УДК 517.5

ІЗОМЕТРІЇ ТА СТИСКАЮЧІ ФУНКЦІЇ КІЛЬЦЯ Z_2

(Дослідження ізометричності функцій кільця Z_2)

Морозов Д. І., к.ф.-м.н.

Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
вул. Сковороди 2, Київ 04655, Україна

denis.morozov178@gmail.com

Робота є продовженням роботи [2], у якій досліджується ізометричність поліномів кільця Z_2. У роботі вивчається представлення автоморфізмів бінарного кореневого дерева функціями кільця Z_2.
Ключові слова: кореневе дерево, автоморфізм дерева, ізометрія, 2-адична функція 3.

ИЗОМЕТРИИ И СЖИМАЮЩИЕ ФУНКЦИИ КОЛЬЦА Z_2

Морозов Д. И., к. ф.-м. н.

Национальный университет «Киево-Могилянская академия»,
ул. Сковороди 2, Киев 04655, Украина

denis.morozov178@gmail.com

Работа является продолжением работы [2], в которой исследуется изометричность полиномов кольца Z_2. В работе изучается представление автоморфизмов бинарного корневого дерева функциями кольца Z_2.
Ключевые слова: корневое дерево, автоморфизм дерева, изометрия, 2-адичная функция 3.

ISOMETRIES And SQUEEZING FUNCTIONS Z_2 RING

Morozov D. I., Ph.D. in Physics and Maths

National University Kiev-Mohyla Academy,
Skovoroda str., 2, Kyiv 04655, Ukraine

denis.morozov178@gmail.com

This work is a continuation of paper [2], which investigated izometrical polynomials of the ring Z_2. In this paper we study representations of automorphisms of binary rooted tree with functions of ring Z_2. The aim of the work is to construct requirements which describes isometrical functions over the ring of integer 2-adic numbers. This work devoted to the possibility of providing automorphisms of homogeneous rooted tree with 2-adic isometries. This paper continues investigations of 2-adic groups' automatous with the 2-adic isometrical functio ns' technique. Izometric and compression functions build the important class of 2-adic function to describe the group automatous that's why we investigate them in this paper.
Key words: rooted tree, tree automorphism, izometries, 2-adic function.

Вивчення властивостей групи автоморфізмів кореневого однорідного дерева є надзвичайно актуальним. Ця тема висвітлюється в роботах Р.І. Григорчука, В.І. Сущанського, С. Сідкі, Ч.К. Гупти та інших дослідників.

Зручною для роботи з автоморфізмами кореневого однорідного дерева валентності р є техніка їх представлення у вигляді функцій кільця цілих p-адичних чисел Z_p. Наприклад, у статті [2] досліджена техніка представлення автоморфізмів кореневого однорідного дерева поліномами кільця цілих 2-адичних чисел Z_2.

У цій статті наводиться індуктивна побудова класу функцій кільця Z_2, що є стискаючими. У цьому класі виділяється підмножина, що відповідає ізометріям кільця цілих 2-адичних чисел Z_2, а отже – автоморфізмам кореневого однорідного дерева.

Ототожнюючи кодування бінарного кореневого дерева з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел, отримаємо представлення автоморфізма дерева функцією на кільці цілих 2-адичних чисел Z_2.

Ребрам бінарного кореневого дерева можна приписати мітки 0,1 для лівого та правого ребра, що йдуть униз від кожної вершини. При цьому, кожному нескінченному шляху без циклів на дереві, що починається з кореня (будемо називати такий шлях кінцем дерева), буде відповідати нескінченна послідовність нулів та одиниць, яку можна зіставити з цілим 2-адичним числом. Після цього автоморфізми T_2 можуть бути ототожнені з бієкціями кільця цілих 2-адичних чисел Z_2.

Наприклад, визначимо рекурентно автоморфізм дерева T_2:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma,$$

$$id = (id, id).$$

Тут вказано, що автоморфізм ε діє на лівому піддереві тотожньо, на правому самоподібно, а σ переставляє ці піддерева.

З іншого боку, автоморфізм ε може бути визначений як функція.

