6. Glimm B. Querying Description Logic Knowledge Bases. PhD Thesis / Birte Glimm. — The University of Manchester, 2007. — 192 p.
7. Motik B. Reasoning in Description Logics using Resolution and Deductive Databases / Boris Motik. — Univesität Karlsruhe, 2006. — 249 p.
8. On the Complexity of Temporal Query Answering. Technical report LTCS-Report 13-01 [electronic resource] / F. Baader, S. Borgwardt, M. Lippmann — Available at : http://lat.inf.tudresden.de/research/reports/2013/BaBoLi-LTCS-13-01.pdf.
9. Lipeck U. W. Transformation of Dynamic Integrity Constraints into Transaction Specifications / U. W. Lipeck // Theor. Comput. Sci. — 1990. — 76(1). — P. 115—143.
10. Schwiderski S. Monitoring Temporal Preconditions in a Behaviour Oriented Object Model / S. Schwiderski, T. Hartmann, G. Saake // Data Knowl. Eng. — 1994. — 14(2). — P. 143—186.
11. Lipeck U. W. Construction of Deterministic Transition Graphs from Dynamic Integrity Constraints / U.W. Lipeck, D. Feng. — LNCS. — 1989. — Vol. 344. — P.166—179.
12. Baier C. Principles of Model Checking / C. Baier, J.-P. Katoen. — The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2008. — 975 p.
13. Abiteboul S. Foundations of Databases / S. Abiteboul, R. Hull, V. Vianu. — Addison-Wesley, 1995. — 685 p.


УДК 519.85

# ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Косолап А. И., д. ф.-м. н., профессор, Перетятько А. С., аспирант

*Украинский государственный химико-технологический университет*

В работе задачи комбинаторной оптимизации преобразуются к квадратичным. Затем используется полуопределенная релаксация для преобразования квадратичных задач к линейным полуопределенным задачам, в которых искомой является полуопределенная матрица. Для решения задачи полуопределенного программирования используется новый полуопределенный симплекс-метод. Найденное решение уточняется с помощью прямо-двойственного метода внутренней точки. Проведенные численные эксперименты подтверждают эффективность рассмотренных методов для решения комбинаторных задач оптимизации.

*Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, квадратичная оптимизация, полуопределенная релаксация, полуопределенное программирование, полуопределенный симплекс-метод, метод внутренней точки.*

Косолап А. І., Перетятько А. С. НАПІВВИЗНАЧЕНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ РОЗВЯЗКУ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ / Український державний хіміко-технологічний університет, Україна

У роботі задачі комбінаторної оптимізації перетворюються до квадратичних. Потім використовується напіввизначена релаксація для перетворення квадратичних задач до лінійних напіввизначених задач, у яких знаходиться напіввизначена матриця. Для розв’язання задач напіввизначеного програмування використовується новий напіввизначений симплекс-метод. Знайдений розв’язок уточнюється за допомогою прямо-двоїстого методу внутрішньої точки. Проведені чисельні експерименти підтверджують ефективність розглянутих методів для розв’язання комбінаторних задач оптимізації.

*Ключові слова: комбінаторна оптимізація, квадратична оптимізація, напіввизначена релаксація, напіввизначене програмування, напіввизначений симплекс-метод, метод внутрішньої точки.*

Kosolap A. I., Peretiatko A. S. SEMIDEFINITE PROGRAMMING FOR THE SOLUTION THE PROBLEMS OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION / Ukrainian State University of Chemical Technology, Ukraine

