11. Ольшанский В. П. Метод ВБК в расчётах нестационарных колебаний осцилляторов / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. — Х. : Міськдрук, 2014. — 264 с.

REFERENCES

1. Mitropol'skij Ju.A. Nestacionarnye processy v nelinejnyh kolebatel'nyh sistemah / Ju.A. Mitropol'skij. – K. : Izd-vo AN USSR, 1955. – 283 p.
2. Bessonov A.P. Osnovy dinamiki mehanizmov s peremennoj massoj zven'ev / A.P. Bessonov. – M. : Nauka, 1967. – 267 p.
3. Goloskokov E.G. Nestacionarnye kolebanija deformiruemyh sistem / E.G. Goloskokov, A.P. Filippov. – K. : Naukova dumka, 1977. – 340 p.
4. Meshherskij I.V. Raboty po mehanike tel peremennoj massy / I.V. Meshherskij. – M. : GITTL, 1952. – 276 p.
5. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin // Taylor & Francis Ltd. – 1998. – 300 p.
6. Ol'shanskij V.P. Svobodnye vertikal'nye kolebanija oscilljatora linejno-peremennoj massy / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Vibracії v tehnici ta tehnologijah : Vseukr. nauk.-tehn. zhurnal. – Vinnicja. – Vol. 1. (69), 2013. – PP. 37-41.
7. Ol'shanskij V.P. Modelirovanie kolebanij oscilljatora linejno-peremennoj massy pri impul'snom nagruzhenii / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Visnik NTU “HPI” : Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah, 2013, no. 37(1010). – PP. 125-130.
8. Ol'shanskij V.P. Svobodnye kolebanija oscilljatora peremennoj massy / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Vibracii v tehnike i tehnologijah : Vseuk. nauch.-teh. zhurnal. – Vinnica. – Vol. 2(70). – 2013. – PP. 57-59.
9. Gradshtejn I.M. Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij / I.M. Gradshtejn, I.S. Ryzhik. – M. : Fizmatgiz, 1962. – 1100 p.
10. Abramovic A. Spravochnik po special'nym funkcijam(s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami) / A. Abramovic, I. Stigan. – M. : Nauka, 1979. – 832 p.
11. Ol'shanskij V.P. Metod VBK v raschjotah nestacionarnyh kolebanij oscilljatorov / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij. – H. : Mis'kdruk, 2014. – 264 p.

УДК 517.928:519.876.5

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗШИРЕНОГО ГІБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКІН ПІДХОДУ В ЗАДАЧІ ПРО ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ТОНКОГО СТРИЖНЯ КОНІЧНОЇ ФОРМИ

Погребицька Г. М., к. ф.-м. н., доцент

Національна академія природоохоронного та курортного будівництва,
вул. Київська, 181, м. Сімферополь, 95493, Крим

vkbgibrid@mail.ru

У роботі розглядається ефективність застосування розширеного гібридного ВКБ-Гальоркін підходу в задачі про теплопровідність систем зі змінною геометрією на прикладі тонкого стрижня конічної форми. Застосування цього методу дозволило збільшити діапазон зміни параметра, що відповідає за форму стрижня.

Ключові слова: асимптотичні методи, розширений гібридний ВКБ-Гальоркін підхід, тонкий стрижень конічної форми, процес теплообміну в конструкціях зі змінною геометрією.

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСШИРЕННОГО ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЬОРКИН ПОДХОДА В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Погребицкая А. М., к. ф.-м. н., доцент

Национальная академия природоохранного и курортного строительства, ул. Киевская, 181, г. Симферополь, 95493, Крым

vkbgibrid@mail.ru

В работе рассматривается эффективность применения расширенного гибридного ВКБ-Галеркин подхода в задаче о теплопроводности систем с переменной геометрией на примере тонкого стержня конической формы. Применение данного метода позволило увеличить диапазон изменения параметра, отвечающего за форму стержня.
Ключевые слова: асимптотические методы, расширенный гибридный ВКБ-Галеркин подход, тонкий стержень конической формы, процесс теплообмена в конструкциях с переменной геометрией.