Ототожнюючи кодування кінців бінарного дерева з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел отримаємо представлення автоморфізма T_2 функцією на Z_2. Кожен автоморфізм дерева α задає функцію f_α за правилом: якщо автоморфізм α переводить кінець x дерева T_2 в кінець y дерева T_2, то $f_\alpha(x) = y$. Наприклад автоморфізм бінарного кореневого дерева ε при такому представленні задається функцією кільця цілих 2-адичних чисел $f(x) = x + 1$ і тому має назву «додавальна машина» (adding machine).

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, що б функція задавала автоморфізм, необхідно, що б ця функція пару кінців дерева T_2 з однаковим початком 2-кового запису переводила в пару кінців з однаковим початком 2-кового запису тієї ж самої довжини.

Приклад 0.1 *Функція* $f(x) = 2x$ *переводить пару ...1111 та ...0000 в пару ...1110 та ...0000 відповідно. Перша пара має спільний початок 2-кового запису довжини 0, друга – довжини 1, тобто функція* $f(x) = 2x$ *не є автоморфізмом дерева.*

Приклад 0.2 *Функція* $f(x) = x^2$ *не є автоморфізмом дерева.*

Дійсно, оскільки має місце співвідношення

$$(2^n \cdot t + x)^2 = 2^{2n} \cdot t^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t + x^2,$$

тобто

$$(2^n \cdot t_1 + x)^2 - (2^n \cdot t_2 + x)^2 =$$

$$= (2^{2n} \cdot t_1^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_1 + x^2) - (2^{2n} \cdot t_2^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_2 + x^2) =$$

$$= 2^{n+1}(t_2 - t_1)(2^{n-1}(t_2 + t_1) + 1),$$

то для пари 2-адичних чисел x_1, x_2, що мають спільний початок 2-кового запису ненульової довжини n, пара x_1^2, x_2^2 має спільний початок довжини як найменше довжини $n+1$, отже відображення $f(x) = x^2$ є неперервним, але не є автоморфізмом.

Втім, клас функцій, що є автоморфізмами дерева, є досить широким. Далі наводиться індуктивна побудова класу функцій кільця Z_2, що є стискаючими. У цьому класі виділяється підмножина, що відповідає ізометріям, а отже автоморфізмам кореневого однорідного дерева.

0.1 СТИСКАЮЧІ ФУНКЦІЇ КІЛЬЦЯ Z_2

Означимо метрику ρ на кільці Z_2. Кожен елемент $x \in Z_2$ можна єдиним чином представити у вигляді $x = u * 2^n$, де u – обертовний елемент кільця Z_2.

Далі під фразою $a \in Z_2$ ділиться на $b \in Z_2$, будемо розуміти, що $\frac{a}{b}$ належить кільцю Z_2.

Означення 1.1 *Функція* $ord_2(x)$ *для* $x \in Z_2$ *означається наступним чином. Нехай* $x = u * 2^n$, *де* u *– обертовний елемент кільця* Z_2. *Тоді* $ord_2(x) = n$.

Означення 1.2 *Означимо відстань* $\rho(x, y)$ *для* $x, y \in Z_2$:

$$\rho(x, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ord_2(x-y)}.$$

Означення 1.3 *Функція* $f : Z_2 \to Z_2$ *називається ізометрією, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y).$$

Множину ізометрій позначимо як $AutZ_2$.

Означення 1.4 *Ізометрія* $f : Z_2 \to Z_2$ *називається шарово-транзитивною, якщо* $\forall n \in \mathrm{N}$ $f^k(0)$ *має* 2^n *різних значень по модулю* 2^n. *Множину шарово-транзитивних ізометрій позначимо як* $STAutZ_2$.

Лема 1.1 *Функція* f *є ізометрією тоді, і тільки тоді, коли дріб* $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ *належить групі одиниць кільця* Z_2 *для всіх* $x, y \in Z_2$.

