REFERENCES

1. Tihonov, A.N. and Arsenin, V.Ya. (1979), Metody reshenija nekorrektnyh zadach [Methods for solving ill-posed problems], Nauka, Moskow, Russia.
2. Obodan, N.I. and Guk, N.A. (2013), “The inverse problem of determining the external loads during deformation of thin shells”, Visnyk Kyi'vs'kogo nacional'nogo universytetu im. T. Shevchenka. Serija: fizyko-matematychni nauky, no. 1, pp. 47-50.
3. Baranov, I.V., Vatul'jan, A.O. and Solov'ev, A.N. (2006)? “Genetic algorithm and its application to inverse problems of identification of elastic media”, Vychislitel'nye tehnologii, vol. 11, no. 3, pp. 14-26.
4. Vorovich, I.I. (1989), Matematicheskie problemy nelinejnoj teorii pologih obolochek [Mathematical problems of the shallow shells nonlinear theory], Nauka, Moskow, Russia.
5. Bathe, K. and Wilson, E.L. (1985), Numerical method in finite element analysis, Nauka, Moskow, Russia.
6. Gorban', A.N. (1990), Obuchenie nejronnyh setej [Neural network training], USSR-USA SP “Paragraf”, Moskow, Russia.
7. Egupov, N.D. (2002), Metody robastnogo, nejronechetkogo i adaptivnogo upravlenija [Robust, neuro and adaptive control methods], MGTU im. N.Je. Baumana, Moskow, Russia.
8. Haykin, S. (2006), Nejronnye seti: polnyj kurs [Neural networks: a complete course], second edition, translated from English, Izdatel'skij dom “Vil'jams”, Moskow, Russia.
9. Stanley, K.O. and Miikkulainen, R. (2002), “Evolving Neural Networks Through Augmenting Topologies”, Evolutionary Computation, 10(2), pp. 99-127.
10. Andreev, L.V., Obodan, N.I. and Lebedev, A.G. (1988), Ustojchivost' obolochek pri neosesimmetrichnoj deformacii [Stability of shells with no axisymmetric deformation], Nauka, Moskow, Russia.

УДК 534.1 : 539.3

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОСЦИЛЛЯТОРА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Ольшанский В. П., д. ф.-м. н., *Ольшанский С. В., к. ф.-м. н.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства,
ул. Артема, 44, Харьков, 61002, Украина
**Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,*
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина

stasolsh77@gmail.com

Построено в функциях Бесселя аналитическое решение задачи о свободных колебаниях осциллятора экспоненциально переменной массы без учёта силы трения. Проанализировано влияние реактивной силы на процесс движения. Определены условия, при выполнении которых колебания осциллятора затухают даже при отсутствии сил трения.

Ключевые слова: свободные колебания, переменная масса, реактивная сила, специальные функции.

ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ЕКСПОНЕНТНО ЗМІННОЇ МАСИ

Ольшанський В. П., д. ф.-м. н, *Ольшанський С. В., к. ф.-м. н

Харківський національний технічний університет сільського господарства,
вул. Артема, 44, Харків, 61002, Україна
**Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,*
вул. Фрунзе, 21, Харків, 61002, Україна

stasolsh77@gmail.com

Побудовано в функціях Бесселя аналітичний розв’язок задачі про вільні коливання осцилятора експонентно змінної маси без урахування сили тертя. Проаналізовано вплив реактивної сили на процес руху. Визначено умови, при виконанні яких коливання осцилятора затухають навіть за відсутності сили тертя.
Ключові слова: вільні коливання, змінна маса, реактивна сила, спеціальні функції.

