)}\right],\quad 2Gu_z(x,y,z)=-\frac{Q}{2\pi}\left[\frac{z^2}{R^3}+2(1-\nu)\frac{1}{R}\right],$$

$$\sigma_{xx}\left(x,y,z\right)=\frac{T}{2\pi}\left[-\frac{3x^3}{R^5}+\left(1-2\nu\right)\left(\frac{x}{R^3}-\frac{3x}{R\left(R+z\right)^2}+\frac{x^3\left(3R+z\right)}{R^3\left(R+z\right)^3}\right)\right],$$

$$\sigma_{yy}(x,y,z)=\frac{T}{2\pi}\left[\frac{3xz^2}{R^5}-2(1+\nu)\frac{x}{R^3}\right]-\sigma_{xx},$$

$$\sigma_{zz}(x,y,z)=-\frac{T}{2\pi}\frac{3xz^2}{R^5},\quad \sigma_{yz}(x,y,z)=-\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{3xyz}{R^5},\quad \sigma_{xz}(x,y,z)=-\frac{3T}{2\pi}\frac{x^2z}{R^5},$$

$$\sigma_{xy}(x,y,z)=\frac{T}{2\pi}\left[-3\frac{x^2y}{R^5}+(1-2\nu)\left(-\frac{y}{R(R+z)^2}+\frac{x^2y(3R+z)}{R^3(R+z)^3}\right)\right],$$

$$2Gu_x(x,y,z)=\frac{T}{2\pi}\left[\frac{1}{R}+\frac{x^2}{R^3}+(1-2\nu)\left(\frac{1}{R+z}-\frac{x^2}{R(R+z)^2}\right)\right],$$

$$2Gu_y(x,y,z)=\frac{T}{2\pi}\frac{xy}{R}\left[\frac{1}{R^2}-\frac{1-2\nu}{(R+z)^2}\right],\quad 2Gu_z(x,y,z)=\frac{T}{2\pi}\frac{x}{R}\left[\frac{z}{R^2}+\frac{1-2\nu}{R+z}\right]. \qquad (1)$$

Здесь E – модуль Юнга материала полупространства, ν – его коэффициент Пуассона, $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига.

Если силы Q и T приложены в точке $(s,t,0)$ границы полупространства, то напряжения и перемещения в полупространстве можно получить из формул (1) путем замены в них x на $x-s$, а y на $y-t$.

Пусть нормальная нагрузка q и касательная τ равномерно распределены в многоугольной области D границы полупространства, причем нормальная нагрузка направлена в отрицательную сторону оси z, а касательная – в положительную сторону оси x, тогда на основании принципа независимости действия сил для искомых величин в точке (x,y,z) полупространства получим следующие точные формулы

$$\sigma_{xx}(x,y,z)=\frac{3q}{2\pi}\cdot\iint\limits_D\left[\frac{(x-s)^2z}{R^5}+\frac{1-2\nu}{3}\left(\frac{R^2-Rz-z^2}{R^3(R+z)}-\frac{x^2(2R+z)}{R^3(R+z)^2}\right)\right]dsdt,$$

……………………………………………………………………………...

$$2Gu_z(x,y,z)=-\frac{q}{2\pi}\iint\limits_D\left[\frac{z^2}{R^3}+2(1-\nu)\frac{1}{R}\right]dsdt,$$

$$\sigma_{xx}(x,y,z)=\frac{\tau}{2\pi}\iint\limits_D\left[-\frac{3(x-s)^3}{R^5}+(1-2\nu)\left(\frac{x-s}{R^3}-\frac{3(x-s)}{R(R+z)^2}+\frac{(x-s)^3(3R+z)}{R^3(R+z)^3}\right)\right]dsdt,$$

……………………………………………………………………………….

$$2Gu_z(x,y,z)=\frac{\tau}{2\pi}\iint\limits_D\frac{x-s}{R}\left[\frac{z}{R^2}+\frac{1-2\nu}{R+z}\right]dsdt, \qquad (2)$$

где $R=\sqrt{(x-s)^2+(y-t)^2+z^2}$. Заметим, что подынтегральные функции во всех интегралах (2) при $z=0$ могут иметь особенности в области интегрирования из-за обращения в нуль величины R в точке $(x,y,0)$. Поэтому вычисление интегралов в формулах (2) на компьютере возможно лишь после их предварительного преобразования.