Proof. Представимо $f(x) - f(y)$ та $x - y$ у вигляді: $f(x) - f(y) = u_1 * 2^{n_1}$, $x - y = u_2 * 2^{n_2}$, де – u_1, u_2 обертовні елементи кільця Z_2. Оскільки f – ізометрія, то $n_1 = n_2$. Отже маємо:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{u_1}{u_2} = u_1 * u_2^{-1},$$

тобто дріб належить групі одиниць кільця Z_2.

З іншого боку, якщо для всіх $x, y \in Z_2$ ($x - y = u_2 * 2^{n_2}$, $f(x) - f(y) = u_1 * 2^{n_1}$) добуток $2^{n_1 - n_2} * u_1 * u_2^{-1}$ належить групі одиниць кільця Z_2, то $n_1 = n_2$, тому f – ізометрія.

Означення 1.5 *Функція* $f : Z_2 \to Z_2$ *називається стискаючою, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y).$$

Множину стискаючих функцій позначимо як $EndZ_2$.

Означення 1.6 *Функція* $f: Z_2 \to Z_2$ *називається строго-стискаючою, якщо*

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y).$$

Множину строго-стискаючих функцій позначимо як $CEndZ_2$.

Зауваження 1.1 *Нехай різниця* $x - y$ *ділиться на* 2^n $(n \in \mathrm{N})$. *Тоді те, що функція* $f(x)$, *є:*

a) ізометрією, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} (дріб $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ належить групі одиниць кільця Z_2);

b) строго стискаючою, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^{n+1}(дріб $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ належить $2 * Z_2$);

c) стискаючою, рівносильно умові: $f(x) - f(y)$ ділиться на 2^n (дріб $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ належить Z_2).

Зауваження 1.2 *Легко бачити, що об'єднання множини ізометрій з множиною строго стискаючих функцій є власною підмножиною множини стискаючих функцій.*

Теорема 1.1 *Якщо* f *– стискаюча,* g *– стискаюча, то* $f + g$ *– стискаюча.*

Proof. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) = (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y)).$$

Права частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, другий доданок також ділиться на 2^n, оскільки f та g – стискаючі функції. Отже, вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f + g$ є стискаючою функцією.

Теорема 1.2 *Якщо* f *– ізометрія,* g *– строго стискаюча, то* $f + g$ *– ізометрія.*

Proof. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) = (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y)).$$

Права частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}, другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f – ізометрія, а g – строго стискаюча функція. Отже вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f + g$ є ізометрією.

Теорема 1.3 *Якщо* f *– строго стискаюча,* g *– строго стискаюча, то* $f + g$ *– строго стискаюча.*

Proof. Нехай різниця $x - y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Розглянемо різницю

$$(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y)) = (f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y)).$$

Права частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1}, другий доданок ділиться на 2^{n+1}, оскільки f та g – строго стискаючі функції. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1}, і звідси маємо, що $f+g$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 1.4 *Якщо* f *– ізометрія,* g *– ізометрія, то* $f+g$ *– строго стискаюча функція кільця* Z_2.

Proof.

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}+\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=a_1+a_2;$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\quad a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

Оскільки f та g – ізометрії, то a_1 та a_2 належать множині обертовних елементів кільця Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже a_1+a_2 ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$ і тому $f+g$ – строго стискаюча функція.

Наслідок 1.1 *Якщо* f *,* g *та* h *– ізометрії, то* $f+g+h$ *– ізометрія.*

Дійсно, оскільки за теоремою 1.4 $g+h$ – строго стискаюча, а f – ізометрія, то за теоремою 1.2 $f+(g+h)$ – ізометрія.

Теорема 1.5 *Якщо* f *– стискаюча, то* $2*f$ *– строго стискаюча функція.*

Proof. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді $f(x)-f(y)$ також ділиться на 2^n, оскільки f є стискаючою. Розглянемо різницю

$$2*f(x)-2*f(y)=2*(f(x)-f(y)).$$

Права частина рівності ділиться на 2^{n+1}, отже маємо, що $2*f$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 1.6 *Якщо* f *– стискаюча,* g *– стискаюча, то* $f*g$ *– стискаюча.*

Proof. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x)-f(y)$ та $g(x)-g(y)$ обидві діляться на 2^n, оскільки f та g – стискаючи функції.