ABOUT THE TREE VIBRATION OF THE OSCILLATOR EXPONENTIALLY VARIABLE MASS

Olshanskii V. P., D.Sc. in Physics and Maths, *Olshanskii S. V., Ph.D. in Physics and Maths

Kharkov State Technical University of Agriculture,
Artem str., 44, Kharkiv, 61002, Ukraine
*National Technical University «Kharkov Polytechnical Institute»,
Frunze str., 21, Kharkiv, 61002, Ukraine

stasolsh77@gmail.com

This article devoted to solving the problem of the oscillator with variable mass. In a study is conducted a brief review of previous results on this problem. Their main feature is the extensive use of approximate analytical and numerical methods. The aim is to analyze the effect of the magnitude of the reactive force on the free vibration of the oscillator whose mass varies with time exponentially. Tasked to generalize the results obtained earlier. Under imposed preconditions problem is reduced to finding a solution to a differential equation with variable coefficients. With the introduction of a special change of variables, the analytical solution of this equation is obtained in the Bessel functions. Index of cylindrical functions in the solution depends on the coefficient of reactivity ε. For certain values of this coefficient can be damped oscillations are even in the absence of frictional forces. Using the representation of Bessel functions through the modulus and phase, it was possible to obtain estimates for the amplitudes of the oscillations depend on the coefficient of reactivity. In the plane of the parameters characterizing the mass change and reactive power obtained four squares (half-strip) in which the amplitude of the oscillations decrease or increase, which is consistent with results obtained previously by WKB method.
Key words: free vibration, variable mass, reactive force, special functions.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в теории нестационарных колебаний механических систем [1-3] основное внимание сосредоточено на разработке общих приближённых методов расчёта и представлено мало работ, в которых построены точные аналитические решения дифференциальных уравнений движения. По мнению авторов [3] «в большинстве случаев решения дифференциальных уравнений движения систем с переменными параметрами не могут быть получены в замкнутой форме», а поэтому основным направлением исследований служит разработка и приложения приближённых аналитических и численных методов. В то же время, в [3] указано два частных случая, когда можно построить точные решения уравнения колебаний осциллятора переменной массы или жёсткости в замкнутой форме. В дополнение к ним отметим, что в случае линейно-переменной массы осциллятора точные решения уравнения колебаний выражены через функции Бесселя также в работах [4-7]. К этим функциям сведен расчёт нестационарных колебаний в [8] и при экспоненциальном изменении массы при действии реактивной силы без учёта сопротивления среды. Отмечено, что действие реактивной силы приводит к затуханию колебаний при возрастании массы и увеличению амплитуд с течением времени – при убывании массы. Это согласуется с выводами в работах [2] и [3], где дополнительно утверждается, что картина будет противоположной, когда нет реактивной силы. Поэтому желательно вияснить, как зависит процесс колебаний осциллятора от величины реактивной силы, что и определило цель исследований.

Целью работы является анализ влияния величины реактивной силы на свободные колебания осциллятора, масса которого меняется с течением времени по экспоненциальному закону. Ставится задача обобщения результатов, полученных в [8].

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЙ

Итак, пусть

$$m = m_0 \exp(\lambda t),$$

где m_0 – начальное значение массы осциллятора; λ – коэффициент характеризующий изменение массы m во времени t.

Тогда свободные колебания будут описываться уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\lambda \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m_0} e^{-\lambda t} x = 0, \tag{1}$$

в котором c – коэффициент жёсткости пружины; x – перемещение осциллятора относительно положения статического равновесия; $0 \le \varepsilon \le 1$ – поправка на то, что при изменении массы тела только часть прироста массы может идти на создание реактивной силы. Коэффициент ε приходится вводить также тогда, когда линия действия реактивной силы не совпадает с осью ox.

Уравнения (1) дополняем начальными условиями:

$$x(0) = x_0; \;\; \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = \dot{x}_0, \tag{2}$$

где $\dot{x}_0$ – начальная скорость, а x_0 – начальное отклонение осциллятора.

Для нахождения решения уравнения (1) вводим новую безразмерную переменную

$$\xi = \exp(-\lambda t); \;\; \frac{d\xi}{dt} = -\lambda\xi.$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\xi \frac{d}{d\xi}, \;\; \frac{d^2}{dt^2} = \lambda^2\xi \left[\frac{d}{d\xi} + \xi \frac{d^2}{d\xi^2}\right],$$

представляем (1) в виде

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{1-\varepsilon}{\xi}\frac{dx}{d\xi} + \frac{c}{\lambda^2 m_0 \xi} x = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) решаем при начальных условиях:

$$x|_{\xi=1} = x_0; \;\; \left.\frac{dx}{d\xi}\right|_{\xi=1} = -\frac{\dot{x}_0}{\lambda}, \tag{4}$$

соответствующих (2).