APPLICATION OF ASYMPTOTIC EXTENDED HYBRID WKB GALORKIN APPROACH FOR THE PROBLEM ON THERMAL CONDUCTIVITY OF THIN ROD WITH CONICAL FORM

Pogrebitskaya A. M., associate professor, Ph. D. in Physics and Math

National Academy of Environmental Protection and Resort Development, street Kyiv, 181, Simferopol, 95493, Crimea

vkbgibrid@mail.ru

Perturbation methods allow to obtain approximate analytical representation of solutions to rather complex linear and nonlinear boundary value problems, both for ordinary differential equations and for the equations in partial derivatives. These methods have several disadvantages, the main among them is the limited scope of asymptotic solutions. While increasing the small parameter error of these methods increases dramatically, leading to a need to bring in to the solution an increasing number of members of decomposition, and in most cases significantly increases the complexity of computation. That is why there is a need to "improve" the existing asymptotic solutions without the involvement of a larger number of terms of the decomposition by using hybrid asymptotic methods. A hybrid WKB-Galerkin method based on combining techniques of phase integrals and Galerkin is proposed. The above approach has allowed to build a cross-cutting solution with regard to the interpretation based on perturbation and Galerkin approach, and is more simple in implementation and is not less effective than some other methods.
The aim of the study is the use of the extended hybrid asymptotic approach to the differential equations that describe the processes of heat transfer in structures with variable geometry.
The process of stationary heat conduction without internal heat sources and sinks of thin rods and ribbed surfaces of any sections of the example conical core is studied. The process is described by the inhomogeneous differential equation of second order with variable coefficients.
Proposed in the general form the equation also describes the process of heat conduction of ribbed surfaces (circular or straight) and thin rods of any cross section. There given the solutions of this equation, obtained by the following methods: advanced hybrid WKB-Galerkin and hybrid WKB-Galerkin approaches, a method of phase integrals constructed with the use of one or two terms of the expansion. It is noted that advanced hybrid WKB-Galerkin method allows to obtain the solution of the equation in the zero approximation and does not require involvement in the solution of an increasing number of terms of the decomposition, which in some cases considerably complicates the calculation.
The numerical solution of the equation used to be considered, but qualitative analysis of the system under research can not be obtained with the numerical solution. An important advantage of asymptotic methods is the possibility of an analytical research of equations describing the process of heat transfer.
To find the range of the parameter at the highest derivatives we give a comparative analysis of solutions obtained by the proposed advanced approach, other asymptotic and direct numerical methods.
Thus, a comparative analysis showed that the advanced WKB-Galerkin method in many cases is an effective way of constructing approximate analytical solutions of differential equations with variable coefficients, particularly in problems of heat conduction systems with variable geometrical parameters on the example of a thin rod conical shape. Also, this method gives satisfactory results, when the parameter at the highest derivative is not small.
Keywords: asymptotic methods, advanced hybrid WKB Galerkin approach, thin rod conical forms, process of heat exchange in constructions with variable geometry.

Методи збурень або асимптотичні методи малого параметра для рішення диференціальних рівнянь – це один з найбільш потужних засобів сучасної прикладної математики. Вони дозволяють отримувати наближені аналітичні подання рішень досить складних лінійних і нелінійних крайових задач, як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь у частинних похідних. Ці методи мають ряд недоліків, головним з яких є обмежена область застосування асимптотичних розв'язків. При збільшенні малого параметра похибка цих методів різко зростає, що призводить до необхідності залучення в розв'язок усе більшої кількості членів розкладу, і в більшості випадків істотно збільшує складність обчислень. Саме тому виникає необхідність «поліпшення» існуючих асимптотичних розв'язків без залучення більшого числа членів розкладу за допомогою гібридних асимптотичних методів. Один із цих методів ґрунтується на поєднанні будь-якого асимптотичного розкладу (наприклад за методом збурень) і методу Гальоркіна, і опирається на ідеї, опис яких міститься в працях американських дослідників Гіра і Андерсена [8, 9]. Далі теорія гібридних асимптотичних методів отримала розвиток у працях [2, 3, 6] та показала достатньо надійні результати у ряді задач механіки деформованого твердого тіла. У роботі [3] докладно описаний один з таких підходів, названий розширеним гібридним ВКБ-Гальоркін методом та заснований на об'єднанні методів фазових інтегралів і Гальоркіна. Наведений підхід дозволив побудувати наскрізний розв'язок щодо розв'язку на базі підходів збурень і Гальоркіна, запропонований вченими Дж. Гіром та Г. Андерсеном. Він є більш простим у реалізації й не менш ефективним, ніж останній та гібридний ВКБ-Гальоркін методи. Там же ефективність розширеного підходу була проілюстрована при розв'язанні тестових задач.