Розглянемо різницю

$$f(x)*g(x)-f(y)*g(y)=f(x)*(g(x)-g(y))+g(y)(f(x)-f(y)).$$

Права частина рівності складається з двох доданків. Обидва доданки діляться на 2^n. Отже вся сума ділиться на 2^n і звідси маємо, що $f*g$ є стискаючою функцією.

Теорема 1.7 *Якщо* f *– строго стискаюча,* g *– строго стискаюча, то* $f*g$ *– строго стискаюча.*

Proof. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x)-f(y)$ та $g(x)-g(y)$ обидві діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g – строго стискаючі функції.

Розглянемо різницю

$$f(x)*g(x)-f(y)*g(y)=f(x)*(g(x)-g(y))+g(y)(f(x)-f(y)).$$

Права частина рівності складається з двох доданків. Обидві доданки діляться на 2^{n+1}. Отже вся сума ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f*g$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 1.8 *Нехай* f *– ізометрія, а* g *– стискаюча функція.*

Тоді $f*(2*g+1)$ – ізометрія.

Proof. Нехай різниця $x-y$ ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Тоді різниці $f(x)-f(y)$ та $g(x)-g(y)$ обидві діляться на 2^n, але не діляться на 2^{n+1}, оскільки f та g – ізометрії.

Розглянемо різницю

$$f(x)*(2*g(x)+1)-f(y)*(2*g(y)+1)=$$
$$=2*f(x)*(g(x)-g(y))+(2*g(y)+1)*(f(x)-f(y)).$$

Права частина рівності складається з двох доданків. Перший доданок ділиться на 2^{n+1}, другий доданок ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1}. Отже, вся сума ділиться на 2^n, але не ділиться на 2^{n+1} і звідси маємо, що $f*(2*g+1)$ є ізометрією.

Наслідок 1.2 *Нехай* f *– ізометрія, а* g *– ізометрія, або строго стискаюча. Тоді* $f*(2*g+1)$ *– ізометрія.*

Дійсно, і ізометрія і строго стискаюча функція є стискаючими.

Теорема 1.9 *Нехай функції* f *та* g *є стискаючими.*

Тоді $2*f*g$ – строго стискаюча функція.

Proof. Розглянемо різницю:

$$\frac{2f(x)*g(x)}{x-y}-\frac{2f(y)*g(y)}{x-y}=$$
$$=\frac{2((f(x)-f(y))g(x)+f(y)(g(x)-g(y)))}{x-y}=$$
$$=2g(x)*a_1+2f(y)*a_2;$$
$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\ a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

Оскільки f та g – стискаючі, то a_1 та a_2 належать Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже $2g(x)*a_1+2f(y)*a_2$ ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$ і тому $2*f*g$ – строго стискаюча функція.

Наслідок 1.3 *Нехай* f *– ізометрія, або строго стискаюча функція,* g *- ізометрія, або строго стискаюча функція. Тоді* $2*f*g$ *– строго стискаюча функція.*

Теорема 1.10 *Якщо* f *– ізометрія, а* g *– стискаюча функція, то*

$$\frac{f}{2*g+1}$$

– ізометрія.

Proof. Розглянемо різницю:

$$\frac{f(x)}{2g(x)+1}-\frac{f(y)}{2g(y)+1}=\frac{2(f(x)g(y)-f(y)g(x))+f(x)-f(y)}{(2g(x)+1)(2g(y)+1)}.$$

Знаменник не впливає на парність дробу, оскільки є добутком обертовних елементів кільця Z_2.

Розглянемо відношення:

$$\frac{2(f(x)g(y)-f(y)g(x))+f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=\frac{2((f(x)-f(y))g(y)-f(y)(g(x)-g(y)))}{x-y}+\frac{(f(x)-f(y))}{x-y}=$$

$$=\frac{2(f(x)-f(y))g(y)}{x-y}-\frac{2f(y)(g(x)-g(y))}{x-y}+\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=$$

$$=(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2;$$

$$a_1=\frac{f(x)-f(y)}{x-y},\quad a_2=\frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

Оскільки f – ізометрія, а g – стискаюча функція, то a_1 належить множині обертовних елементів кільця Z_2, а a_2 належить Z_2 для всіх $x,y\in Z_2$. Отже

$$(2g(y)+1)*a_1-2f(y)*a_2$$

належить множині обертовних елементів кільця Z_2, і тому $\frac{f}{2*g+1}$ – ізометрія.