The study deals with quadratic optimization problems with Boolean variables. Such problems arise in economics, management, technology, resource allocation, design, information systems, etc. The difficulty is that these problems may content lots of local minima and feasible set of these problems can be nonconvex and discrete. Most of these problems belong to NP-hard problems, and there are only exponential algorithms for their solving. One of the common approaches for solving this class of problems is semidefinite relaxation. In this case the quadratic function $x^T Ax$ is represented in the form $Axx^T$ or $A \bullet X$, where $A$ is symmetric matrix, and $X$ is positive semidefinite matrix of rank one. This transformation allows to reduce the general quadratic problem to linear semidefinite optimization problem (SDP), in which the unknown variable is the

semidefinite matrix. However, semidefinite relaxation is an approximate transformation (without the requirement that the rank of the matrix $X$ is 1).
This study transforms the quadratic optimization problem with Boolean variables to general quadratic problem, where Boolean constraints are replaced by quadratic $x_i(x_i - 1) = 0$, $i = 1, ..., n$. Using a semidefinite relaxation we obtain a semidefinite programming problem where we must find a semidefinite matrix. The semidefinite programming problem is equivalent to the original problem if the matrix $X$ is semidefinite matrix with the rank one. However, the condition that the matrix should be of the rank one cannot be set analytically. Therefore, we solve the problem without this condition. Then the solution of the semidefinite programming problem defines a lower bound for the solution of the original problem. The solution of the semidefinite programming problem $X^*$ determines the exact solution of the original problem if $X^*$ is semidefinite one-rank matrix.
Obtained semidefinite programming problem are solved by the new semidefinite simplex method. Unlike the usual simplex method, in semidefinite simplex method we solve a sequence of the problems of linear programming, using the property of semidefinite matrices $X = \sum_j \alpha_j X_j$ (it means that any semidefinite matrix can be represented as the sum of one-rank matrices). At each iteration we define a new column of the constraints matrix from the solution of simple quadratic optimization problem $\min\{x^T Qx \,|\, \|x\|^2 = 1\}$. We solve this problem using the new method of conjugate directions: at first we modify the matrix $Q$ into semidefinite, then linearize the objective function and solve the resulting problem using Lagrange multiplier method. If $x^*$ is the solution of the resulting problem then the matrix $Q$ is positive semidefinite if $x^{*T} Qx^* \geq 0$. In this case the semidefinite programming problem is solved; otherwise the search for the solution of SDP problem by the simplex method will be continued.
Software for the proposed method was developed and numerical experiments were performed for well-known test knapsack problems. The numerical experiments have confirmed the efficiency of the given methods for solving combinatorial optimization problems. They show that this method often can find the point of global minimum of the original problem if we use solution of the semidefinite problem as a starting point for the original problem.
*Keywords: combinatorial optimization, quadratic optimization, semidefinite relaxation, semidefinite programming, semidefinite simplex method, interior point method.*

## ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи из различных областей знаний требуют выбора одной из множества возможных альтернатив. Такие задачи возникают в экономике, управлении, технике, распределении ресурсов, в проектировании, информационных системах и т.п. При математическом моделировании эти задачи преобразуются к линейным или квадратичным задачам оптимизации с булевыми переменными. Большинство таких задач относятся к классу NP-сложных, для которых разработаны только экспоненциальные алгоритмы. Эти алгоритмы эффективны для решения задач малой размерности, но оптимизационные задачи часто содержат тысячи и даже сотни тысяч переменных. Для решения таких задач необходимо разработать новые, более эффективные методы.

В последние годы для решения многих NP-сложных задач используется полуопределенная релаксация [1], позволяющая свести их к выпуклым задачам полуопределенного программирования. Для задач полуопределенного программирования разработаны эффективные алгоритмы [2-3]. Однако, в общем случае, полуопределенная релаксация позволяет находить только нижнюю оценку решения исходной задачи (для задач на минимум и верхнюю оценку для задач на максимум). Такая оценка является точной, если искомая матрица полуопределенного программирования имеет ранг единица. В противном случае, необходимо уточнять эту нижнюю оценку. Лучшим методом для этого является прямо-двойственный метод внутренней точки [4]. Этот же метод разработан и для задач полуопределенного программирования [2], однако для этого класса задач он менее эффективный, что связано с более сложной теорией двойственности и плохой обусловленностью полуопределенных матриц. Поэтому поиск более эффективных методов полуопределенного программирования продолжается. В работе использован новый, более эффективный полуопределенный симплекс-метод [5]. Он решает только прямую задачу и находит решение в виде линейной комбинации матриц ранга единица.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу булевой комбинаторной оптимизации