Пусть $(x,y,0)$ – точка на границе полупространства, соответствующая точке (x,y,z), в которой определяются напряжения и перемещения по формулам (2). Вершины области D условимся последовательно нумеровать по ходу часовой стрелки. Определим угол γ_k между векторами MM_k и MM_{k+1}:

$$\gamma_k=arc\cos\left(\frac{(x_k-x)(x_{k+1}-x)+(y_k-y)(y_{k+1}-y)}{\sqrt{(x_k-x)^2+(y_k-y)^2}\sqrt{(x_{k+1}-x)^2+(y_{k+1}-y)^2}}\right).$$

Обозначим символом Δ_k – треугольник с вершинами в точках $M(x,y,0)$, $M_k(x_k,y_k,0)$, $M_{k+1}(x_{k+1},y_{k+1},0)$ $k=\overline{1,n}$, где n – число вершин многоугольника D. Тогда легко убедиться в том, что для подынтегральных функций $F(x,y)$, определенных для всех действительных x и y

$$\iint_D F(s,t)dsdt = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \iint_{\Delta_k} F(s,t)dsdt\,,$$

где $\alpha_k = sign((x_k-x)(y_{k+1}-y)-(y_k-y)(x_{k+1}-x))$. Последняя формула справедлива при любом расположении точки $M(x,y,0)$ на границе полупространства, а также и в тех случаях, когда многоугольник D не обязательно является выпуклым.

В каждом из двойных интегралов по треугольной области сделаем замену переменных $s = x + r\cos\theta,\ t = y + r\sin\theta$, получим

$$\iint_{\Delta_k} F(s,t)dsdt = \int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k} d\theta \int_0^{R(\theta)} F(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta)rdr\,. \tag{4}$$

Здесь $R(\theta)$ – расстояние от точки $M(x,y,0)$ до стороны треугольника с вершинами в точках $(x_k,y_k,0)$, $(x_{k+1},y_{k+1},0)$. Расстояние $R(\theta)$ измеряется вдоль луча из точки $M(x,y,0)$, который образует угол θ с другим лучом из той же точки, сонаправленным с осью x. Угол θ отсчитывается от «другого» луча по ходу часовой стрелки. При таком соглашении λ_k – это значением угла θ для точки M_k.

Несложно получить методами аналитической геометрии такую формулу для расстояния $R(\theta)$

$$R(\theta) = \frac{(x_k-x)(y_{k+1}-y_k)-(y_k-y)(x_{k+1}-x_k)}{(y_{k+1}-y_k)\cos\theta-(x_{k+1}-x_k)\sin\theta}\,. \tag{5}$$

Преобразуем все интегралы по треугольным областям в выражениях (2) для искомых напряжений и перемещений к указанным выше повторным интегралам. Воспользовавшись таблицами интегралов, например, Двайта [7], придем к таким расчетным формулам

$$\sigma_{xx}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\left(\cos^2(\theta)\left(\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}\left(\frac{-\mathrm{z}}{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\frac{3-2\nu}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}}\right)-2(1-2\nu)\,\mathrm{L}_1\left(R(\theta),\mathrm{z}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+(1-2\nu)\left(\mathrm{L}_1\left(R(\theta),\mathrm{z}\right)-\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}\right)}\right)\right)d\theta\,,$$

$$\sigma_{yy}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\left(\sin^2(\theta)\left(\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}\left(\frac{-\mathrm{z}}{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\frac{3-2\nu}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}}\right)-2(1-2\nu)\,\mathrm{L}_1\left(R(\theta),\mathrm{z}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+(1-2\nu)\left(\mathrm{L}_1\left(R(\theta),\mathrm{z}\right)-\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}\right)}\right)\right)d\theta\,,$$

$$\sigma_{zz}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}\right)}\left(1+\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+\frac{\mathrm{z}^2}{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)d\theta\,,$$

$$\sigma_{yz}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{-q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\sin(\theta)\frac{R^3(\theta)}{\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3}d\theta\,,\quad \sigma_{xz}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{-q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos(\theta)\frac{R^3(\theta)}{\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3}d\theta\,,$$

$$\sigma_{xy}(\mathrm{x,y,z}) = \frac{q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos(\theta)\sin(\theta)\left(\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}\left(\frac{-\mathrm{z}}{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\frac{3-2\nu}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}}\right)-2(1-2\nu)\,\mathrm{L}_1\left(R(\theta),\mathrm{z}\right)\right)d\theta\,,$$