Наслідок 1.4 *Нехай* f *– ізометрія, а* g *– ізометрія, або строго стискаюча. Тоді* $\frac{f}{2*g+1}$ *– ізометрія.*

Теорема 1.11 *Якщо* f *– строго стискаюча функція,* g *– строго стискаюча функція, то суперпозиція* $f\circ g=g(f(x))$ *– строго стискаюча функція.*

Proof. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}$$

ділиться на 2 для всіх $x,y\in Z_2$;

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}*\frac{g(f(x))-g(f(y))}{f(x)-f(y)}.$$

Права частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб ділиться на 2, оскільки f – строго стискаюча функція. Другий дріб також ділиться на 2, оскільки g – строго стискаюча функція. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f\circ g=g(f(x))$ є строго стискаючою функцією.

Теорема 1.12 *Якщо* f *– ізометрія,* g *– ізометрія, то суперпозиція* $f\circ g=g(f(x))$ *– ізометрія.*

Proof. Скористаємось лемою 1.1. Покажемо, що

$$\frac{g(f(x))-g(f(y))}{x-y}$$

належить групі одиниць кільця Z_2 для всіх $x, y \in Z_2$;

$$\frac{g(f(x)) - g(f(y))}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} * \frac{g(f(x)) - g(f(y))}{f(x) - f(y)}.$$

Права частина рівності складається з добутку двох дробів. Перший дріб належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки f – ізометрія. Другий дріб також належить групі одиниць кільця Z_2, оскільки g – ізометрія. Отже, добуток цих дробів теж належить групі одиниць кільця Z_2, і тому суперпозиція $f \circ g = g(f(x))$ є ізометрією.

Наслідком попередніх теорем є наступні три теореми:

Теорема 1.13 *Стискаючі функції на кільці Z_2 утворюють кільце з мультиплікативною одиницею $f(x) = x$ відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

Теорема 1.14 *Строго стискаючі функції на кільці Z_2 утворюють кільце без одиниці відносно операцій поелементного додавання та множення функцій. Множина строго стискаючих функцій з операцією додавання утворює адитивну групу цього кільця.*

Теорема 1.15 *Множина ізометрій кільця Z_2 є класом суміжності по підгрупі строго стискаючих функцій відносно операції поелементного додавання в групі стискаючих функцій.*

Наступна теорема потрібна для продовження натуральних функцій до 2-адичних ізометрій.

Теорема 1.16 *Ізометрія χ, визначена на всюди щільній в Z_2 підмножині M, єдиним чином продовжується до ізометрії $\overline{\chi}$ на Z_2.*

Proof. Оскільки ізометрія є неперевною функцією, а множина M є всюду щільною в Z_2, то для елемента $x \notin M$ значення $\overline{\chi}(x)$ визначено єдиним чином, як

$$\overline{\chi}(x) = \lim_{n \to \infty} \chi(x_n),$$

де $\{x_n\}$ послідовність елементів із M, збіжна до x в Z_2.

На множині M функція $\overline{\chi}$ співпадає з χ.

Теорема 1.17 *Шарово-транзитивна функція $f : Z_2 \to Z_2$ є ізометрією тоді, і лише тоді, коли оператор примітивної рекурсії $g(x) = I[f](x)(g(0) = 0, g(x+1) = f(g(x)))$ від функції $f(x) : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ дає функцію g, неперервне продовження якої на Z_2 є ізометрією кільця Z_2.*

Proof. Якщо f – шарово-транзитивна ізометрія, то $I[f](x)$ є 0-розв’язком (0-розв’язок – розв’язок, що переводить 0 в 0) рівняння спряженності $\varepsilon^{\chi} = f$. Дійсно, якщо $\chi(0) = 0$, то $\chi(n) = f^n(0)$ для $x \in \mathrm{N}$. Звідси $\chi(n+1) = f(f^n(0)) = f(\chi(n))$ і $\chi(x) = I[f](x)(x \in \mathrm{N})$. Оскільки N всюди щільна в Z_2, то, згідно з теоремою 1.16, існує єдине продовження ізометрії $\chi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ до ізометрії $\chi : Z_2 \to Z_2$.