$$\min\{c^T x \,|\, Ax \leq b, x = 0 \vee 1, x \in E^n\}, \quad (1)$$

где $c$ – $n$-мерный вектор, $A$ – матрица размера $(m \times n)$, $x$ – $n$-мерный вектор с компонентами 0 или 1, $E^n$ – $n$-мерное евклидовое пространство. Предлагаемая методика решения комбинаторных задач применима и для более общей задачи квадратичной оптимизации с квадратичными ограничениями и булевыми переменными

$$\min\left\{x^T Q_0 x + q_0^T x \mid x^T Q_i x + q_i^T x \le r_i, i = 1,\dots,m, x = 0 \vee 1, x \in E^n\right\}, \qquad (2)$$

где все $Q_i$ – симметрические матрицы размера $(n \times n)$, $q_i$, $x$ – $n$-мерные вектора. Более общие полиномиальные задачи могут быть преобразованы к квадратичным (2) последовательной заменой $z_i = x_i^2$. Например, полиномиальное ограничение $x_1 x_2 x_3 - x_1^5 x_2 - x_3^4 \le 1$ преобразуется к эквивалентным квадратичным ограничениям

$$\left\{x \mid z_1 z_3 - z_2 z_4 - z_3^2 \le 1,\ z_1 = x_1 x_2,\ z_2 = x_1^2,\ z_3 = x_3^2,\ z_4 = z_1 z_2\right\}.$$

Заменим в задачах (1-2) булевы переменные квадратичным условием $x_i(x_i - 1) = 0$, $i = 1,\dots,n$ где теперь переменные $x_i$ могут принимать произвольные значения. Естественно, что допустимыми будут только значения 0 или 1.

Таким образом, комбинаторные задачи (1-2) преобразуются к общей квадратичной задаче

$$\min\left\{x^T Q_0 x + q_0^T x \mid x^T Q_i x + q_i^T x \le r_i,\ i = 1,\dots,m,\ x^T Q_i x + q_i^T x = r_i,\ i = m+1,\dots,p,\ x \in E^n\right\}. \qquad (3)$$

Используем для ее решения полуопределенную релаксацию. Учитывая, что $x^T Q x = Q \bullet xx^T = Q \bullet X$, где

$$Q \bullet X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

есть скалярное произведение матриц, преобразуем задачу (3) к полуопределенной

$$\min\left\{\bar{A}_0 \bullet X \mid \bar{A}_i \bullet X \preceq 0,\ i = 1,\dots,m,\ \bar{A}_i \bullet X = 0,\ i = m+1,\dots,p,\ X \succeq 0\right\}, \qquad (4)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix},$$

$$x^T Q_i x + q_i^T x - r_i = \begin{pmatrix} -r_i & \frac{q_i^T}{2} \\ \frac{q_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_i & \frac{q_i^T}{2} \\ \frac{q_i}{2} & Q_i \end{pmatrix} \bullet X = \bar{A}_i \bullet X,\ i = 0,1,\dots,p.$$

Преобразованная задача (4) будет эквивалентной задаче (3), если решением задачи (4) будет полуопределенная матрица $X^*$ ранга единица. Все матрицы ранга единица представимы в виде $xx^T$. Ввести в ограничения задачи (4) условие, что ранг матрицы $X$ равен единица невозможно, так как это условие проверяется алгоритмически. Поэтому данное условие в задаче (4) опускают, оставляя только положительную полуопределенность матрицы $X$. Естественно, такое ослабление ограничений может приводить к уменьшению целевой функции и к недопустимому решению, если решение линейной задачи (4) достигается не в крайнем луче конуса полуопределенных матриц.

