3. Liu, X.B., Yang, G.C., Fan, J.F. and Song, G.S. (2003), “Decagonal quasicrystal formed directly from the rapidly solidified $Al_{66}Cu_{17}Co_{17}$ alloy”, *Journal of materials science letters*, vol. 22, pp. 103-105.
4. Girzhon, V.V., Kovalyova, V.M., Smolyakov, O.V. and Zakharenko, M.I. (2012), “Modeling of decagonal quasicrystal lattice”, *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 358, pp. 137-144.
5. Raghavan, V. (2007), “Al-Cu-Mg-Si (Aluminum-Copper-Magnesium-Silicon)”, *Journal of Phase Equilibria and Diffusion*, vol. 28, no. 2, pp. 211-212.

УДК 517.9

МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНОГО ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ’ЯЗКУ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Хома-Могильська С. Г., к. ф.-м. н.

Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська, 11, м. Тернопіль, 46020, Україна

sv_khoma@ukr.net

Наведено нову схему дослідження розв’язків крайової періодичної задачі для неоднорідного хвильового рівняння $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$. Побудовано неперервний розв’язок хвильового рівняння у прямокутнику $[0,\pi]\times[0,2\pi]$. Встановлено умови існування 2π-періодичних за часовою змінною розв’язків хвильового неоднорідного рівняння з нульовими крайовими умовами за змінною x у класі узагальнених розв’язків.

Ключові слова: хвильове рівняння, неперервний розв’язок, періодичний розв’язок, крайові умови.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Хома-Могильская С. Г., к. ф.-м. н.

Тернопольский национальный экономический университет,
ул. Львовская, 11, г. Тернополь, 46020, Украина

sv_khoma@ukr.net

Приведена новая схема исследования решений краевой периодической задачи для неоднородного волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$. Построено непрерывное решение волнового уравнения в прямоугольнике $[0,\pi]\times[0,2\pi]$. Установлены условия существования 2π-периодических по временной переменной решений волнового неоднородного уравнения с нулевыми краевыми условиями по переменной x в классе обобщенных решений.

Ключевые слова: волновое уравнение, непрерывное решение, периодическое решение, краевые условия.

MODELING OF UNINTERRUPTED PERIODIC SOLUTION OF WAVE EQUATION

Homa-Mogyl’s’ka S. G., к. ф.-м. н.

Ternopil National Economic University,
Str. L'vivs'ka, 11, Ternopil, 46020, Ukraine

sv_khoma@ukr.net

The theory of differential equations in partial derivatives is developing the fastest today. Essential differences are characterized to different types of differential equations (elliptic, parabolic and hyperbolic). Each type of such equations has significantly different characteristics in construction of problem solution: the Cauchy problem, mixed problem, boundary-value problem. The need to research of hyperbolic equations is due to the needs of applied nature. Indeed hyperbolic equations describe many physical operations such as the wave processes, oscillating characteristics of radio-electronic circuits, the movement of liquids and gases in certain circumstances. A large number of problems of celestial mechanics are reduced to solving equations of this type.

