

УДК 539.3 : [517.61 : 62-11]

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ИЗГИБА КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Кудин А. В., Тамуров Ю. Н., д. ф.-м. н., профессор, Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

avk256@gmail.com

Предложены уравнения изгиба трехслойных круглых пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим изотропным наполнителем. Построена трехмерная конечно-элементная модель круглой трехслойной пластины. В качестве примера, рассмотрена задача осесимметричного поперечного изгиба трехслойной круглой пластины в линейной постановке, а также задача осесимметричного поперечного изгиба однослойной пластины в линейной и нелинейной постановках.

Ключевые слова: трёхслойная симметричная пластина, круглая пластина, нелинейно-упругий наполнитель, осесимметричный изгиб, конечно-элементная модель.

АНАЛІТИЧНИЙ І ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИГИНУ КРУГЛОЇ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Кудін О. В., Тамуров Ю. М., д. ф.-м. н., професор, Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

avk256@gmail.com

Запропоновано рівняння вигину тришарових круглих пластин симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами і нелінійно-пружним ізотропним заповнювачем. Побудовано тривимірну кінцево-елементну модель круглої тришарової пластины. Як приклад, розглянуто задачу віссиметричного поперечного вигину тришарової круглої пластины в лінійній постановці, а також задача віссиметричного поперечного вигину одношарової пластины в лінійній і нелінійній постановках.

Ключові слова: тришарова симетрична пластина, кругла пластина, нелінійно-пружний заповнювач, віссиметричний вигин, скінченно-елементна модель.

ANALYTICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF CIRCULAR SANDWICH PLATE BENDING UNDER THE LOCAL LOADS

Kudin A. V., Tamurov Yu. N., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Choporov S. V., Ph.D. in Engineering, associate professor

*Zaporizhzhya National University
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

avk256@gmail.com

Sandwich structures are common used in aircraft and shipbuilding, aerospace industry, civil engineering, electronics and other industries. Therefore the problem of developing effective methods for determining the stress-strain state of sandwich structural elements is urgent. There is a need summarizing the classical theories using the improved models, reflecting the behavior of modern materials.

Currently, there are many experimental and theoretical researches devoted to sandwich structures. Well known articles reviews devoted to sandwich structures. Despite the numerical papers reviews, the nonlinear elastic bending problems for the sandwich plate still less investigated.

The paper describes equations of circular sandwich plates bending for plates with isotropic face sheets and nonlinear elastic core. The method of constructing an analytical solution of nonlinear differential equations has been described. The small parameter method is used to represent nonlinear differential equations as a sequence of linear equations. Linear and nonlinear differential equations are solved by Ritz method. Proposed three-dimensional FEM-model of circular sandwich plate. It is compared results of the analytical model and the FEM-model with results of other works, using two problems: 1) the problem of axisymmetric transverse bending of a circular sandwich plate, 2) the problem of

axisymmetric transverse bending of a circular one layer plate. The effect of accounting nonlinear elastic core material on the strain state of the one layer plate is described.

The introduction section of the article contains an overview of previous researches.

Fundamental equations of elasticity theory for the general case of circular sandwich plate are described in the first section. Equation of total potential energy of circular sandwich plate is received.

The second section contains nonlinear differential equations of equilibrium for the symmetrical sandwich plate. The small parameter method is used to represent nonlinear differential equations as a sequence of linear equations. Linear and nonlinear differential equations are solved by Ritz method and proposed approximation for the unknown displacements.

Three-dimensional FEM-model of circular sandwich plate is described in the third section. The mathematical theory of Rvachev's R-functions is used for mathematical modeling of a plate shape. Developed finite element model contains 102277 nodes and 94032 elements. Layers of finite elements correspond to layers of a sandwich.

The fourth section contains values of bending one layer circular plate in linear and nonlinear cases. Results of the analytical model and the FEM-model are compared with results of other well-known scientific works. Values of bending of sandwich circular plate under the local loads contained in the fifth section. We consider three types of transverse load: uniformly distributed load; circular distributed load; ring distributed load. Results of analytical model and FEM-model are compared with results of other well-known scientific works.

Conclusions and prospects for the future research are represented in the last section. Small amount of computation is an advantage of the analytical model. Compact design formulas for use in engineering practice can be obtained on the basis of the analytical model.

Developed FEM-model can be used to calculate the laminated plates with a complex shape.

Prospects for further research related to the consideration of the problems of nonlinear dynamics and stability of sandwich structural elements.

Key words: sandwich symmetrical plate, circular plate, nonlinear-elastic core, axisymmetric bending, FEM-model.

ВВЕДЕНИЕ

Трехслойные элементы конструкций широко применяются в авиа- и судостроении, космической промышленности, гражданском строительстве, радиоэлектронике и других отраслях промышленности. Поэтому актуальной является проблема разработки эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций, а также обобщения классических теорий с применением уточненных моделей, отражающих поведение современных материалов.

Анализ литературных источников по теории и методам расчёта круглых трёхслойных пластин, в частности [2, 5, 7, 14], свидетельствует о том, что описание поведения подобных тонкостенных элементов конструкций чаще всего моделируется на основе линейных определяющих соотношений для изотропных и ортотропных материалов слоёв.

В настоящей работе приводится вариант уравнений изгиба трехслойных пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим по [3] изотропным материалом заполнителя (аналитическая модель).

Разработана трехмерная конечно-элементная модель трехслойной пластины, на основе которой получены численные оценки параметров состояния трехслойной конструкции. На примере задачи осесимметричного поперечного изгиба трехслойной круглой пластины проводится сравнение полученных моделей с известными работами [2, 7]. В качестве частного случая решена задача осесимметричного поперечного изгиба однослойной пластины в линейной и нелинейной постановке; результаты сравниваются с работами [3, 12].

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим круглую трехслойную пластину, которая подвергается воздействию произвольной поперечной нагрузки $q(r, \varphi)$. Внешние слои пластины толщинами δ_1 и δ_2 изготовлены из изотропных материалов, подчиняющихся закону Гука, средний слой пластины толщиной $2h$ выполнен из нелинейно-упругого изотропного материала (рис. 1).