Метою дослідження є застосування даного розширеного гібридного асимптотичного підходу, наведеного в [3], до диференціальних рівнянь, які описують процеси теплообміну в конструкціях зі змінною геометрією.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається процес стаціонарної теплопровідності без внутрішніх джерел і стоків тепла тонких стрижнів та ребристих поверхонь будь-яких перерізів на прикладі стрижня конічної форми (рис. 1). Передбачається, що поперечні розміри ребра порівняно з довжиною настільки малі, що зміною температури в ньому можна знехтувати (температура стрижня T – функція тільки однієї координати). На базі першого закону термодинаміки рівняння теплового балансу елемента стрижня у загальному вигляді має вигляд

$$A = B + C, \tag{1}$$

де A та B – кількість тепла, що підводиться до елемента довжиною $\Delta\tilde{x}$ і відводиться від нього внаслідок теплопровідності, знайдено за законом Фур'є; C – кількість тепла, відданого бічною поверхнею, знайдено за законом Ньютона-Ріхмана [1, 4].

Для стрижня конічної форми рівняння (1) набуло вигляду

$$-k\left(\pi\left(\frac{R}{L}\tilde{x}\right)^2\frac{dT}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}} = -k\left(\pi\left(\frac{R}{L}\tilde{x}\right)^2\frac{dT}{d\tilde{x}}\right)_{\tilde{x}+\Delta\tilde{x}} + \frac{\pi hR}{L^2}\sqrt{R^2+L^2}\left(2\tilde{x}+\Delta\tilde{x}\right)\Delta\tilde{x}\left(T-T_\infty\right), \tag{2}$$

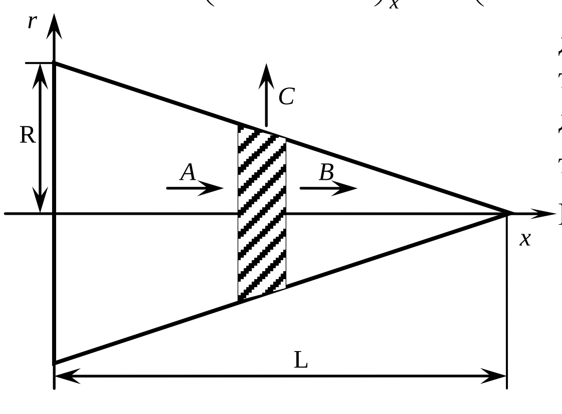

Рис. 1. Схема стрижня конічної форми, що виступає з плоскої стінки та перебуває у рідині

де k, h – коефіцієнти теплопровідності та тепловіддачі відповідно; R, L – радіус основи і довжина випромінювача відповідно; T_∞, T_S – температури середовища та стінки відповідно.

Вираз (2) у безрозмірній формі має вигляд

$$\varepsilon^2\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{2\varepsilon^2}{x}\frac{dU}{dx} - \frac{1}{x}U = -\frac{1}{x},$$

$$U'(0) = 0,\ U(1) = 0, \tag{3}$$

або у загальному вигляді

$$\varepsilon^2 U'' + a(x)U' + b(x)U = c(x),$$

$$U(d,\varepsilon) = U_d, U(f,\varepsilon) = U_f, \tag{4}$$

де $x=\dfrac{\tilde{x}}{L}$; $U=\dfrac{T-T_S}{T_\infty-T_S}$ – невідома функція; $\varepsilon^2=\dfrac{kR}{2hL\sqrt{R^2+L^2}}$ – параметр; $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – задані функції.