The wave equation is a difficult object to study, and therefore of great interest is the development of new methods for constructing the analytical and approximate solutions of linear and quasi-linear differential equations in partial derivatives and study their properties.
The investigation of the existence and uniqueness of the solution of the wave equation involves the imposition of additional conditions (initial, boundary). Therefore classes of problems (the Cauchy problem, mixed problem, boundary-value problem) are distinguished in the theory of differential equations in partial derivatives.
Given the results of [1], we can state that the solution of 2π-periodic boundary-value problem $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ u(x,t+2\pi)=u(x,t)$, $0<x<\pi,\ t\in\mathbf{R}$, in the form $u_{\Delta}(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau$, where $\mu(t)$ – unknown function, is a solution of such Cauchy problem: $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t)$, $u(0,t)=0,\ u_x(0,t)=\mu(t)$ in the characteristic triangle $\Delta=\{(x,t)\in\mathbf{R}^2:\ \ 0\le x\le\pi,\ \ \ x\le t\le 2\pi-x\}$. Based on this statement and using methods of the theory of differential equations in partial derivatives and methods of the theory of integral equations, in the rectangular $[0,\pi]\times[0,2\pi]=\prod_{2\pi}$ we constructed the uninterrupted solution of non-homogeneous linear the second-order hyperbolic equation $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$, which satisfies the boundary conditions $u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ t\in[0,2\pi]$. The solution is very similar to the combination of D'Alembert formulas. But in the fact in the d'Alembert formula variable *t* ever owned **R**, and in the article $t\in[0,2\pi]$. In this case, a simple formula of d'Alembert will not be applicable, but the combination of functions $u_{\Delta}(x,t)$, $u_{\Delta_1}(x,t)$, $u_{\Delta_2}(x,t)$, which are solutions of the boundary-value problem in the corresponding triangles $\overline{\Delta},\ \overline{\Delta}_1,\ \overline{\Delta}_2$, gives the explicit form of the boundary-value problem solution. In this case it isn't necessary to expanse the series, to investigate the formal convergence of series. The clear analytical formula is given. This is a significant result, which has a further practical application.
In the article the structure of uninterrupted solution of the wave equation in classes of 2π-periodic functions is studied. On the base of the results the conditions for the existence of such solutions are always performed in a certain class of 2π-periodic in the time variable functions, although the solution does not satisfy the conditions of periodicity $u(x,0)\ne u(x,2\pi)$, and therefore can't be a classical solution of the boundary-value 2π-periodic problem $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$, $u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ u(x,t+2\pi)=u(x,t)$.
The conditions of existence of 2π-periodic in the time variable solutions of non-homogeneous wave equation with zero boundary conditions on the variable *x* in the class of generalized solutions are established. The existence of generalized (uninterrupted $u\in C[0,\pi]\times\mathbf{R}$) solutions of boundary-value 2π-periodic problem is proved and conditions under which uninterrupted generalized solution could be a classic solution are set.
The method of construction of uninterrupted solution of linear problem makes it possible to investigate the conditions for the existence of uninterrupted solutions of many nonlinear periodic boundary-value problems (problems of acoustics, hydrodynamics and theory of vibrations).
Key words: wave equation, uninterrupted solution, periodic solution, the boundary conditions.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У різних галузях сучасної науки виділяють процеси, які описуються математичними моделями, в основі яких лежать хвильові рівняння. Варто зазначити, що хвильові рівняння є складним об'єктом дослідження, а тому значний інтерес становить розробка нових методів побудови аналітичних і наближених розв'язків цих рівнянь та вивчення їх властивостей. Дослідження ж існування та єдиності розв'язку хвильового рівняння передбачає накладання додаткових умов (початкових, крайових). Саме тому розрізняють класи задач: задача Коші, мішана задача, крайова задача.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

У роботі [1] нами встановлено умови існування класичних ω– періодичних розв'язків крайової задачі для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t),\ \ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ \ 0\le x\le\pi,\ \ t\in\mathbf{R}$. Значна увага приділена дослідженню існування $\omega=2\pi$ – періодичних розв'язків вказаної задачі. Однак, у багатьох роботах зарубіжних математиків встановлено, що для майже лінійних (квазілінійних) гіперболічних рівнянь другого порядку вигляду $u_{tt}-u_{xx}=F(x,t,u,u_t,u_x)$ 2π-періодичні розв'язки існують лише в спеціальних функціональних просторах L_2, L_∞, H_r [2-8].

Варто зазначити, що для дослідження хвильових рівнянь (як лінійних, так і нелінійних рівнянь гіперболічного типу) використовують методи, за допомогою яких доводять лише існування розв'язків даних рівнянь. Усі їх можна поділити на чотири види.

До першого можна віднести так звані класичні методи, які передбачають відшукання розв'язку методом розділення змінних (метод Фур'є) [1].

Другий вид – це функціональні методи, які почали розвиватися в 60-х роках XX століття і передбачали доведення лише існування розв'язку на підставі властивостей оберненого оператора. Це методи Г. Брезіса, Д. Корона, Л. Ніренберга, П. Рабиновича, І. Рудакова [2-7].

Третій вид – метод малих знаменників (метод Б. Й. Пташника та його учнів) [8, 9].

Четвертий вид – аналітичні методи, запропоновані чеськими математиками О. Вейводою та М. Штедри та розвинуті школою учнів українських математиків Ю.О. Митропольського та Г.П. Хоми [10-12].