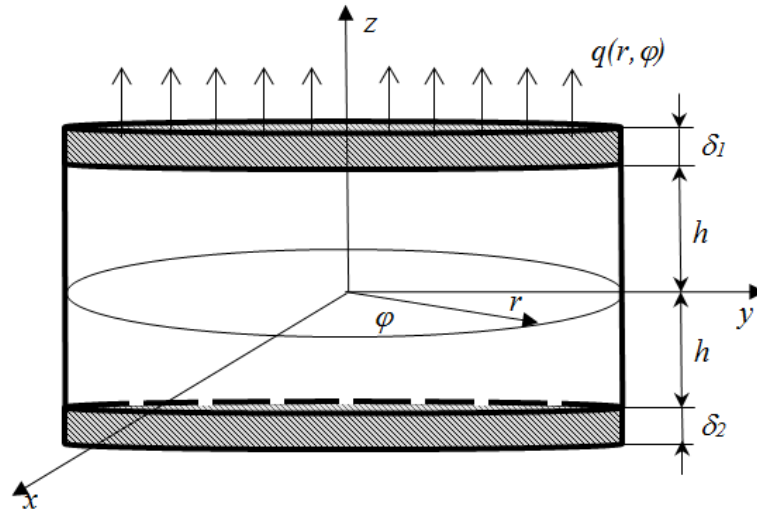


Рис. 1

Для внешних слоев, вследствие их малой толщины, принимается гипотеза Кирхгофа. Напряженное состояние в этих слоях определяется законом Гука [6]

$$h \leq z \leq h + \delta_1:$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi), \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r), \quad \tau_{r\varphi} = G\varepsilon_{r\varphi}, \quad (1.1)$$

$$-h - \delta_2 \leq z \leq -h:$$

$$\sigma_r^* = \frac{E^*}{1-\mu^{*2}}(\varepsilon_r^* + \mu^*\varepsilon_\varphi^*), \quad \sigma_\varphi^* = \frac{E^*}{1-\mu^{*2}}(\varepsilon_\varphi^* + \mu^*\varepsilon_r^*), \quad \tau_{r\varphi}^* = G^*\varepsilon_{r\varphi}^*,$$

где E , G , μ – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно материала слоя $h \leq z \leq h + \delta_1$; обозначения с индексом (*) аналогичны и соответствуют механическим характеристикам материала слоя $-h - \delta_2 \leq z \leq -h$.

Напряженное состояние в среднем слое определяется выражениями [3]

$$-h \leq z \leq h:$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2\varepsilon_0^2)\varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_r - \varepsilon_0), \\ \tilde{\sigma}_\varphi &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2\varepsilon_0^2)\varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_\varphi - \varepsilon_0), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\tilde{\tau}_{r\varphi} = \tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)\tilde{\varepsilon}_{r\varphi}, \quad \tilde{\tau}_{rz} = \tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)\tilde{\varepsilon}_{rz}, \quad \tilde{\tau}_{\varphi z} = \tilde{G}(1 + \gamma_2\psi_0^2)\tilde{\varepsilon}_{\varphi z},$$

где \tilde{G} , \tilde{K} – модули сдвига и объемной упругости материала; ε_0 , ψ_0 – среднее относительное удлинение и интенсивность деформаций сдвига.

Параметр γ_2 характеризует изменение формы элемента конструкции в нелинейно-упругой стадии его деформирования и определяется экспериментально согласно [3, 13]; параметр χ_2 характеризует изменение объема элемента, в дальнейшем будем считать $\chi_2 = 0$.

Деформированное состояние пластины определяется радиальными перемещениями $u_i(r, \varphi)$, угловыми перемещениями $v_i(r, \varphi)$ точек срединных плоскостей внешних слоев ($i = 1, 2$) и прогибом $w(r, \varphi)$.

Исходя из принятых гипотез, перемещения можно представить в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} h \leq z \leq h + \delta_1 : \\ \quad u(r, \varphi, z) = u_1(r, \varphi) + \left(z - h - \frac{\delta_1}{2} \right) w_{,r}, \\ \quad v(r, \varphi, z) = v_1(r, \varphi) + \left(z - h - \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{w_{,\varphi}}{r}; \\ -h - \delta_2 \leq z \leq -h : \\ \quad u^*(r, \varphi, z) = u_2(r, \varphi) + \left(z + h + \frac{\delta_2}{2} \right) w_{,r}, \\ \quad v^*(r, \varphi, z) = v_2(r, \varphi) + \left(z + h + \frac{\delta_2}{2} \right) \frac{w_{,\varphi}}{r}; \\ -h \leq z \leq h : \\ \quad \tilde{u}(r, \varphi, z) = u_1(r, \varphi) a_1(z) + u_2(r, \varphi) a_2(z) + c_0^*(z) w_{,r}, \\ \quad \tilde{v}(r, \varphi, z) = v_1(r, \varphi) b_1(z) + v_2(r, \varphi) b_2(z) + c_0^{**}(z) \frac{w_{,\varphi}}{r}. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

В (1.3), согласно [10, 11], обозначено:

$$a_1(z) = 1 + \alpha_2(z), \quad a_2(z) = -\alpha_2(z), \quad c_0^*(z) = \lambda_3(z) - \alpha \alpha_2(z), \quad c_0^{**}(z) = \lambda_3(z) - \alpha \alpha_3(z),$$

$$b_1(z) = 1 + \alpha_3(z), \quad b_2(z) = -\alpha_3(z), \quad \lambda_3(z) = z - h - \frac{\delta_1}{2}, \quad \alpha = 2h + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2},$$

$$\alpha_2(z) = \frac{\Phi_1(z) - \Phi_1(h)}{\Phi_1(h) - \Phi_1(-h)}, \quad \alpha_3(z) = \frac{\Phi_2(z) - \Phi_2(h)}{\Phi_2(h) - \Phi_2(-h)}, \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{G} f_1(z), \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{G} f_2(z).$$

Функции $f_{1,z}(z)$, $f_{2,z}(z)$ задают законы изменения тангенциальных напряжений $\tilde{\tau}_{xz}$ и $\tilde{\tau}_{yz}$ по толщине среднего слоя.