Фундаментальными решениями (3) являются [9]:

$$x_1 = \eta^{\varepsilon} J_{\varepsilon}(\eta); \;\; x_1 = \eta^{\varepsilon} Y_{\varepsilon}(\eta). \tag{5}$$

Здесь $\eta_0 = \frac{2}{|\lambda|}\sqrt{\frac{c}{m_0}}$; $\eta = \eta_0\sqrt{\xi}$; $J_{\varepsilon}(\eta)$, $Y_{\varepsilon}(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана индекса ε.

Учитывая (5), общее решение уравнения (3) представляем в виде

$$x(t) = \eta^{\varepsilon}[c_1 J_{\varepsilon}(\eta) + c_2 Y_{\varepsilon}(\eta)], \tag{6}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

При дифференцировании выражения (6) по ξ, учтём, что [9]:

$$\frac{d}{d\eta} = [\eta^{\varepsilon} J_{\varepsilon}(\eta)] = \eta^{\varepsilon} J_{\varepsilon-1}(\eta); \quad \frac{d}{d\eta} = [\eta^{\varepsilon} Y_{\varepsilon}(\eta)] = \eta^{\varepsilon} Y_{\varepsilon-1}(\eta).$$

Тогда

$$\frac{dx}{d\xi} = \eta^{\varepsilon}[c_1 J_{\varepsilon-1}(\eta) + c_2 Y_{\varepsilon-1}(\eta)] \frac{\eta_0}{2\sqrt{\xi}}. \tag{7}$$

Подставив (6) и (7) в (4), для определения постоянных c_1 и c_2 получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 J_{\varepsilon}(\eta_0) + c_2 Y_{\varepsilon}(\eta_0) &= \frac{x_0}{\eta_0^{\varepsilon}}, \\ c_1 J_{\varepsilon-1}(\eta_0) + c_2 Y_{\varepsilon-1}(\eta_0) &= -\frac{2\dot{x}_0}{\lambda \eta_0^{\varepsilon+1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Определитель системы (8) равен [9]

$$\Delta = J_{\varepsilon}(\eta_0) Y_{\varepsilon-1}(\eta_0) - J_{\varepsilon-1}(\eta_0) Y_{\varepsilon}(\eta_0) = \frac{2}{\pi \eta_0}.$$

Дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \frac{1}{\eta_0^{\varepsilon}} \left[x_0 Y_{\varepsilon-1}(\eta_0) + \frac{2\dot{x}_0}{\lambda \eta_0} Y_{\varepsilon}(\eta_0) \right];$$

$$\Delta_2 = -\frac{1}{\eta_0^{\varepsilon}} \left[x_0 J_{\varepsilon-1}(\eta_0) + \frac{2\dot{x}_0}{\lambda \eta_0} J_{\varepsilon}(\eta_0) \right].$$

В итоге, вычисление постоянных в (6) сводим к формулам:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\pi}{2\eta_0^{\varepsilon-1}} \left[x_0 Y_{\varepsilon-1}(\eta_0) + \frac{2\dot{x}_0}{\lambda \eta_0} Y_{\varepsilon}(\eta_0) \right]; \\ c_2 &= -\frac{\pi}{2\eta_0^{\varepsilon-1}} \left[x_0 J_{\varepsilon-1}(\eta_0) + \frac{2\dot{x}_0}{\lambda \eta_0} J_{\varepsilon}(\eta_0) \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

При $\varepsilon = 1$ решения (6), (9), с точностью до обозначений, совпадают с теми, что получены в работе [8]. Если в (6), (9) положить $\varepsilon = 0$, то они будут описывать колебания осциллятора без учёта реактивной силы.