Метою роботи є побудова неперервного періодичного по часовій змінній розв'язку хвильового неоднорідного рівняння з нульовими крайовими умовами по змінній x та вивчення його властивостей.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Побудова неперервного розв'язку у прямокутнику. Знайдемо у прямокутнику $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ неперервний розв'язок такої задачі:

$$u_{tt}-u_{xx}=f\left(x,t\right),\quad 0<x<\pi,\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{1}$$

$$u\left(0,t\right)=u\left(\pi,t\right)=0,\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi. \tag{3}$$

Розіб'ємо прямокутник $\prod_{2\pi}=\left\{(x,t)\in\mathbf{R}^2: 0\le x\le\pi, 0\le t\le 2\pi\right\}$ прямими $t=x$ і $t=2\pi-x$ на такі три трикутники: $\overline{\Delta}=\left\{0\le x\le\pi,\ x\le t\le 2\pi-x\right\}$; $\overline{\Delta}_1=\left\{0\le x\le\pi, 0\le t\le x\right\}$; $\overline{\Delta}_2=\left\{0\le x\le\pi,\ 2\pi-x\le t\le 2\pi\right\}$ (рис. 1).

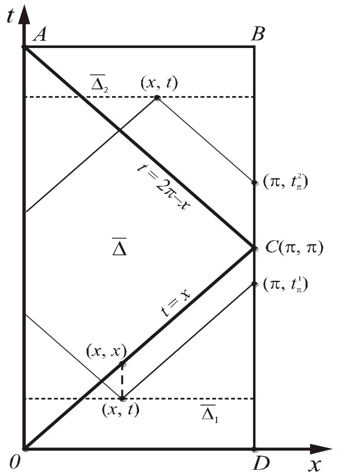

Рис. 1

На основі теореми 3 [1, с. 920] за умови, що $\mu(t)\in C^1(\mathbf{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}\left([0,\pi]\times\mathbf{R}\right)$, функція

$$u_{\Delta}(x,t)=\frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau \tag{4}$$

є єдиним класичним розв'язком задачі Коші

$$u_{tt}-u_{xx}=f\left(x,t\right),\quad 0<x<\pi,\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{5}$$

$$u(0,t)=0,\qquad u_x(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi \tag{6}$$

у характеристичному трикутнику $\overline{\Delta}$.

Доведемо, що функція

$$u_{\Delta_1}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi+t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}d\eta\int\limits_{\eta}^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}d\eta\int\limits_{2\pi+t-x-\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau \tag{7}$$

при $\mu(t)\in C^1(\mathbf{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}([0,\pi]\times\mathbf{R})$, є класичним розв'язком рівняння (1) у трикутнику $\overline{\Delta}_1=\{0\le x\le\pi,\quad 0\le t\le x\}$. Справді, оскільки розв'язок задачі Коші (5), (6) знайдено у трикутнику $\overline{\Delta}$, то відомо його значення на характеристиці $t=x$:

$$u_{\Delta}(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{\eta}^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau .$$

При $\mu(t)\in C^1(\mathbf{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}([0,\pi]\times\mathbf{R})$ рівняння (1) еквівалентне у трикутнику $\overline{\Delta}_1$ системі першого порядку

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}=f(x,t),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=f(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_1+u_2}{2},$$

для якої, згідно з умовами (2), (3), визначаються такі початкові умови:

$$u_1(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{9}$$

$$u_2(\pi,t)=\beta(t),\quad 0\le t\le 2\pi, \tag{10}$$

$$u(x,x)=u_{\Delta}(x,x),\quad 0\le x\le\pi, \tag{11}$$

де $\beta(t)$ – невідома функція.

Знайдемо значення t_0^- і t_π^+ (див. рис. 1). Очевидно, характеристика $\xi=x+t-\tau$, що проходить через фіксовану точку $(x,t)\in\overline{\Delta}_1$, перетинає вісь $\tau\,(\xi=0)$ у точці $(0,t_0^-=x+t)$, а характеристика $\xi=x-t+\tau$ перетинає пряму $\xi=\pi$ у точці $(\pi,t_\pi^+=\pi+t-x)$.