Относительные деформации слоёв представим в виде, аналогичном [3]

для слоя $h \leq z \leq h + \delta_1$:

$$\varepsilon_r = u_{,r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} v_{,\varphi} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} u_{,\varphi} + v_{,r} - \frac{v}{r}; \quad (1.4)$$

для слоя $-h - \delta_2 \leq z \leq -h$:

$$\varepsilon_r^* = u_{,r}^*, \quad \varepsilon_\varphi^* = \frac{1}{r} v_{,\varphi}^* + \frac{u^*}{r}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^* = \frac{1}{r} u_{,\varphi}^* + v_{,r}^* - \frac{v^*}{r}; \quad (1.5)$$

для слоя $-h \leq z \leq h$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= \tilde{u}_{,r}, \quad \tilde{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{r} \tilde{v}_{,\varphi} + \frac{\tilde{u}}{r}, \quad \tilde{\varepsilon}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \tilde{u}_{,\varphi} + \tilde{v}_{,r} - \frac{\tilde{v}}{r}, \\ \tilde{\varepsilon}_{rz} &= \tilde{u}_{,z} + w_{,r}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi z} = \tilde{v}_{,z} + \frac{1}{r} w_{,\varphi}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для получения дифференциальных уравнений равновесия используется вариационный принцип Лагранжа аналогично [14]:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \iint \left(\int_h^{h+\delta_1} \sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{r\varphi} \varepsilon_{r\varphi} dz + \int_{-h-\delta_2}^{-h} \sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\varphi^* \varepsilon_\varphi^* + \tau_{r\varphi}^* \varepsilon_{r\varphi}^* dz \right)$$

$$+ \int_{-h}^h \left(\tilde{\sigma}_r \tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\sigma}_\varphi \tilde{\varepsilon}_\varphi + \tilde{\tau}_{r\varphi} \tilde{\varepsilon}_{r\varphi} + \tilde{\tau}_{rz} \tilde{\varepsilon}_{rz} + \tilde{\tau}_{\varphi z} \tilde{\varepsilon}_{\varphi z} dz - 2qw(r, \varphi) \right) r dr d\varphi = 0, \quad (1.7)$$

где \mathcal{E} – полная энергия деформации круглой трехслойной пластины.

Подставляя (1.1)-(1.6) в (1.7), выразим полную энергию деформации пластины через вариации перемещений срединных плоскостей каждого слоя.

Дифференциальные уравнения и граничные условия следуют из вариационного уравнения

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (1.8)$$

Применяя к (1.8) формулу Остроградского-Эйлера и учитывая, что вариации перемещений $\delta u_1, \delta u_2, \delta v_1, \delta v_2, \delta w$ независимы, имеем систему пяти дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в общем виде.

2. ПЛАСТИНА СИММЕТРИЧНОГО СТРОЕНИЯ

Рассмотрим далее осесимметричную постановку задачи, когда поперечная нагрузка $q(r) = q$ распределена симметрично относительно оси, проходящей через центр пластины. Упростим исходную модель, приняв для пластины симметричного по толщине строения $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ дополнительно $E = E^* = E_{12}, \mu = \mu^* = \mu_{12}$.

Тогда, ввиду симметрии деформированного состояния пластины и отсутствия угловых перемещений ($u_1 = -u_2 = u, v_1 = -v_2 = v = 0$), в данной постановке задачи нелинейные дифференциальные уравнения равновесия с переменными коэффициентами имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{11} w_{,rrr} + A_{12} w_{,rr} + A_{13} u_{,rr} + A_{14} w_{,r} + A_{15} u_{,r} + A_{16} u(r) + \Phi_1(u^3, w^3, \dots) = 0, \\ A_{21} w_{,rrr} + A_{22} w_{,rr} + A_{23} u_{,rr} + A_{24} w_{,r} + A_{25} u_{,r} + \\ + A_{26} w_{,r} + A_{27} u_{,r} + A_{28} u(r) - rq + \Phi_2(u^3, w^3, \dots) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Нелинейные члены уравнений (2.1) $\Phi_1(u^3, w^3, \dots)$ и $\Phi_2(u^3, w^3, \dots)$, а также коэффициенты $A_{11}, \dots, A_{16}, A_{21}, \dots, A_{28}$ соответствуют работе [4] и здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Граничные условия имеют вид [7]:

а) для свободного опирания

$$w(r) = 0, \quad w_{,rr} + \frac{\mu}{r} w_{,r} = 0, \quad u_{,r} + \frac{\mu}{r} u(r) = 0 \quad \text{при } r = R; \quad (2.2)$$

б) для защемления на контуре

$$w(r) = 0, \quad w_{,r} = 0, \quad u(r) = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (2.3)$$

Одним из подходов к решению системы нелинейных уравнений (2.1) является метод разложения по малому параметру [3], который позволяет рассматривать нелинейные задачи как последовательность уточняющих друг друга решений систем линейных уравнений. Выделим из нелинейных слагаемых системы малый физический параметр λ , связанный с механическими характеристиками нелинейно-упругого среднего слоя соотношением

$$\lambda = \frac{\gamma_2}{(3\tilde{K} + 4\tilde{G})^3},$$

перемещения представим в виде рядов

$$u(r) = u_0(r) + \sum_{i=1}^n \lambda^i u_i(r); \quad w(r) = w_0(r) + \sum_{i=1}^n \lambda^i w_i(r). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.1) и группируя слагаемые по степеням параметра λ , получаем системы уравнений нулевого и последующих приближений разложений искомых перемещений по малому параметру.