$$2Gu_x(\mathrm{x,y,z})=\frac{q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos(\theta)\left(\frac{-R(\theta)\mathrm{z}}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}-(1-2\nu)R(\theta)+2(1-\nu)\,\mathrm{z}\mathrm{L}_2\left(R(\theta),\mathrm{z}\right)\right)d\theta,$$

$$2Gu_y(\mathrm{x,y,z})=\frac{q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\sin(\theta)\left(\frac{-R(\theta)\mathrm{z}}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}-(1-2\nu)R(\theta)+2(1-\nu)\,\mathrm{L}_2\left(R(\theta),\mathrm{z}\right)\right)d\theta,$$

$$2Gu_z(\mathrm{x,y,z})=\frac{-q}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\frac{R^2(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}+\mathrm{z}}\left(\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+2(1-\nu)\right)d\theta.$$

$$\sigma_{xx}(x,y,z)=\frac{\tau}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos^3\theta\left[\frac{3R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+\frac{R^3(\theta)}{\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3}-3\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)\right]\mathrm{d}\theta+\right.$$

$$+(1-2\nu)\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos\theta\left[\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}-6\frac{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}{R(\theta)}+6\frac{\mathrm{z}}{R(\theta)}+2\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)\right]\mathrm{d}\theta-$$

$$\left.-(1-2\nu)\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos^3\theta\left[-8\frac{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}{R(\theta)}+\frac{8\mathrm{z}}{R(\theta)}+\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+3\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)\right]\mathrm{d}\theta\right\},$$

$$\sigma_{yy}(x,y,z)=-\sigma_{xx}(x,y,z)+\frac{\tau}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos^2\theta\sin\theta\left[-\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}-\frac{R^3(\theta)}{3\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3}+\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)\right]\mathrm{d}\theta+\right.$$

$$\left.+2(1-\nu)\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos\theta\left[-\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)\right]\mathrm{d}\theta\right\},$$

$$\sigma_{zz}(x,y,z)=\frac{-3\tau}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos\theta\frac{R^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta}{\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3},$$

$$\sigma_{yz}(x,y,z)=\frac{-3\tau z}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\sin\theta\cos\theta\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+\frac{\mathrm{z}^2}{3\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3}\right]d\theta,$$

$$\sigma_{xz}(x,y,z)=\frac{-3\tau z}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos^2\theta\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+\frac{\mathrm{z}^2}{3\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3}+\frac{2}{3z}\right]d\theta,$$

$$\sigma_{xy}(x,y,z)=\frac{\tau}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos^2\theta\sin\theta\left[\frac{3R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}+\frac{R^3(\theta)}{\left(\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)^3}-3\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)\right]\mathrm{d}\theta-\right.$$

$$-(1-2\nu)\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\sin\theta\left[-2\frac{\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}}{R(\theta)}+2\frac{\mathrm{z}}{R(\theta)}+\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+\mathrm{z}^2}\right)\right]\mathrm{d}\theta-$$

$$+(1-2\nu)\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos^2\theta\sin\theta\left[-8\frac{\sqrt{R^2(\theta)+z^2}}{R(\theta)}+\frac{8z}{R(\theta)}+\frac{R(\theta)}{\sqrt{R^2(\theta)+z^2}}+3\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+z^2}\right)\right]d\theta\Bigg\}$$

$$2Gu_x(x,y,z)=\frac{\tau}{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\left[\sqrt{R^2(\theta)+z^2}-z-(1-2\nu)\left(\sqrt{R^2(\theta)+z^2}-z-z\ln\frac{\sqrt{R^2(\theta)+z^2}+z}{2z}\right)\right]d\theta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\cos^2\theta\left[\sqrt{R^2(\theta)+z^2}+\frac{z^2}{\sqrt{R^2(\theta)+z^2}}-2z+(1-2\nu)\left(\sqrt{R^2(\theta)+z^2}-z-2z\ln\frac{\sqrt{R^2(\theta)+z^2}+z}{2z}\right)\right]d\theta\right\},$$

$$2Gu_y(x,y,z)=\frac{\tau}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\sin\theta\cos\theta\left[\sqrt{R^2(\theta)+z^2}+\frac{z^2}{\sqrt{R^2(\theta)+z^2}}-(1-2\nu)\left(\sqrt{R^2(\theta)+z^2}-2x\ln\left(z+\sqrt{R^2(\theta)+z^2}\right)\right)\right]d\theta\,,$$

$$2Gu_z(x,y,z)=\frac{\tau}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{z\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_k+\alpha_k\gamma_k}\left[R(\theta)-z\,arctg\frac{R(\theta)}{z}\right]d\theta+(1-2\nu)\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}}\ln\frac{z+\sqrt{R^2(\theta)+z^2}}{2z}d\theta\right\},\qquad(6)$$