Запропоноване у загальному вигляді рівняння (4) також описує процес теплопровідності ребристих поверхонь (кільцевих або прямих) та тонких стрижнів будь-яких перерізів. Якщо, наприклад, розглядати пряме ребро трикутного профілю, тоді, $U=T-T_\infty$ – надлишкова температура ребра; $\varepsilon^2=k\delta/hP$ – параметр; P – висота профілю ребра; δ – половина товщини ребра [1, 4].

РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ, ЯКІ ОТРИМАНІ РІЗНИМИ АСИМПТОТИЧНИМИ МЕТОДАМИ

Наведемо розв'язки даного рівняння, отримані за допомогою таких методів: розширеного гібридного ВКБ-Гальоркін ($U^H(x)$) [3], гібридного ВКБ-Гальоркін ($U^{H^*}(x)$) підходів [6], методу фазних інтегралів, побудованих з використанням одного ($U_0^{WKB}(x)$) і двох ($U_1^{WKB}(x)$) членів розкладу [7]. Необхідно зауважити, що розширений гібридний ВКБ-Гальоркін метод дозволяє одержати розв'язок рівняння (4) в нульовому наближенні та не потребує залучення в розв'язок все більшої кількості членів розкладу, що у ряді випадків суттєво ускладнює обчислення.

$$U^H(x)=\delta_{0_1}\left[c_1\frac{\exp\left(2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)}{x}+c_2\frac{\exp\left(-2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)}{x}+1+\frac{\varepsilon^2}{2x}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon^2}{4x}\left(\exp(2\varepsilon^{-1}\sqrt{x})+\exp(-2\varepsilon^{-1}\sqrt{x})\right)\right]+\delta_{0_2}\left[x\left(1-\ln\left(\frac{x}{d}\right)\right)-\ln d-1\right], \tag{5}$$

$$U^{H^*}(x)=c_1\frac{e^{2\delta^*_{0_1}\sqrt{x}}}{x}+c_2\frac{e^{2\delta^*_{0_2}\sqrt{x}}}{x}-$$

$$-\frac{1}{2\varepsilon^2\left(\delta^*_{0_1}\right)^3(\delta^*_{0_2}-\delta^*_{0_1})x}\left(2\left(\delta^*_{0_1}\right)^2x+2\delta^*_{0_1}\sqrt{x}+1-e^{2\delta^*_{0_1}\sqrt{x}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon^2\left(\delta^*_{0_2}\right)^3(\delta^*_{0_2}-\delta^*_{0_1})x}\left(2\left(\delta^*_{0_2}\right)^2x+2\delta^*_{0_2}\sqrt{x}+1-e^{2\delta^*_{0_2}\sqrt{x}}\right), \tag{6}$$

$$U_0^{WKB}(x)=c_1\frac{\exp\left(2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)}{x}+c_2\frac{\exp\left(-2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)}{x}+1+\frac{\varepsilon^2}{2x}-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{4x}\left(\exp(2\varepsilon^{-1}\sqrt{x})+\exp(-2\varepsilon^{-1}\sqrt{x})\right), \tag{7}$$

$$U_1^{WKB}(x)=c_1\frac{\exp\left(2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)}{\sqrt[4]{x^3}}+c_2\frac{\exp\left(-2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)}{\sqrt[4]{x^3}}+$$

$$+\frac{\exp\left(2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)I_1(x)}{2\varepsilon\sqrt[4]{x^3}}-\frac{\exp\left(-2\varepsilon^{-1}\sqrt{x}\right)I_2(x)}{2\varepsilon\sqrt[4]{x^3}}, \tag{8}$$