Система уравнений нулевого приближения (линейно-упругая постановка задачи) имеет вид:

$$\begin{aligned} A_{11}w_{0,rrr} + A_{12}w_{0,rr} + A_{13}u_{0,rr} + A_{14}w_{0,r} + A_{15}u_{0,r} + A_{16}u_0(r) = 0, \\ A_{21}w_{0,rrr} + A_{22}w_{0,rr} + A_{23}u_{0,rr} + A_{24}w_{0,rr} + A_{25}u_{0,rr} + \\ + A_{26}w_{0,r} + A_{27}u_{0,r} + A_{28}u_0(r) - rq = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

а системы первого и последующих приближений представляются в компактной форме, аналогичной [4]

$$\begin{aligned} A_{11}w_{i,rrr} + A_{12}w_{i,rr} + A_{13}u_{i,rr} + A_{14}w_{i,r} + A_{15}u_{i,r} + A_{16}u_i(r) = \Psi_{1i}, \\ A_{21}w_{i,rrr} + A_{22}w_{i,rr} + A_{23}u_{i,rr} + A_{24}w_{i,rr} + A_{25}u_{i,rr} + \\ + A_{26}w_{i,r} + A_{27}u_{i,r} + A_{28}u_i(r) = \Psi_{2i}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где через Ψ_{1i} и Ψ_{2i} обозначены нелинейные части уравнений.

В данной работе для решения систем (2.5), (2.6) применяется метод Ритца, который может быть использован для решения как линейных, так и нелинейных задач [3]. Линейно-упругой постановке задачи соответствует случай, когда в функционале (1.8) принимается параметр $\gamma_2 = 0$.

В качестве аппроксимаций перемещений по методу Ритца выбраны функции, удовлетворяющие граничным условиям (2.2), (2.3):

а) для свободного опирания

$$\begin{aligned} w(r) = \sum_{s=1}^{\infty} H_s \cos\left(\frac{(2s-1)r\pi}{2R}\right), \\ u(r) = \sum_{s=1}^{\infty} L_s \sin\left(\frac{(2s-1)r\pi}{2R}\right); \end{aligned} \quad (2.7)$$

б) для защемления на контуре

$$\begin{aligned} w(r) = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} H_s \left(\frac{r}{R}\right)^{2s}, \\ u(r) = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \sum_{s=0}^{\infty} L_s \left(\frac{r}{R}\right)^{2s+1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь H_s , L_s – константы, подлежащие определению по методу Ритца. Числовым экспериментом установлено, что учет первых четырех членов в рядах (2.7), (2.8) при вычислениях обеспечивает точность значений аппроксимируемых перемещений до шестого знака после запятой.

3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим задачу исследования напряженно-деформированного состояния равномерно нагруженной круглой трехслойной пластины в конечно-элементной постановке. Учитывая симметричность поставленной задачи, достаточно исследовать лишь сектор пластины (рис. 2), у которого для узлов, соответствующих грани OA , запрещено перемещение в направлении 2, а узлам на грани OB запрещено перемещение в направлении 1. При этом учёт кусочной неоднородности (слоистости) пластины приводит к необходимости исследования конструкции в трехмерной постановке.

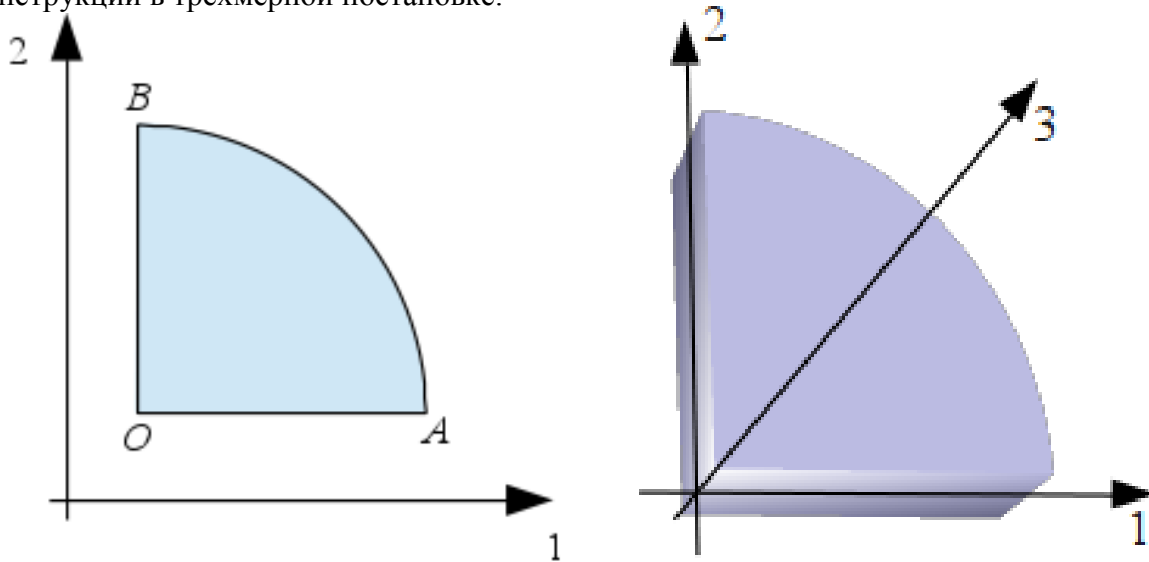


Рис. 2

Используя аппарат теории R-функций В.Л. Рвачева [8, 9], геометрическая модель может быть формализована при помощи выражения

$$f(x, y, z) = (r^2 - x^2 - y^2) \wedge x \wedge y \wedge (z + h + \delta_1) \wedge (h + \delta_2 - z),$$

где r – радиус пластины, x , y , z – пространственные координаты, операция $x_1 \wedge x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ – R-конъюнкция.

Функция $f(x, y, z)$ принимает значения больше нуля во внутренних точках сектора пластины, равна нулю на его границе и меньше нуля во внешних точках (боковые грани ограничены плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, нижняя грань плоскостью $z = -(h + \delta_2)$, а верхняя $z = h + \delta_1$). Следовательно, $f(x, y, z)$ может быть использована в качестве предиката (управляющей функции) для автоматической генерации системы конечных элементов.