Известный факт, что любая положительно полуопределенная матрица $X$ представима в виде линейной комбинации матриц ранга единица [6]

$$X = \sum_j \alpha_j X_j,$$

где $X_j = x^j x^{jT}$ – матрицы ранга единица, а все $\alpha_j \ge 0$, используем для преобразования задачи (4) к задаче линейного программирования

$$\min\left\{C \bullet \sum_j \alpha_j X_j \mid A_i \bullet \sum_j \alpha_j X_j = b_i,\ i = 1,\dots,p,\ \alpha \ge 0\right\}. \qquad (5)$$

В задаче (4) ограничения-неравенства преобразуются к равенствам посредством ввода дополнительных свободных переменных. Задачу (5) можно решать обычным симплекс-методом или прямо-двойственным методом внутренней точки, но для этого необходимо определить начальный набор образующих $X_j$ конуса положительно полуопределенных матриц. Фактически, вместо конуса положительно полуопределенных матриц мы берем многогранный конус. После решения задачи (5) мы можем определить, существует ли новая образующая $X_k$ такая, что замена $X=\sum_j \alpha_j X_j$ на

$$X=\sum_j \alpha_j X_j + \alpha_k X_k$$

приведет к уменьшению целевой функции в задаче (5). Для этого необходимо решить простую задачу квадратичной оптимизации

$$\min\left\{ x^T Qx \,|\, ||x||^2=1 \right\}, \tag{6}$$

где

$$Q=C-\sum_j C\bullet x_i x_i^T \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^{-1} A_j \,,$$

$b_{ij}^{-1}$ – элементы базисной матрицы $B^{-1}$ симплекс-метода. Хорошо известно, что задача (6) эффективно разрешима [7]. Очевидно, что решение задачи (6) совпадает с решением задачи

$$\min\left\{ x^T Qx + r(||x||^2-1) \,|\, ||x||^2=1 \right\}.$$

Выберем $r>0$ таким, чтобы матрица $Q^*=Q+rI$ была положительно определенной. Для этого достаточно, чтобы

$$q_{ii}^* > \sum_{i\neq j} |\, q_{ij}^* \,|, \forall i \,,$$

где $q_{ij}^*$ – элементы матрицы $Q^*$. Таким образом, решение задачи (6) сводится к поиску собственного вектора матрицы $Q^*$, соответствующему ее минимальному собственному значению. Это равносильно решению задачи

$$\min\left\{ x^T Q^* x \;\;|\, ||x||^2=1 \right\}$$

или задачи

$$\max\left\{ ||x||^2 \;|\;\; x^T Q^* x = 1 \right\}. \tag{7}$$

При надлежащем выборе начального значения $x^0$, $k$-е приближение решения задачи (7) может быть найдено в явном виде (используя метод множителей Лагранжа для последовательности задач $\max\left\{ (x^k)^T x \,|\, x^T Q^* x = 1 \right\},\; k=0,1,\ldots$)

$$x^k = \frac{\left(Q^*\right)^{-k} x^0}{\sqrt{x^0 \left(Q^*\right)^{-(2k-1)} x^0}} \,.$$

Пусть $x^*$ – решение задачи (7), тогда матрица $Q$ – положительно полуопределенная при условии $x^{*T} Q x^* \geq 0$. В этом случае задача (4) решена, в противном случае поиск решения задачи (4) симплекс-методом будет продолжен.

Запишем задачу (1-2) или полиномиальную задачу в общем виде

$$\min\left\{ f_0(x) \,|\, f_i(x) \leq 0, i=1,\ldots,p, x\in E^n \right\}, \tag{8}$$

где все $f_i(x)$ полиномиальные функции (ограничения-равенства можно заменить двумя ограничениями неравенствами). Найденное решение задачи (4) используем в качестве начальной точки для решения задачи (1-2) прямо-двойственным методом внутренней точки [4]. Преобразуем ограничения задачи (8) к равенствам

$$\min\left\{ f_0(x) - \mu \sum_{i=1}^{p} \ln(z_i) \,|\, f_i(x) + z_i = 0,\, i=1,\ldots,p \right\},$$

тогда функция Лагранжа этой задачи будет иметь вид

$$L(x,y,z)=f_0(x)-\mu\sum_{i=1}^{p}\ln(z_i)-\sum_{i=1}^{p}y_i\left(f_i(x)+z_i\right),$$