Представим цилиндрические функции с помощью модуля $M_{\varepsilon}(\eta)$ и фазы $\theta_{\varepsilon}(\eta)$ [10]:

$$J_{\varepsilon}(\eta) = M_{\varepsilon}(\eta) \cos(\theta_{\varepsilon}(\eta)); \quad Y_{\varepsilon}(\eta) = M_{\varepsilon}(\eta) \sin(\theta_{\varepsilon}(\eta)).$$

Учитывая (6), приходим к выводу, что изменение амплитуд колебаний во времени подчиняется зависимости

$$amx = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, \eta^{\varepsilon} |M_{\varepsilon}(\eta)|. \tag{10}$$

Если $\varepsilon = 0{,}5$, то [9]:

$$|M_{\varepsilon}(\eta)| = |M_{1/2}(\eta)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \eta^{-1/2}$$

и, согласно (10),

$$amx = \sqrt{\frac{2}{\pi}(c_1^2 + c_2^2)} = const.$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0{,}5$, независимо от λ, колебания осциллятора происходят с постоянной амплитудой.

При $\varepsilon > 0{,}5$ выполняется неравенство [9]

$$|M_{\varepsilon}(\eta)| > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \eta^{-1/2},$$

и из (10) следует, что

$$amx > \sqrt{\frac{2}{\pi}(c_1^2 + c_2^2)}\eta_0^{\varepsilon-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)t}.$$

В этом случае, т.е. при $\varepsilon > 0{,}5$, свободные колебания в осцилляторе с убывающей массой $\lambda < 0$ происходят с возрастающей амплитудой.

Если $\varepsilon < 0{,}5$, то

$$|M_\varepsilon(\eta)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\eta^{-1/2};$$

$$amx < \sqrt{\frac{2}{\pi}(c_1^2 + c_2^2)}\eta_0^{\varepsilon-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)t}.$$

В силу последнего неравенства, колебания в осцилляторе с убывающей массой затухают при $\varepsilon < 0{,}5$.

Что касается осциллятора возрастающей массы, то его колебания затухают при $\varepsilon > 0{,}5$, а увеличиваются амплитуды колебаний, когда $\varepsilon < 0{,}5$.

Таким образом, в плоскости параметров λ, ε можно выделить четыре области (полуполосы), в которых амплитуды колебаний убывают или возрастают. Эти области показаны на рис. 1, где стрелками отмечен характер изменения амплитуд. Ранее к таким областям привели приближённые решения рассматриваемой задачи, построенные ВБК-методом в работе [11].

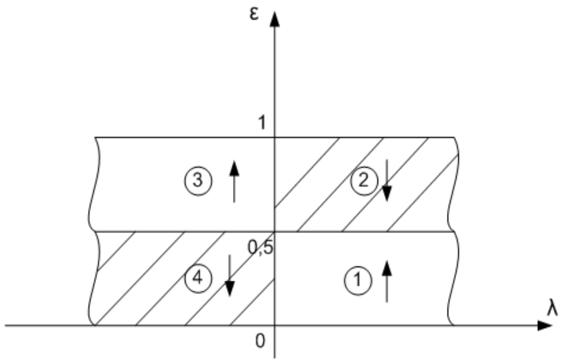
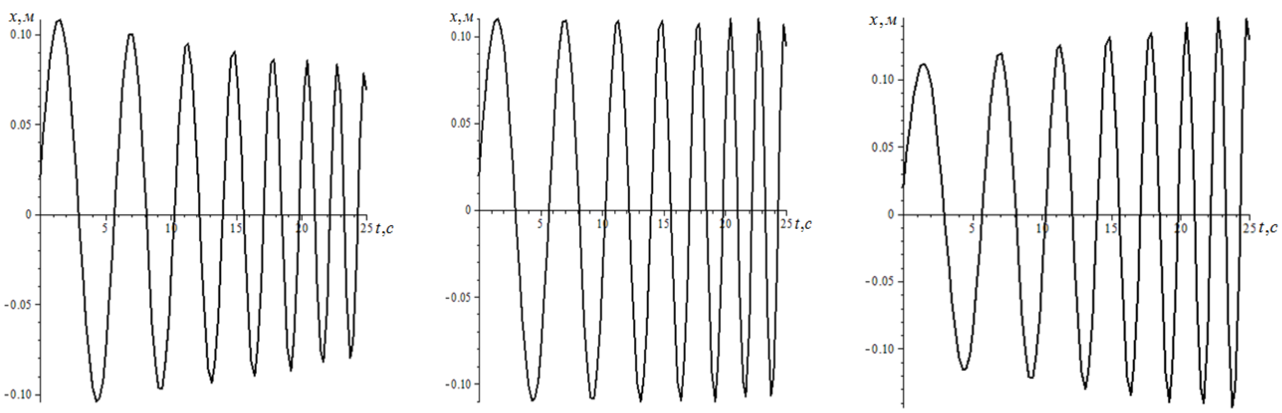