Для обеспечения большей точности моделирования при построении дискретной модели необходимо учесть структуру слоев: границы слоев должны аппроксимироваться границами элементов (т.е., вдоль границы слоя материала должна проходить граница слоя конечных элементов). Удовлетворение этого требования совместно с учетом ограничения на соотношение размеров сторон при построении сетки шестигранных элементов [1, 15, 16] приводит к относительно большому числу конечных элементов. Например, при $r = 0,4$, $\delta_1 = \delta_2 = 0,001$ и $2h = 0,016$ сетка состоит из 102277 узлов и 94032 конечных элементов. Вычислительным экспериментом установлено, что если соотношение сторон элементов превышает 10, то вычислительный процесс дает значительно большую погрешность.

С учетом трехслойности, формула для вычисления локальной матрицы жесткости $[K^e]$ примет вид

$$[K^e] = \iiint B^T D B dx dy dz,$$

где

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & H_1 & H_2 & \dots & H_8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_1 & H_2 & \dots & H_8 \end{bmatrix};$$

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{cases} E_{12}, & \text{при } z \geq h \text{ или } z \leq -h, \\ \tilde{E}, & \text{при } -h \leq z \leq h, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_{12}, & \text{при } z \geq h \text{ или } z \leq -h, \\ \tilde{\mu}, & \text{при } -h \leq z \leq h, \end{cases}$$

где E_{12} и μ_{12} – модуль упругости и коэффициент Пуассона внешних слоев; \tilde{E} и $\tilde{\mu}$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона заполнителя; H_i – функции формы шестигранного конечного элемента.

Матрица жесткости вычисляется для каждого конечного элемента и затем производится ее ансамблирование (суммирование по специальным правилам) в глобальную матрицу жесткости, которая совместно с вектором узловых нагрузок определяет систему линейных алгебраических уравнений для вычисления перемещений в узлах.

При этом найденные перемещения в третьем направлении будут соответствовать прогибам пластины.

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ ОДНОСЛОЙНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

В качестве частного случая рассматривается поперечный изгиб круглой однослойной пластины толщиной $h = 18 \cdot 10^{-3}$ м и радиусом $R = 0,4$ м, с модулем сдвига и коэффициентом Пуассона материала равными $G = 8 \cdot 10^4$ МПа и $\mu = 0,27$ соответственно. Полученные результаты сопоставляются с решением С.П. Тимошенко [12] для случая равномерно нагруженной круглой пластины (табл. 1). Через $w_{\max} = w(0)$ обозначен прогиб в

центре пластины, $q = \text{const}$ – интенсивность равномерно распределенной поперечной нагрузки. Результаты расчетов, приведенные в табл. 1, соответствуют моделям: 1 – предложенная аналитическая модель, 2 – разработанная конечно-элементная модель, 3 – модель Тимошенко круглой однослойной пластины [12].

Таблица 1

$q, \text{МПа}$	$w_{\max} = w(0), 10^{-3} \text{ м}$					
	Тип закрепления					
	Свободное опирание			Защемление		
	Модель			Модель		
	1	2	3	1	2	3
0,05	0,778	0,800	0,779	0,186	0,195	0,188
0,07	1,089	1,121	1,090	0,261	0,273	0,263
0,09	1,401	1,441	1,402	0,335	0,351	0,338
0,11	1,712	1,761	1,714	0,410	0,429	0,413

Из сопоставления значений прогибов в табл. 1 можно сделать вывод о соответствии построенных моделей решению Тимошенко [12]. Значения прогибов, полученных по аналитической модели, меньше, чем на 1% отличаются от прогибов модели Тимошенко. Для свободного опирания отклонения прогибов конечно-элементной модели от прогибов по решению Тимошенко находятся в пределах 2,7%-2,8%; для защемления – в пределах 3,7%-3,9%. Полученные результаты позволяют обосновать адекватность построенных моделей по отношению к модели Тимошенко и принципиальную возможность применения этих моделей при дальнейшем исследовании задач изгиба слоистых пластин. Разница численных значений прогибов конечно-элементной модели и модели [12] объясняется использованием гипотезы Кирхгофа в модели Тимошенко, в то время, как трехмерная конечно-элементная модель свободна от подобных ограничений.

Далее рассматривается задача изгиба однослойной круглой пластины из нелинейно-упругого материала. Для этого, при применении метода Ритца учитываются все члены функционала (1.8), т.е. учитывается $\gamma_2 \neq 0$. Выполним расчет для пластины с параметрами: толщина пластины $h = 18 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, радиус пластины $R = 0,4 \text{ м}$; модуль сдвига и модуль объемной упругости материала – $G = 2,77 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $K = 6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, параметр $\gamma_2 = 3,878 \cdot 10^5$. Вычисления проводятся для случая защемленного контура пластины и сравниваются с соответствующими результатами Каудерера [3]. Модели, используемые при расчетах, обозначены в табл. 2 следующим образом: 1 – предложенная аналитическая модель, 2 – решение Каудерера [3].

Таблица 2

$q, \text{МПа}$	$w_{\max} = w(0), 10^{-3} \text{ м}$	
	Модель	
	1	2
0,05	0,514	0,517
0,07	0,714	0,718
0,09	0,909	0,912
0,11	1,098	1,094

При вычислении значений прогибов для табл. 2 учитывались первые четыре члена рядов (2.8).

Как видно из табл. 2, отклонения значений прогибов аналитической модели от прогибов [3] находятся в пределах 0,3% - 0,6%, что говорит о возможности применения аналитической модели для решения нелинейных задач теории пластин.

5. ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Поскольку нулевое приближение дает наиболее существенный вклад в разложения искомым перемещений по малому параметру, рассмотрим далее задачу о поперечном изгибе круглой трехслойной пластины в линейной постановке и проведем сравнительный анализ полученных решений с известными результатами.

Расчеты выполним для пластины со следующими параметрами: толщина среднего слоя $2h = 16 \cdot 10^{-3}$ м, толщины внешних слоев $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 1 \cdot 10^{-3}$ м, радиус пластины $R = 0,4$ м; модуль сдвига и коэффициент Пуассона внешних слоев – $G = 8 \cdot 10^4$ МПа и $\mu = 0,27$ соответственно, модуль сдвига и модуль объемной упругости заполнителя – $\tilde{G} = 2,77 \cdot 10^4$ МПа, $\tilde{K} = 6 \cdot 10^4$ МПа. Тангенциальные напряжения $\tilde{\tau}_{xz}$ и $\tilde{\tau}_{yz}$ изменяются линейно по толщине среднего слоя.