Інтегруючи кожне рівняння системи (8) за відповідними характеристиками, що виходять з фіксованої точки $(x,t)\in\overline{\Delta}_1$, одержуємо такі співвідношення:

$$u_1(x,t)=u_1(t+x-t_0^-,t_0^-)+\int\limits_{t_0^-}^{t}f(x+t-\tau,\tau)d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1,$$

$$u_2(x,t)=u_2(t_\pi^+-t+x,t_\pi^+)+\int\limits_{t_\pi^+}^{t}f(x-t+\tau,\tau)d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1,$$

$$u(x,t)=u_{\Delta}(x,x)+\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}\big(u_1(x,\tau)+u_2(x,\tau)\big)d\tau,\quad (x,t)\in\overline{\Delta}_1.$$

Враховуючи знайдені t_0^- і t_π^+ і беручи до уваги початкові умови (9)-(11), одержуємо

$$u_1(x,t)=\mu(t+x)+\int\limits_{t+x}^{t} f(x+t-\tau,\tau)d\tau,$$

$$u_2(x,t)=u_2(\pi,t-x+\pi)+\int\limits_{t-x+\pi}^{t} f(x-t+\tau,\tau)d\tau\equiv$$

$$\equiv\beta(t-x+\pi)+\int\limits_{t-x+\pi}^{t} f(x-t+\tau,\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

$$u(x,t)=u_\Delta(x,x)+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{t}\big(u_1(x,\tau)+u_2(x,\tau)\big)d\tau.$$

Оскільки, згідно з (2) $u(\pi,t)=0$, то $u_t(\pi,t)=0$. Тепер, використовуючи позначення $u_t=\dfrac{u_1+u_2}{2}$ і умову $u_t(\pi,t)=0$, маємо

$$u_1(\pi,t)+u_2(\pi,t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad u_2(\pi,t)=-u_1(\pi,t).$$

Тоді, на основі першого рівняння системи (12) знаходимо

$$u_2(\pi,t)=-u_1(\pi,t)\equiv-\mu(t+\pi)-\int\limits_{t+\pi}^{t} f(\pi+t-\tau,\tau)d\tau\equiv\beta(t),$$

і друге рівняння системи (12) перепишеться так:

$$u_2(x,t)=-\mu(t-x+2\pi)-\int\limits_{t-x+2\pi}^{t-x+\pi} f(t-x+2\pi-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{t-x+\pi}^{t} f(x-t+\tau,\tau)d\tau.$$

Враховуючи третє рівняння системи (12) і значення $u_\Delta(x,x)$, знаходимо

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}\big(u_1(x,\tau)+u_2(x,\tau)\big)d\tau.$$

Підставляючи у знайдену формулу значення $u_1(x,t)$ і $u_2(x,t)$, отримуємо

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}\big(\mu(\tau+x)-\mu(\tau-x+2\pi)\big)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}\left(\int\limits_{s+x}^{s} f(x+s-\tau,\tau)d\tau-\int\limits_{s-x+2\pi}^{s-x+\pi} f(s-x+2\pi-\tau,\tau)d\tau+\int\limits_{s-x+\pi}^{s} f(x-s+\tau,\tau)d\tau\right)ds\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{\eta}^{2x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}\big(\mu(\tau+x)-\mu(\tau-x+2\pi)\big)d\tau+$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}ds\int\limits_{s+x}^{s} f(x+s-\tau,\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}ds\int\limits_{s-x+2\pi}^{s-x+\pi} f(s-x+2\pi-\tau,\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}ds\int\limits_{s-x+\pi}^{s} f(x-s+\tau,\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Об'єднуючи перший і третій інтеграли (13), одержуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}\mu(\tau+x)d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_x^{t}\mu(\tau-x+2\pi)d\tau=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{2x}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{t-x+2\pi}\mu(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}\int_{0}^{t+x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_{2\pi+t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha. \tag{14}$$

Далі, перетворюючи другий, четвертий, п’ятий і шостий інтеграли рівності (13), маємо

$$-\int_0^x d\eta\int_{\eta}^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int_x^t ds\int_{s+x}^{s}f(x+s-\tau,\tau)d\tau-\int_x^t ds\int_{s-x+2\pi}^{s-x+\pi}f(s-x+2\pi-\tau,\tau)d\tau+$$

$$+\int_x^t ds\int_{s-x+\pi}^{s}f(x-s+\tau,\tau)d\tau=-\int_0^x d\eta\int_{\eta}^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int_x^t ds\int_0^x f(\eta,x+s-\eta)d\eta+$$

$$+\int_x^t ds\int_0^{\pi}f(\eta,s-x+2\pi-\eta)d\eta+\int_x^t ds\int_{\pi}^{x}f(\eta,\eta-x+s)d\eta\equiv 2I_1.$$