З іншого боку, якщо ізометрія f не є шарово-транзитивною, то замикання множини $M = \{x \mid x = f^n(0), n \in \mathrm{N}\}$ є власною підмножиною Z_2, тобто χ не є сюр’єктивним відображенням з Z_2 на Z_2, і тому не є ізометрією.

Приклад 1.1 *Легко бачити, що* $f(x) = x$ *є ізометрією, а* $g(x) = c, c \in Z_2$ *строго стискаючою функцією. Тому, згідно з теоремою 1.15,* $f(x) + g(x) = x + c, c \in Z_2$ *є ізометрією.*

Приклад 1.2 *Оскільки* $f(x) = x + c, c \in Z_2$ *є ізометрією, а для* $c \in Z_2^*$ $f(x) = x + c$ *є шарово-транзитивною ізометрією і* $I[x+c](x) = c * x$ *то, згідно з теоремою 1.17,* $g(x) = c * x \ (c \in Z_2^*)$ *є ізометрією.*

Приклад 1.3 *Оскільки* $f(x) = a * x \ (a \in Z_2^*)$ *є ізометрією, а* $g(x) = b, b \in Z_2$ *строго стискаючою функцією, то, згідно з теоремою 1.15, лінійна функція* $f(x) + g(x) = a * x + b, c \in Z_2$ *є ізометрією.*

Приклад 1.4 *Оскільки* $f(x) = a * x + 1, a \in Z_2^*$ *є ізометрією, а для* $a = 4 * c + 1, c \in Z_2$ $f(x) = a * x + 1$ *є шарово-транзитивною ізометрією і* $I[a * x + 1](x) = \dfrac{a^x - 1}{a - 1}$ *то, згідно з теоремою 1.17,* $g(x) == \dfrac{a^x - 1}{a - 1} \ (a = 4 * c + 1, c \in Z_2)$ *є ізометрією.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Коблиц Н. *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции / Н. Коблиц. — М. : Мир, 1982. — 190 с.
2. Морозов Д. І. Ізометричність поліномів над кільцем цілих 2-адичних чисел / Д. І. Морозов // Наукові записки НаУКМА. Серія : Фізико-математичні науки. — 2011. — Т. 113. — С. 13-15.

REFERENCES

1. Koblits N. p-adicheskie chisla, p-adicheskii analiz i dzeta-funktsii / N. Koblits. – M. : Myr, 1982. – 190 p.
2. Morozov D.I. Izometrichnist polinomiv nad kiltsem tsilikh 2-adichnikh chisel / Naukovi zapiski NaUKMA. Seriia : Fiziko-matematichni nauki. – 2011. – T. 113. – PP. 13-15.

УДК 531.36

КЕРУВАННЯ РУХОМ ГІРОСКОПА З ЛІНІЙНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ СИСТЕМИ МІЖРАМКОВОЇ КОРЕКЦІЇ

[1]Новицький В. В., д. ф.-м. н., професор, [2]Коломійчук О. П., к. ф.-м. н., [3]Святовець І. Ф.

[1,2]Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, Київ-4, 301601, Україна
[3]Запорізька державна інженерна академія,
пр. Леніна, 226, Запоріжжя, 69006, Україна

novyc@imath.kiev.ua[1], kolomithyk@rambler.ru[2], sv.irina0702@gmail.com[3]

Розглядається керована лінійна стаціонарна не майже консервативна система. Пропонується можливий підхід застосування вектора керування для вирішення двох завдань: формування майже консервативної системи, та побудова оптимального керування. Наводиться приклад, який ілюструє описаний підхід.
Ключові слова: майже консервативна система, оптимальне керування, вектор керувань.