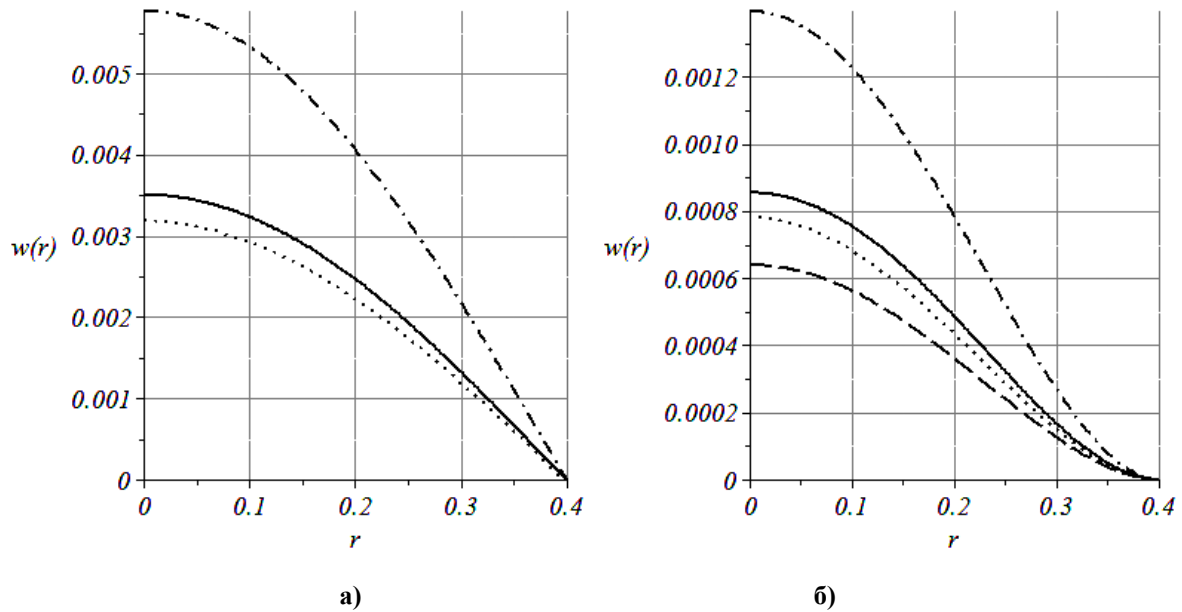
5.1. Распределенная нагрузка. Принимается, что на рассматриваемую пластину действует постоянная распределенная нагрузка $q = \text{const}$.

В табл. 3 для линейно-упругой задачи приводятся значения прогиба $w(0)$ в центре пластины при различных граничных условиях. Значения прогибов $w(0)$, полученные из работ [2, 7], сопоставляются со значениями соответствующих прогибов, полученными из решения методом Ритца уравнений (2.5) и прогибами конечно-элементной модели. Модели, используемые при расчетах, обозначены в табл. 3 следующим образом: 1 – предложенная аналитическая модель, 2 – разработанная конечно-элементная модель; 3 – модель А.П. Прусакова [7], 4 – модель А.Г. Горшкова и др. [2].

Таблица 3

q , МПа	$w_{\max} = w(0), 10^{-3}$ м						
	Тип закрепления						
	Свободное опирание			Защемление			
	Модель			Модель			
	1	2	3	1	2	3	4
0,05	1,593	1,449	2,621	0,389	0,357	0,635	0,291
0,07	2,230	2,029	3,670	0,544	0,499	0,889	0,407
0,09	2,867	2,609	4,718	0,699	0,642	1,142	0,523
0,11	3,504	3,188	5,767	0,855	0,784	1,396	0,639

На рис. 3 приведены прогибы трехслойной пластины для случая свободного опирания (рис. 3 а) и для случая защемления на контуре (рис. 3 б); интенсивность нагрузки принята $q = 0,11 \text{ МПа}$.



— — аналитическая модель, — конечно-элементная модель,
 - · - · - · - модель Прусакова, - - - - модель Горшкова.

Рис. 3

5.2. Нагрузка, равномерно распределенная по кругу. Исследуется случай, когда на рассматриваемую пластину действует локальная поперечная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кругу радиуса $R_a \leq R$.

Данную нагрузку представим в виде [2]

$$q(r) = q_0 H(R_a - r),$$

где q_0 — амплитуда нагрузки, $H(x)$ — функция Хевисайда, заданная следующим образом

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

В табл. 4 приводятся значения максимального прогиба в центре пластины при различных граничных условиях и радиусе круга нагрузки $R_a = 0,2 \text{ м}$. Обозначения аналогичны табл. 3.

Таблица 4

$q, \text{ МПа}$	$w_{\max} = w(0), 10^{-3} \text{ м}$				
	Тип закрепления				
	Свободное опирание		Защемление		
	Модель		Модель		
	1	2	1	2	4
0,05	0,775	0,715	0,249	0,230	0,186
0,07	1,058	1,000	0,348	0,323	0,260
0,09	1,396	1,286	0,447	0,414	0,334
0,11	1,706	1,572	0,547	0,506	0,408

5.3. Нагрузка, равномерно распределенная по кольцу. На пластину действует локальная поперечная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кольцу $R_a \leq r \leq R_b$.

Данную нагрузку запишем в виде [2]

$$q(r) = q_0 (H(R_b - r) - H(R_a - r)),$$

В табл. 5 приводятся значения максимального прогиба в центре пластины при различных граничных условиях и радиусах кольца нагрузки $R_a = 0,1$ м, $R_b = 0,3$ м. Обозначения табл. 5 аналогичны предыдущим.