Змінюючи порядок інтегрування у другому, третьому та четвертому інтегралах і здійснюючи відповідні заміни змінних, приходимо до таких виразів:

$$2I_1=-\int_0^x d\eta\int_{\eta}^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int_0^x d\eta\int_{2x-\eta}^{x+t-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int_0^{\pi}d\eta\int_{2\pi-\eta}^{t-x+2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+$$

$$+\int_{\pi}^{x}d\eta\int_{\eta}^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau=-\int_0^x d\eta\int_{\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int_0^{\pi}d\eta\int_{2\pi-\eta}^{t-x+2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+$$

$$+\int_{\pi}^{x}d\eta\int_{\eta}^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int_0^{x}d\eta\int_{\eta}^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int_0^{x}d\eta\int_{\eta}^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau=$$

$$=-\int_0^x d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{t-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\int_0^{\pi}d\eta\int_{2\pi+t-x-\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau. \tag{15}$$

Враховуючи (14), (15), на основі формули (13), отримуємо формулу (7), що й потрібно було довести.

Проводячи аналогічні міркування, можна довести, що функція

$$u_{\Delta_2}(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^{t+x-2\pi}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_{t-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^x d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{2\pi-\eta}^{t+x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{t+x+\eta-2\pi}f(\eta,\tau)d\tau \tag{16}$$

при $\mu(t)\in C^1(\mathbf{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}([0,\pi]\times\mathbf{R})$ є класичним розв’язком рівняння (1) у трикутнику $\overline{\Delta}_2=\{0\le x\le\pi,\ 2\pi-x\le t\le 2\pi\}$.

Тепер, на основі формул (4), (7) і (16), побудуємо функцію

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases}u_{\Delta}(x,t), & (x,t)\in\overline{\Delta},\\ u_{\Delta_1}(x,t), & (x,t)\in\Delta_1\setminus\{t=x,\quad 0\le x\le\pi\},\\ u_{\Delta_2}(x,t), & (x,t)\in\Delta_2\setminus\{t=2\pi-x,\quad 0\le x\le\pi\},\end{cases} \tag{17}$$

яка визначена у прямокутнику $\Pi_{2\pi}$.

Досліджуючи функцію $\tilde{u}(x,t)$, переконуємося у справедливості таких тверджень.

Теорема 1. *Якщо* $\mu(t)\in C(\mathbf{R})$ і $f(x,t)\in C([0,\pi]\times\mathbf{R})$, *то функція* $\tilde{u}(x,t)$, *визначена формулою (17), є неперервною функцією у прямокутнику* $\prod_{2\pi}$.

Доведення. Оскільки $\mu(t)\in C(\mathbf{R})$ і $f(x,t)\in C^{0,1}([0,\pi]\times\mathbf{R})$, то інтеграли зі змінними межами, що входять у формулу (4), є неперервними функціями у всіх точках $(x,t)\in\overline{\Delta}$. Це означає, що $u_\Delta\in C(\overline{\Delta})$. Аналогічно $u_{\Delta_1}\in C(\overline{\Delta}_1)$ і $u_{\Delta_2}\in C(\overline{\Delta}_2)$. Розриви функції $\tilde{u}(x,t)$ можуть бути лише на прямих $t=x$ і $t=2\pi-x$, $0\le x\le\pi$.

Покажемо, що на прямій $t=x$ функції $u_\Delta(x,t)$ і $u_{\Delta_1}(x,t)$ приймають рівні значення, а на прямій $t=2\pi-x$ рівні значення приймають функції $u_\Delta(x,t)$ і $u_{\Delta_2}(x,t)$. Справді, покладаючи $t=x$ у формулах (4) і (7), одержуємо

$$u_\Delta(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{x}d\eta\int_\eta^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau$$

і

$$u_{\Delta_1}(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^{2x}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{x}d\eta\int_\eta^{2x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau.$$

Отже, $u_\Delta(x,x)=u_{\Delta_1}(x,x)$.