Рис. 1. Области затухания и раскачивания колебаний реактивной силой

АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

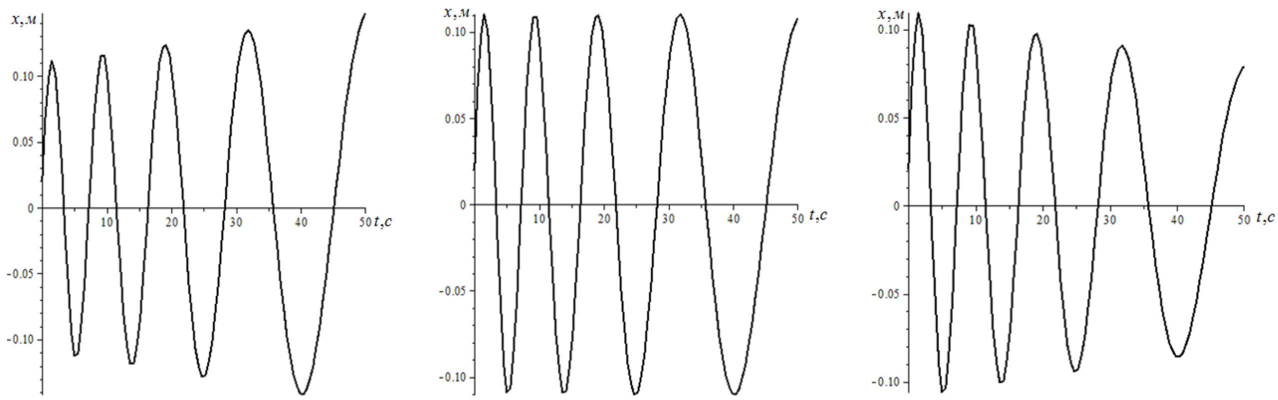
Проведём расчёты колебаний осциллятора по формулам (6), (9) при следующих исходных данных: $m_0 = 100$ кг; $c = 85$ кг/с^2, $\dot{x}_0 = 0{,}1$ м/с, $x_0 = 0{,}02$ м; $\lambda = -0{,}1$ с$^{-1}$ и $\lambda = 0{,}05$ с$^{-1}$ при убывании и возрастании массы соответственно.



а) $\varepsilon = 0{,}25$ б) $\varepsilon = 0{,}5$ в) $\varepsilon = 0{,}75$

Рис. 2. Зависимости перемещений x от времени t для разных ε при убывании массы осциллятора

Результаты на рис. 2 подтверждают различный характер колебаний системы убывающей массы при $\varepsilon < 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}5$; $\varepsilon > 0{,}5$.



а) $\varepsilon = 0{,}25$ б) $\varepsilon = 0{,}5$ в) $\varepsilon = 0{,}75$

Рис. 3. Зависимости перемещений x от времени t для разных ε при возрастании массы осциллятора

Графики на рис. 3 свидетельствуют о выполнении амплитудной оценки, сделанной для колебаний осциллятора возрастающей массы.