Таблица 5

q , МПа	$w_{\max} = w(0), 10^{-3}$ м				
	Тип закрепления				
	Свободное опирание		Защемление		
	Модель		Модель		
	1	2	1	2	4
0,05	1,107	1,000	0,280	0,253	0,209
0,07	1,550	1,399	0,393	0,355	0,293
0,09	1,994	1,799	0,505	0,456	0,376
0,11	2,437	2,199	0,617	0,557	0,460

Из сравнения полученных значений прогибов табл. 3-5 можно сделать вывод о соответствии результатов, полученных на основе построенных в работе аналитической и конечно-элементной моделей результатам известных моделей [2, 7]. В силу различных упрощающих гипотез значения прогибов табл. 3-5 можно интерпретировать как разные оценки области точного решения рассмотренных задач. Отклонения прогибов аналитической модели от других моделей находятся в пределах 8%-40% для всех рассмотренных задач и условий закрепления; отклонения модели А.Г. Горшкова [2] изменяются в пределах 17%-54% по сравнению с другими моделями, а отклонения модели А.П. Прусакова [7] – 63%-81%.

Данные отклонения объясняются тем, что при построении аналитической модели и моделей [2, 7] применялись различные упрощающие гипотезы и как следствие, в тензорах напряжений и деформаций учитывалось различное количество компонент. При этом, при построении конечно-элементной модели учитывались все компоненты тензора напряжений и тензора деформаций (трехмерная постановка задачи), а в аналитической модели – в зависимости от слоя от трех до пяти.

ВЫВОДЫ

В статье предложен вариант дифференциальных уравнений равновесия трехслойных пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и нелинейно-упругим по [3] изотропным материалом заполнителя. Построена трехмерная конечно-элементная расчетная модель.

Рассмотрена задача осесимметричного поперечного изгиба изотропной круглой пластины в линейно- и нелинейно-упругой постановках. Также рассмотрена задача осесимметричного поперечного изгиба трехслойной симметричной круглой пластины под действием локальных нагрузок в линейно-упругой постановке.

Отметим, что в основе приведенных в табл. 1-5 расчётных моделей заложены различные упрощающие гипотезы, что обуславливает расхождения в вычисленных значениях прогибов. Так, при построении конечно-элементной модели использовалась трехмерная постановка задачи. В модели А.Г. Горшкова [2] для внешних слоев принимается гипотеза Кирхгофа, для заполнителя же принимается гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. В предлагаемой авторами аналитической модели принимаются

схожие упрощающие гипотезы, что и в [2], однако применяется приближенный метод Ритца при решении дифференциальных уравнений. Существенные отклонения результатов модели А.П. Прусакова [7] объясняются тем, что здесь заполнитель считается легким, в отличие от других вышеупомянутых моделей.

Сравнение полученных значений прогибов на основе предложенной аналитической и конечно-элементной моделей с работами [2, 3, 7, 12] свидетельствует об адекватности построенных моделей и возможности решения на их основе более широкого класса задач статики и динамики трехслойных пластин.

На основе аналитической модели могут быть получены компактные расчетные формулы для применения в инженерной практике. В дальнейшем, при решении систем дифференциальных уравнений первого и последующих приближений разложения по малому параметру, становится возможным учет влияния нелинейной упругости материала заполнителя (при $\gamma_2 \neq 0$) на деформированное состояние трехслойной пластины.

Недостатком разработанной трехмерной конечно-элементной модели является требование относительно большого объема вычислений, по сравнению с приведенными аналитическими моделями. Однако такой подход может использоваться для расчета многослойных пластин нестандартной формы, а также для тестовой проверки аналитических решений двумерных задач, использующих упрощающие гипотезы.

Перспективы дальнейших исследований, на наш взгляд, связаны с исследованием нелинейных задач устойчивости и динамики тонкостенных элементов конструкций типа трехслойных круглых пластин и пологих оболочек. Кроме того, возможна разработка гибридных аналитико-вычислительных подходов на базе конечных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоменюк С. И. Дискретизация трехмерных областей, заданных R-функциями, на шестигранные конечные элементы / С. И. Гоменюк, С. В. Чопоров // Вестник Херсонского национального технического университета. — 2011. — №3(42). — С. 146-153.
2. Горшков А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 576 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер ; пер. с нем. — М. : Изд-во иностр. лит., 1961. — 777 с.
4. Кудин А. В. Применение метода малого параметра при моделировании изгиба симметричных трехслойных пластин с нелинейно-упругим заполнителем / А. В. Кудин, Ю. Н. Тамуров // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля. — 2011. — №11(165). — С. 32-40.
5. Михайлов И. П. Некоторые задачи осесимметричного изгиба круглых трехслойных пластин с жестким заполнителем / И. П. Михайлов // Труды Ленинградского кораблестроительного института. — 1969. — №66. — С. 125-131.
6. Можаровський М. С. Теорія пружності, пластичності і повзучості : Підручник / М. С. Можаровський. — К. : Вища шк., 2002. — 308 с.
7. Прусаков А. П. Некоторые задачи изгиба круглых трехслойных пластин с легким заполнителем / А. П. Прусаков // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек. — 1961. — №1. — С. 293-297.
8. Рвачев В. Л. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций / В. Л. Рвачев, А. В. Толок, Р. А. Уваров, Т. И. Шейко // Вісник Запорізького державного університету. — 2000. — №2. — С. 119-130.

9. Рвачев В. Л. Введение в теорию R-функций / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко // Проблемы машиностроения. — 2001. — Т. 4, №1-2. — С. 46-58.
10. Тамуров Ю. Н. Вариант обобщённой теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжата физически нелинейного заполнителя / Ю. Н. Тамуров // Прикл. механика. — 1990. — Т. 26, №12. — С. 39-45.
11. Тамуров Ю. Н. Уравнения изгиба и устойчивости трехслойных оболочек с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов / Ю. Н. Тамуров // Исслед. по теор. пластин и оболочек. — 1990. — №20. — С. 102-112.
12. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М. : Физматгиз, 1964. — 636 с.
13. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов / И.А. Цурпал. — Техника, 1976. — 176 с.
14. Liu Renhuai. Nonlinear Bending of Circular Sandwich Plates / Liu Renhuai // Applied Mathematics and Mechanics. English Edition. — 1981. — Vol. 2, No. 2. — P. 189-208.
15. Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders // Engineering with Computers. — 1996. — №12. — P. 168-177.
16. Schneiders R. Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders, R. Schindler, F. Weiler // 5th Annual International Meshing Roundtable. — 1996. — P. 205-216.