Аналогічно, покладаючи $t=2\pi-x$ у формулах (4) і (16), знаходимо

$$u_\Delta(x,2\pi-x)=\frac{1}{2}\int_{2\pi-2x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{x}d\eta\int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau$$

і

$$u_{\Delta_2}(x,2\pi-x)=\frac{1}{2}\int_{2\pi-2x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{x}d\eta\int_{2\pi-2x+\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau.$$

Отже, $u_\Delta(x,2\pi-x)=u_{\Delta_2}(x,2\pi-x)$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо* $\mu(t)\in C(\mathbf{R})$, $f(x,t)\in C([0,\pi]\times\mathbf{R})$ і *виконується умова*

$$\int_0^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\int_0^{\pi}d\eta\int_\eta^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau=0, \tag{18}$$

то функція $\tilde{u}(x,t)$, *визначена формулою (17), задовольняє крайові умови*

$$\tilde{u}(0,t)=\tilde{u}(\pi,t)=0,\quad 0\le t\le 2\pi. \tag{19}$$

Доведення. Справді, використовуючи означення (17) функції $\tilde{u}(x,t)$, маємо $\tilde{u}(0,t)=u_\Delta(0,t)=0$, $0\le t\le 2\pi$, тобто, перша крайова умова (19) завжди виконується. Тепер, обчислюючи $u_\Delta(\pi,\pi)$, $u_{\Delta_1}(\pi,t)$ і $u_{\Delta_2}(\pi,t)$, $0\le t\le 2\pi$, знаходимо

$$\tilde{u}(\pi,t)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mu(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau\,.$$

Звідси, припускаючи виконання рівності (18) теореми 2, переконуємося, що $\tilde{u}(\pi,t)=0$, $0\le t\le 2\pi$.

Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Якщо* $\mu(t)\in C(\mathbf{R})$, $f(x,t)\in C([0,\pi]\times\mathbf{R})$ *і виконуються умови*

1) $\mu(0)=\mu(2\pi)$; (20)

2) $\int_0^{\pi}\{f(\eta,2\pi-\eta)-f(\eta,\eta)\}\,d\eta=0$, (21)

то функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (17), має неперервні частинні похідні першого порядку в прямокутнику* $\Pi_{2\pi}$.

Доведення. Доведемо справедливість теореми для частинної похідної $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$. Для цього, на основі рівностей (4), (7) і (16), обчислимо такі похідні

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\big(\mu(t+x)-\mu(t-x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^{x}\{f(\eta,t+x-\eta)-f(\eta,t-x+\eta)\}d\eta,\quad (x,t)\in\bar{\Delta};\quad (22)$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\mu(t+x)-\frac{1}{2}\mu(2\pi+t-x)-\frac{1}{2}\int_0^{x}\{f(\eta,t+x-\eta)-f(\eta,t-x+\eta)\}d\eta-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{f(\eta,t-x+\eta)-f(\eta,2\pi+t-x-\eta)\}d\eta,\quad (x,t)\in\bar{\Delta}_1;\quad (23)$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\mu(t+x-2\pi)-\frac{1}{2}\mu(t-x)-\frac{1}{2}\int_0^{x}\{f(\eta,t+x-\eta)-f(\eta,t-x+\eta)\}d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{f(\eta,t+x-\eta)-f(\eta,t+x+\eta-2\pi)\}d\eta,\quad (x,t)\in\bar{\Delta}_2\,.\quad (24)$$

Враховуючи рівності (22)-(24) і умови теореми, стверджуємо, по-перше, що похідні $\dfrac{\partial u_{\Delta}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_{\Delta_1}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_{\Delta_2}}{\partial t}$ неперервні у своїх областях визначення. По-друге, покладаючи $t=x$ у виразах $\dfrac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial t}$, бачимо, що вони будуть рівними тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\mu(0)=\mu(2\pi)+\int_0^{\pi}\{f(\eta,\eta)-f(\eta,2\pi-\eta)\}d\eta\,.\quad (25)$$

Аналогічно, покладаючи $t=2\pi-x$ у виразах $\dfrac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial t}$, стверджуємо, що вони будуть рівними тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\mu(2\pi)=\mu(0)+\int_0^{\pi}\{f(\eta,2\pi-\eta)-f(\eta,\eta)\}d\eta. \qquad (26)$$

Отже, при виконанні умов 1) і 2) теореми 3 рівності (25) і (26) істинні, а отже, функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (17), має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial t}$ у всіх точках прямокутника $\prod_{2\pi}$.