условия минимума которой равны

$$\nabla f_0(x)-\nabla f_i(x)^T y=0,$$
$$f_i(x)+z_i=0,\ i=1,\dots,p,$$
$$-\mu Z^{-1}e+y=0.$$

Метод Ньютона для этой нелинейной системы уравнений на каждой итерации решает линейную систему уравнений

$$\begin{bmatrix} G(x,y) & A^T(x) & 0 \\ A(x) & 0 & Z \\ A(x) & -I & Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\nabla f_0(x)-A^T(x)y \\ -f(x)-z \\ \mu e-ZYe \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где $G(x,y)$ – гессиан функции Лагранжа, $A(x)=\nabla f(x)$, $Y=diag(y_1,\dots,y_p)$, $Z=diag(z_1,\dots,z_p)$, $f(x)=(f_1(x),\dots,f_p(x))$, $I$ – единичная матрица, а $e=(1,\dots,1)$. Решение линейной системы (9) используем для перехода в следующую точку

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k\Delta x^k,$$
$$y^{k+1}=y^k+\alpha_k\Delta y^k,$$
$$z^{k+1}=z^k+\alpha_k\Delta z^k.$$

На каждой итерации значение параметра $\mu$ убывает по формуле $\mu=x^T z/n$. Параметр $\alpha$ выбирается так, чтобы $z^{k+1}\geq 0$. Показано, что данный метод глобально сходится к точке локального минимума за полиномиальное время [8].

## ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для рассмотренного полуопределенного симплекс-метода разработано программное обеспечение и проведены численные эксперименты.

Рассмотрим некоторые тестовые задачи, приведенные в [9] для решения задачи о ранце

$$\max\left\{p^T x \mid a^T x\leq b, x=0\vee 1\right\}. \tag{10}$$

Верхняя оценка решения $x^0$ этой задачи (для задачи минимизации это будет нижняя оценка), полученная полуопределенным симплекс методом, уточнялась посредством решения следующей задачи

$$\min\left\{\|x-x^0\|^2 \mid a^T x=b,\ x_i(x_i-1)=0,\ i=1,\dots,n\right\} \tag{11}$$

прямо-двойственным методом внутренней точки.

Результаты численных экспериментов приведены в табл. 1, где видим, что решение задачи (11) совпадает с оптимальным решением задачи (10).

Таблица 1 – Результаты численных экспериментов над задачами из [9]

| Задача (10) в [9] | Размерность задачи | Полученная верхняя оценка (задача (4)) | Полученная нижняя оценка (задача (11)) | Оптимальное решение |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2.1 | 8 | 294,988 | 280 | 280 |
| 2.2 | 7 | 107,5393 | 107 | 107 |
| 2.3 | 6 | 159,997 | 150 | 150 |
| 2.4 | 7 | 127,0274 | 127 | 127 |
| 2.5 | 8 | 1189,51 | 900 | 900 |

## ВЫВОДЫ И НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Задачи комбинаторной оптимизации преобразованы к общим квадратичным задачам для решения которых применяется полуопределенная релаксация. Найденное решение задачи полуопределенного программирования новым полуопределенным симплекс-методом используется в качестве начальной точки для прямо-двойственного метода внутренней точки. Как показали численные эксперименты, решение, найденное методом внутренней точки, совпадает с точным решение исходной комбинаторной задачи. Возможна модификация полуопределенного симплекс-метода, позволяющая находить решение задачи полуопределенного программирования в виде матрицы ранга единица.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Vandenberghe L. Semidefinite programming / L. Vandenberghe, S. Boyd // SIAM Review. — 1996. — Vol. 38. — P. 49-95.
2. Todd M. J. Semidefinite optimization / M. J. Todd //Acta Numerica. — 2001. — № 10. — P. 515-560.
3. Helmberg C. Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization / C. Helmberg. — Berlin, 2000. – – 150 p.
4. Nocedal J. Numerical optimization / J. Nocedal, S. J. Wright. — Springer, 2006. — 685 p.
5. Косолап А. И. Методы глобальной оптимизации / А. И. Косолап. — Днепропетровск : Наука и образование, 2013. — 318 с.
6. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир. — 1989. — 656 с.
7. Fortin C. Computing the local minimizers of a large and sparse trust region subproblem / C. Fortin. — Montreal : McGill University, 2004. — 149 p.
8. Nesterov Y. Interior point polynomial algorithms in convex programming / Y. Nesterov, A. S. Nemirovskii // SIAM Studies in Applied Mathematics. — 1994. — Vol. 13. — SIAM, Philadelphia, USA. — 405 p.
9. Martello S. Knapsack problems: algorithms and computer implementation / S. Martello, P. Toth. — Chichester : John Wiley & SONS, 1090. — 296 p.