де

$$\delta_{0_1}=\frac{B_1A_{22}-B_2A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}},\quad \delta_{0_2}=\frac{B_2A_{11}-B_1A_{21}}{A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21}},\quad A_{ki}=\int_d^f\left(\varepsilon^2 U_0^{i\,\prime\prime}+a(x)U_0^{i\,\prime}+b(x)U_0^i\right)U_0^k dx,$$

$$B_k=\int_d^f c(x)U_0^k dx,\quad i,k=1,2,\quad \delta^*_{0_{1,2}}=G\pm\sqrt{\varepsilon^{-2}+G^2},\quad G=\frac{g(d)-g(f)}{4\int_d^f\sqrt{g^3(x)}dx},$$

$$g(x)=\frac{a^2(x)}{4\varepsilon^2}+\frac{a'(x)}{2}-b(x),\quad I_{1,2}(x)=\int_0^x-\sqrt[4]{t}\exp\left(\mp 2\varepsilon^{-1}\sqrt{t}\right)dt.$$

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ

Чисельне розв'язання рівняння (3) було розглянуто в роботі [5], але за допомогою чисельного розв'язку не можна отримати якісний аналіз досліджуваної системи. Важливою перевагою асимптотичних методів є можливість аналітичного дослідження рівнянь, які описують процеси теплообміну.

Для знаходження діапазону зміни параметра при старших похідних на рис. 2 наведено порівняльний аналіз розв'язків, отриманих за допомогою запропонованого розширеного підходу [3], інших асимптотичних та прямого чисельного методів, та введені позначення: *U* – чисельний розв'язок [5], *H* – розширений ВКБ-Гальоркін розв'язок (5), *H2* – ВКБ-Гальоркін розв'язок (6), *W0* – ВКБ-розв'язок в 0-наближені (7), *W1* – ВКБ-розв'язок в 1-наближені (8).

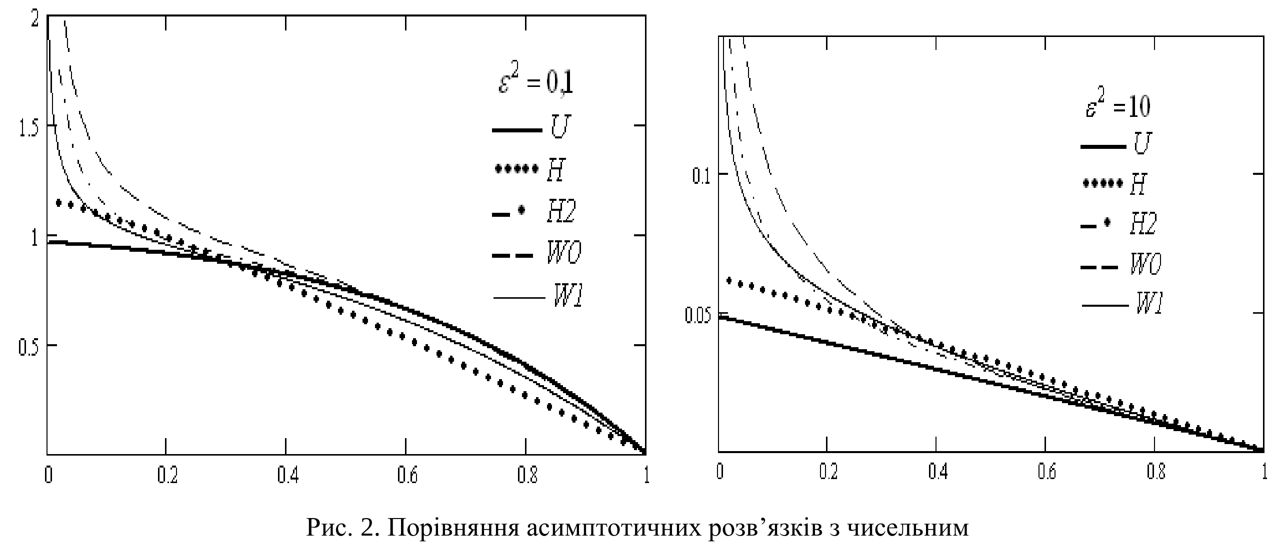

Рис. 2. Порівняння асимптотичних розв'язків з чисельним

Таким чином, порівняльний аналіз довів, що розширений ВКБ-Гальоркін метод у ряді випадків є ефективним засобом побудови наближених аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, зокрема в задачах про теплопровідність систем зі змінними геометричними параметрами на прикладі тонкого стрижня конічної форми. Також цей метод дає задовільні результати і тоді, коли параметр при старшій похідній не є малим.