где

$$\mathrm{L}_1(R(\theta),z)=\begin{cases}\ln\left(z+\sqrt{R^2(\theta)+z^2}\right) & при\ z\le 1,\\ \ln\left(\dfrac{z+\sqrt{R^2(\theta)+z^2}}{z}\right) & при\ z>1,\end{cases}\qquad \mathrm{L}_2(R(\theta),z)=\begin{cases}\ln\left(R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+z^2}\right) & при\ z\le 1,\\ \ln\left(\dfrac{R(\theta)+\sqrt{R^2(\theta)+z^2}}{z}\right) & при\ z>1.\end{cases}$$

Напомним, что величина $R(\theta)$ определена формулой (5).

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера определим напряжения и перемещения в упругом полупространстве при действии на него нормальной нагрузки q и касательной τ, распределённых в прямоугольнике со сторонами $\Delta x=1см,\ \Delta y=2см$. Центр прямоугольника находится в точке $(0,0)$. Вершины прямоугольника имеют координаты $\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\left(-\frac{1}{2},\ 1\right),\left(-\frac{1}{2},\ -1\right),\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$. Тогда в интегралах (4) $n=4$. В расчётах предполагалось, что интенсивность нормальной нагрузки $q=10^4\ Па$, интенсивность касательной нагрузки $\tau=10^4\ Па$, модуль Юнга материала полупространства $E=2\cdot 10^{11}\ Па$, коэффициент Пуассона этого материала $\nu=0{,}3$. Подынтегральные функции в определённых интегралах в правых частях формул (6) имеют производные любого порядка по переменной интегрирования. Поэтому для вычисления их с высокой точностью на компьютере целесообразно использовать квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы Гаусса) [8]. Экспериментами было установлено, что для получения четырёх верных десятичных цифр в конечных результатах вычислений достаточно использовать квадратурную формулу Гаусса с семью узлами для каждого определённого интеграла в формуле (4).

В таблице 1 приведены значения напряжений $\sigma_{zz}(x,y,z)$, $\sigma_{xz}(x,y,z)$, $\sigma_{xy}(x,y,z)$ и перемещения $u_x(x,y,z)$ в упругом полупространстве для нормальной нагрузки интенсивности q в прямоугольной области. Первая колонка с численными результатами для каждой величины соответствует действию нагрузки q, вторая колонка соответствует действию на полупространство сосредоточенной силы $Q=2H$. В таблице 2 приведены значения напряжений $\sigma_{zz}(x,y,z)$, $\sigma_{xz}(x,y,z)$, $\sigma_{xy}(x,y,z)$ и перемещения $u_x(x,y,z)$ в упругом полупространстве для касательной нагрузки интенсивности τ в прямоугольной области (нагрузка направлена в положительную сторону оси x). Первая колонка с численными результатами для каждой величины соответствует действию нагрузки τ, вторая колонка соответствует действию на полупространство сосредоточенной силы $T=2H$.

Таблица 1 – Нормальная нагрузка

x	y	z	$\sigma_{zz}(x,y,z)$		$\sigma_{xz}(x,y,z)$		$\sigma_{xy}(x,y,z)$		$u_x(x,y,z)$	
			q	Q	q	Q	q	Q	q	Q
1	0	1	0,1703	0,1688	0,1695	0,1688	$0,25\cdot10^{-10}$	0	$-0,488\cdot10^{-12}$	$-0,489\cdot10^{-12}$
2	0	1	0,01719	0,01708	0,03422	0,03416	$0,63\cdot10^{-10}$	0	$-0,141\cdot10^{-12}$	$-0,141\cdot10^{-12}$
3	0	1	0,00318	0,00301	0,00907	0,00905	$0,79\cdot10^{-10}$	0	$-0,827\cdot10^{-14}$	$-0,765\cdot10^{-14}$
4	0	1	0,00079	0,0008	0,00334	0,0032	$0,95\cdot10^{-10}$	0	$0,382\cdot10^{-13}$	$0.386\cdot10^{-13}$
5	0	1	0,00031	0,00027	0,00159	0,00138	$0,63\cdot10^{-10}$	0	$0,558\cdot10^{-13}$	$0.55\cdot10^{-13}$
6	0	1	0,00015	0,00011	0,00063	0,00068	$0,63\cdot10^{-10}$	0	$0,6\cdot10^{-13}$	$0.6\cdot10^{-13}$