УДК 517.982

# ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЧИСЛОВИМ РАДІУСОМ ТА НАПІВНОРМОЮ МОРЕ ОПЕРАТОРІВ, ЗАДАНИХ НА ПРОСТОРАХ $L_p$ ПРИ $1 < p < \infty$

Красікова І. В., к. ф.-м. н.

*Запорізький національний університет*

У роботі досліджуються дві числові характеристики лінійних неперервних операторів, заданих на просторах $L_p$ при $1 < p < \infty$ – напівнорма Море та числовий радіус оператора. Поняття числового образу та числового радіуса оператора виникло у 70-х роках минулого століття. Числовий образ лінійного неперервного оператора $T$, заданого на банаховому просторі $X$, визначається як $V(T) = \{f(Tx): f \in S_{X^*}, x \in S_X, f(x) = 1\}$, де $S_X$ – одинична сфера простору $X$. Згідно з теоремою Гана-Банаха, для кожного $x \in S_X$ існує лінійний неперервний функціонал $f \in S_{X^*}$, для якого $f(x) = 1$. Отже, числовий образ лінійного неперервного оператора є непорожньою множиною чисел. Зокрема, існує супремум модуля числового образа $v(T) = \sup\{|f(Tx)|: f \in S_{X^*},\ x \in S_X, f(x) = 1\}$, який називається числовим радіусом оператора $T$. Числовий радіус лінійного неперервного оператора $T$ задовольняє умову $0 \le v(T) \le \|T\|$. Поняття напівнорми Море було введене у роботі [1]. У цій роботі був описаний новий клас лінійних неперервних операторів на просторах $L_p = L_p([0;1], \mathcal{B}, \lambda)$ при $1 < p < \infty$ (тут $\mathcal{B}$ – борелівська $\sigma$-алгебра, а $\lambda$ – міра Лебега) – оператори Море, які можна розглядати як узагальнення компактних операторів на просторах $L_p$. Цей клас операторів виник при опрацюванні техніки доведення відомої теореми Енфло про примарність простору $L_p$ при $1 \le p < \infty$, яке було запропоноване Б. Море. Для кожного лінійного неперервного оператора $T$ на борелівській $\sigma$-алгебрі $\mathcal{B}$ задаються дві функції $M_T$, $m_T$, які є мірами множини і називаються верхньою та нижньою мірами Море оператора $T$, відповідно. Обидві ці міри мають похідні Радона-Нікодима $F_T$, $f_T \in L_\infty$, які носять назви верхньої та нижньої похідної Море оператора $T$. Верхня та нижня похідні Море задовольняють нерівність $\|F_T\|_\infty \le \|T\|$, $\|f_T\|_\infty \le \|T\|$. Напівнормою Море $\|T\|_M$ оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$ при цьому називається найбільша з величин $\|F_T\|_\infty$, $\|f_T\|_\infty$. Напівнорма Море оператора $T$ дійсно є напівнормою на просторі $\mathcal{L}(L_p)$ і при цьому задовольняє нерівність $\|T\|_M \le \|T\|$. У роботі доводиться, що має місце краща оцінка $\|T\|_M \le v(T)$, де $v(T)$ – числовий радіус оператора $T$.

*Ключові слова: лінійний неперервний оператор, простір $L_p$, верхня і нижня норми Море оператора, верхня і нижня похідні Море оператора, напівнорма Море оператора, числовий радіус оператора.*