ЛІТЕРАТУРА

1. Авдуевский В. С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский, Б. М. Галицейский, Г. А. Глебов. — М. : Машиностроение, 1975. — 528 с.
2. Грищак В. З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування / В. З. Грищак. — Запоріжжя : ЗНУ, 2009. — 226 с.
3. Грищак В. З. Эффективность расширенного ВКБ-Галеркин метода в дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами / В. З. Грищак, А. М. Погребицкая // Вісник ЗНУ. Серія : Фізико-математичні науки. — 2010. — № 1. — С. 45-50.
4. Исаченко В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сухомел. — М. : Энергия, 1975. — 484 с.
5. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На. — М. : Мир, 1982. — 294 с.
6. Погребицкая А. М. К вопросу эффективности ВКБ-Галеркин метода в дифференциальных уравнениях с переменными коэффициентами / А. М. Погребицкая // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2008. — Т. 51, № 1. — С. 82–87.
7. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов / Дж. Хединг. — М. : Мир. — 1965. — 238 с.
8. Geer J. F. A hybrid perturbation-Galerkin technique with combines multiple expansions / J. F. Geer, C. M. Andersen // Rep. NAS. — Hempton, Virginia, USA, 1989. — P. 1-36.
9. Geer J. F. Investigating a hybrid perturbation-Galerkin technique using computer algebra / J. F. Geer, C. M. Andersen // Rep. NASA. — Hempton, Virginia, USA, 1988. — P. 1-25.

REFERENCES

1. Avduevskiy V.S. Osnovu teploperedachi v aviacionnoy i raketno-kosmicheskoy tehnike / V.S. Avduevskiy, B.M. Galiceyskiy, G.A. Glebov. – M. : Mashinostroeniye, 1975. – 528 p.
2. Grishak V.Z. Gibridni asimptotichni metodi ta technika ich zastosuvannya / V.Z. Grishak. – Zaporijja : ZNU. – 2009. – 226 p.
3. Grishak V.Z. Effektivnost rasshirennogo VKB-Galerkin metoda v differenzialnich uravneniyach s peremennimi koefficientami / V.Z. Grishak, A.M. Pogrebitskaya // Visnik ZNU. Seriya : fiziko-matematichni nauki. – 2010. – № 1. – PP. 45-50.
4. Isachenko V.P. Teploperedacha / V.P. Isachenko, V.A. Osipova, A.S. Suchomel. – M. : Energiya, 1975. – 484 p.
5. Na C. Vichislitelniye metodi resheniya prikladnich granichnich zadach / C. Na. – M. : Mir, 1982. – 294 p.
6. Pogrebitskaya A.M. K voprosu effektivnosti VKB-Galerkin metoda v differencialnich uravneniyach s peremennimi koefficientami / A.M. Pogrebitskaya // Matematichni metodu ta fiziko-mechanichni polya. – 2008. – T. 51, № 1. – PP. 82-87.
7. Heding G. Vvedeniye v metod fazovuch integralov / G. Heding. – M. : Mir, 1965. – 238 p.
8. Geer J.F. A hybrid perturbation-Galerkin technique with combines multiple expansions / J.F. Geer, C.M. Andersen // Rep. NAS. – Hempton, Virginia, USA, 1989. – P. 1-36.
9. Geer J.F. Investigating a hybrid perturbation-Galerkin technique using computer algebra / J.F. Geer, C.M. Andersen // Rep. NASA. – Hempton, Virginia, USA, 1988. – P. 1-25.