REFERENCES

1. Gomenyuk S.I. Diskretizaciya trehmernyh oblastej, zadannyh R funkciyami, na shestigrannye konechnye e'lementy / S.I. Gomenyuk, S.V. Choporov // Vestnik Hersonskogo nacional'nogo tehniceskogo universiteta. — 2011. — No. 3(42). — PP. 146-153.
2. Gorshkov A.G. Mehanika sloistyh vyazkouprugoplasticheskikh e'lementov konstrukcij / A.G. Gorshkov, E'.I. Starovojtov, A.V. Yarovaya. — М. : FIZMATLIT, 2005. — 576 p.
3. Kauderer G. Nelinejnaya mehanika / G. Kauderer ; per. s nem. — М. : Izd-vo inostr. lit., 1961. — 777 p.
4. Kudin A.V. Primenenie metoda malogo parametra pri modelirovanii izgiba simmetrichnyh trehslojnyh plastin s nelinejno-uprugim zapolnitelem / A.V. Kudin, Yu.N. Tamurov // Visnik Shidnoukrains'kogo nacional'nogo universitetu im. Volodimira Dalya. — 2011. — No. 11(165). — PP. 32-40.
5. Mihajlov I.P. Nekotorye zadachi osesimmetrichnogo izgiba kruglyh trehslojnyh plastin s zhestkim zapolnitelem / I.P. Mihajlov // Trudy Leningradskogo korablestroitel'nogo instituta. — 1969. — No. 66. — PP. 125-131.
6. Mozharovs'kij M.S. Teoriya pruzhnosti, plastichnosti i povzuchosti: Pidruchnik / M.S. Mozharovs'kij. — К. : Vishha shk., 2002. — 308 p.
7. Prusakov A.P. Nekotorye zadachi izgiba kruglyh trehslojnyh plastin s legkim zapolnitelem / A.P. Prusakov // Tr. konf. po teor. plastin i obolochek. — 1961. — No. 1. — PP. 293-297.
8. Rvachev V.L. Novye podhody k postroeniyu uravnenij trehmernyh lokusov s pomoshh'yu R funkcij / V.L. Rvachev, A.V. Tolok, R.A. Uvarov, T.I. Shejko // Visnik Zaporiz'kogo derzhavnogo universitetu. — 2000. — No. 2. — PP. 119-130.
9. Rvachev V.L. Vvedenie v teoriyu R-funkcij / V.L. Rvachev, T.I. Shejko // Problemy mashinostroeniya. — 2001. — Т. 4, No. 1-2. — PP. 46-58.

10. Tamurov Yu.N. Variant obobshhyonnoj teorii tryohslojnyx pologixh obolochek s uchyotom obzhatiya fizicheski nelinejnogo zapolnitelya / Yu.N. Tamurov // Prikl. mehanika. –1990. – T. 26, No. 12. – PP. 39-45.
11. Tamurov Yu.N. Uravneniya izgiba i ustojchivosti trehslojnyh obolochek s ortotropnymi i nelinejno-uprugimi svojstvami materialov / Yu.N. Tamurov // Issled. po teor. plastin i obolochek. – 1990. – No. 20. – PP. 102-112.
12. Timoshenko S.P. Plastinki i obolochki / S.P. Timoshenko, S. Vojnovskij-Kriger. – M. : Fizmatgiz, 1964. – 636 p.
13. Curpal I.A. Raschet e'lementov konstrukcij iz nelinejno-uprugih materialov / I.A. Curpal // Tehnika. – 1976. – 176 p.
14. Liu Renhuai. Nonlinear Bending of Circular Sandwich Plates / Liu Renhuai // Applied Mathematics and Mechanics. English Edition. - 1981. - Vol. 2, No. 2. – PP. 189-208.
15. Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders // Engineering with Computers. – 1996. – No. 12. – PP. 168-177.
16. Schneiders R. Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders, R. Schindler, F. Weiler // 5th Annual International Meshing Roundtable. – 1996. – P. 205-216.

УДК 517.958 : 534.1 : 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОЗАХИСНОЇ СИСТЕМИ ІЗ МАЯТНИКОВИМ ГАСНИКОМ

Ластівка І. О., д. т. н., доцент

*Національний авіаційний університет,
просп. Космонавта Комарова, 1, м. Київ-058, 03680, Україна*

iola@nau.edu.ua

Розглядаються вимушені коливання віброзахисної механічної системи твердих тіл «маятниковий гасник типу «гантелі» – несуче тіло» під дією зовнішнього гармонічного збудження. Сформульовано динамічні рівняння сумісного руху елементів віброзахисної системи та досліджено віброзахисні ефекти, які досягаються при використанні гасника.

Ключові слова: моделювання динаміки віброзахисної системи, вимушені коливання, числовий аналіз, віброзахисні ефекти.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛОВОЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВИБРОЗАЩИТНОЙ СИСТЕМЫ С МАЯТНИКОВЫМ ГАСИТЕЛЕМ

Ластивка И. А., д. т. н., доцент

*Национальный авиационный университет,
просп. Космонавта Комарова, 1, г. Киев-058, 03680, Украина*

iola@nau.edu.ua

Рассматриваются вынужденные колебания виброзащитной механической системы твердых тел «маятниковый гаситель типа «гантели» – несущее тело» под действием внешнего гармонического возбуждения. Сформулированы динамические уравнения совместного движения элементов виброзащитной системы и исследованы виброзащитные эффекты, которые достигаются при использовании гасителя.

Ключевые слова: моделирование динамики виброзащитной системы, вынужденные колебания, числовой анализ, виброзащитные эффекты.