ВЫВОДЫ

Аналитические решения уравнения свободных нестационарных колебаний осциллятора с экспоненциально переменной массой выражаются через функции Бесселя. Индекс цилиндрических функций в решении зависит от значения коэффициента реактивности ε. При определённых значениях этого коэффициента колебания осциллятора могут затухать даже при отсутствии сил трения. В плоскости параметров, характеризующих изменение массы λ и реактивной силы, получено четыре области (полуполосы), в которых амплитуды колебаний убывают или возрастают, что согласуется с результатами, полученными ранее методом ВБК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Ю. А. Митропольский. — К. : Изд-во АН УССР, 1955. — 283 с.
2. Бессонов А. П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А. П. Бессонов. — М. : Наука, 1967. — 267 с.
3. Голоскоков Е. Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов. — К. : Наукова думка, 1977. — 340 с.
4. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы / И. В. Мещерский. — М. : ГИТТЛ, 1952. — 276 с.
5. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass / L. Cveticanin // Taylor&Francis Ltd. — 1998. — 300 p.
6. Ольшанский В. П. Свободные вертикальные колебания осциллятора линейно-переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукр. наук.-техн. журнал. — Вінниця. — Вип. 1(69). — 2013. — С. 37-41.
7. Ольшанский В. П. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ» : Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2013, № 37(1010). — С. 125-130.
8. Ольшанский В. П. Свободные колебания осциллятора переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вибрации в технике и технологиях : Всеук. науч.-тех. журнал. — Винница. — Вип. 2(70). — 2013. — С. 57-59.
9. Градштейн И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. М. Градштейн, И. С. Рыжик. — М. : Физматгиз, 1962. — 1100 с.
10. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. — М. : Наука, 1979. — 832 с.

11. Ольшанский В. П. Метод ВБК в расчётах нестационарных колебаний осцилляторов / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. — Х. : Міськдрук, 2014. — 264 с.

REFERENCES

1. Mitropol'skij Ju.A. Nestacionarnye processy v nelinejnyh kolebatel'nyh sistemah / Ju.A. Mitropol'skij. – K. : Izd-vo AN USSR, 1955. – 283 p.
2. Bessonov A.P. Osnovy dinamiki mehanizmov s peremennoj massoj zven'ev / A.P. Bessonov. – M. : Nauka, 1967. – 267 p.
3. Goloskokov E.G. Nestacionarnye kolebanija deformiruemyh sistem / E.G. Goloskokov, A.P. Filippov. – K. : Naukova dumka, 1977. – 340 p.
4. Meshherskij I.V. Raboty po mehanike tel peremennoj massy / I.V. Meshherskij. – M. : GITTL, 1952. – 276 p.
5. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin // Taylor & Francis Ltd. – 1998. – 300 p.
6. Ol'shanskij V.P. Svobodnye vertikal'nye kolebanija oscilljatora linejno-peremennoj massy / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Vibracії v tehnici ta tehnologijah : Vseukr. nauk.-tehn. zhurnal. – Vinnicja. – Vol. 1. (69), 2013. – PP. 37-41.
7. Ol'shanskij V.P. Modelirovanie kolebanij oscilljatora linejno-peremennoj massy pri impul'snom nagruzhenii / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Visnik NTU “HPI” : Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah, 2013, no. 37(1010). – PP. 125-130.
8. Ol'shanskij V.P. Svobodnye kolebanija oscilljatora peremennoj massy / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Vibracii v tehnike i tehnologijah : Vseuk. nauch.-teh. zhurnal. – Vinnica. – Vol. 2(70). – 2013. – PP. 57-59.
9. Gradshtejn I.M. Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij / I.M. Gradshtejn, I.S. Ryzhik. – M. : Fizmatgiz, 1962. – 1100 p.
10. Abramovic A. Spravochnik po special'nym funkcijam(s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami) / A. Abramovic, I. Stigan. – M. : Nauka, 1979. – 832 p.
11. Ol'shanskij V.P. Metod VBK v raschjotah nestacionarnyh kolebanij oscilljatorov / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij. – H. : Mis'kdruk, 2014. – 264 p.

УДК 517.928:519.876.5

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗШИРЕНОГО ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН ПІДХОДУ В ЗАДАЧІ ПРО ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ТОНКОГО СТРИЖНЯ КОНІЧНОЇ ФОРМИ

Погребицька Г. М., к. ф.-м. н., доцент

Національна академія природоохоронного та курортного будівництва,
вул. Київська, 181, м. Сімферополь, 95493, Крим

vkbgibrid@mail.ru

У роботі розглядається ефективність застосування розширеного гібридного ВКБ-Гальоркін підходу в задачі про теплопровідність систем зі змінною геометрією на прикладі тонкого стрижня конічної форми. Застосування цього методу дозволило збільшити діапазон зміни параметра, що відповідає за форму стрижня.

Ключові слова: асимптотичні методи, розширений гібридний ВКБ-Гальоркін підхід, тонкий стрижень конічної форми, процес теплообміну в конструкціях зі змінною геометрією.