Таблица 2 – Касательная нагрузка

x	y	z	$\sigma_{zz}(x,y,z)$		$\sigma_{xz}(x,y,z)$		$\sigma_{xy}(x,y,z)$		$u_x(x,y,z)$	
			τ	T	τ	T	τ	T	τ	T
1	0	1	–0,1687	–0,1688	–0,1688	–0,1688	$0,42\cdot10^{-10}$	0	$0,243\cdot10^{-11}$	$0,243\cdot10^{-11}$
2	0	1	–0,03417	–0,03416	–0,06833	–0,06832	$0,84\cdot10^{-10}$	0	$0,177\cdot10^{-11}$	$0,178\cdot10^{-11}$
3	0	1	–0,00906	–0,00905	–0,02719	–0,02716	$0,31\cdot10^{-10}$	0	$0,13\cdot10^{-11}$	$0,13\cdot10^{-11}$
4	0	1	–0,0032	–0,0032	–0,01283	–0,01282	$0,14\cdot10^{-11}$	0	$0,101\cdot10^{-11}$	$0,101\cdot10^{-11}$
5	0	1	–0,00138	–0,000138	–0,00692	–0,00692	$0,14\cdot10^{-10}$	0	$0,822\cdot10^{-12}$	$0,822\cdot10^{-12}$
6	0	1	–0,00069	–0,00068	–0,00413	–0,00412	$0,18\cdot10^{-10}$	0	$0,69\cdot10^{-12}$	$0,69\cdot10^{-12}$

Характер законов распределения вычисленных напряжений и перемещений в упругом полупространстве соответствует ожидаемой физической картине. Близость соответствующих численных значений в точках полупространства, удалённых от точек приложения рассматриваемых нагрузок, свидетельствует как о достоверности теоретических рассуждений и расчетных формул, так и о достоверности приведенных численных результатов.

ВЫВОДЫ

Получено точное решение (в квадратурах) граничной задачи теории упругости о действии на многоугольную область границы однородного изотропного полупространства касательной нагрузки, направленной в одну сторону, и нормальной нагрузки, равномерно распределенной в области. Предложен способ численной реализации этого решения. Обоснована достоверность теоретических и численных результатов, а так же расчетных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корсунский М. Б. Практические методы определения напряженно-деформированного состояния конструкций дорожных одежд / М. Б. Корсунский // В кн. : Труды Союздорнии. — М. : Союздорнии, 1966. — № 6. — С. 5-78.
2. Мозговой В. В. Розрахунок напружено-деформованого стану дорожнього одягу за допомогою ЕОМ / В. В. Мозговой // В кн. : Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. — К. : Будівельник, 1980. — № 26. — С. 9-12.
3. Приварников А. К. Об использовании адаптивных программ интегрирования при решении прикладных задач теории многослойных оснований / А. К. Приварников, А. Е. Мерзликин // Труды Союздорнии. Новое в проектировании конструкций дорожный одежд. — М. : Союздорнии, 1988. — С. 22-36.
4. Приварников А. К. Упругие многослойные основания / А. К. Приварников, В. Д. Ламзюк. — Днепропетровск, 1985. — 162 с. — Деп. в ВИНИТИ 23.12.85, № 8789 – В.
5. Матузко Ю. О. Просторові контактні задачі для пружної багатошарової основи з гладкою межею : автореф. дис. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук : спец. 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» / Ю. О. Матузко. — Донецк, 2005. — 18 с.
6. Рекач В. Г. Руководство к решению задач теории упругости / В. Г. Рекач. — М. : Высшая школа, 1977. — 215 с.
7. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. — М. : Наука, 1978. — 228 с.
8. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. — М. : Наука, 1966. — 370 с.