Тепер, на основі похідних

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}\big(\mu(t+x)+\mu(t-x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^{x}\big\{f(\eta,t+x-\eta)+f(\eta,t-x+\eta)\big\}d\eta,\ \ (x,t)\in\bar{\Delta};$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_1}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}\big(\mu(t+x)+\mu(2\pi+t-x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^{x}\big\{f(\eta,t+x-\eta)+f(\eta,t-x+\eta)\big\}d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big\{f(\eta,t-x+\eta)+f(\eta,2\pi+t-x-\eta)\big\}d\eta,\qquad (x,t)\in\bar{\Delta}_1;$$

$$\frac{\partial u_{\Delta_2}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}\big(\mu(t+x-2\pi)+\mu(t-x)\big)-\frac{1}{2}\int_0^{x}\big\{f(\eta,t+x-\eta)+f(\eta,t-x+\eta)\big\}d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\big\{f(\eta,t+x-\eta)-f(\eta,t+x+\eta-2\pi)\big\}d\eta,\qquad (x,t)\in\bar{\Delta}_2,$$

переконуємося також, що при виконанні умов 1) і 2) теореми 3

$$\frac{\partial u_{\Delta}(x,x)}{\partial x}=\frac{\partial u_{\Delta_1}(x,x)}{\partial x}\quad \text{і}\quad \frac{\partial u_{\Delta}(x,2\pi-x)}{\partial x}=\frac{\partial u_{\Delta_2}(x,2\pi-x)}{\partial x}.$$

Отже, функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (17), має неперервні частинні похідні першого порядку, що й треба було довести.

Властивості неперервного розв'язку крайової задачі у класі 2π-періодичних функцій. Доведемо, що існують класи 2π-періодичних по t функцій, для яких справедливі теореми 2 і 3.

Введемо такі простори і класи функцій: $\tilde{C}^{i,j}_{\pi t}$ – простір обмежених функцій двох змінних x і t, неперервно диференційованих i раз по x та j раз неперервно диференційованих по t на множині $[0,\pi]\times\mathbf{R}$;

$$\tilde{C}^{0,0}_{\pi t}=\tilde{C}_{\pi t};$$

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $[0,\pi]\times\mathbf{R}$ разом з похідною по t;

$$A^{-}_{2\pi}=\big\{f: f(x,t)=f(x,t+2\pi)=-f(x,-t)\big\};$$

$$A^{+}_{2\pi}=\big\{f: f(x,t)=f(x,t+2\pi)=f(x,-t)\big\};$$

$$A_2=\big\{f: f(x,t)=f(\pi-x,\pi+t)=f(x,t+2\pi)\big\};$$

$$A^{-}_2=\big\{f: f(x,t)=f(\pi-x,\pi+t)=f(x,t+2\pi)=-f(x,-t)\big\};$$

$$Q_{2\pi}=\{\mu:\mu(t)=\mu(t+2\pi)\};\quad Q_{2\pi}^{-}=\{\mu:\mu(t)=\mu(t+2\pi)=-\mu(-t)\}.$$

Теорема 4. *Нехай функції* $\mu(t)$ *і* $f(x,t)$ *задовольняють такі умови:*

1) $\mu(t)\in C(\mathbf{R})\bigcap Q_{2\pi}^{-}$; 2) $f(x,t)\in A_{2\pi}^{-}\bigcap\tilde{C}_{\pi t}$.

Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (17), задовольняє крайові умови* $\tilde{u}(0,t)=\tilde{u}(\pi,t)=0$.

Доведення. Для доведення теореми 4 потрібно показати виконання умов теореми 2, тобто виконання умови (18).

Дійсно, через непарність і 2π періодичність функції $\mu(t)$ маємо

$$\int_0^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha=0.$$

Аналогічно одержуємо, що при $f\in A_{2\pi}^{-}\bigcap\tilde{C}_{\pi t}$ інтеграл

$$\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau=\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{-\eta}f(\eta,\tau)d\tau+\int_0^{\pi}d\eta\int_{-\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau=\int_0^{\pi}d\eta\int_0^{2\pi}f(\eta,\tau)d\tau\equiv 0.$$

Отже, виконується умова (18) теореми 2, а отже, функція $\tilde{u}(x,t)$ задовольняє крайові умови $\tilde{u}(0,t)=\tilde{u}(\pi,t)=0$, що й треба було довести.

Теорема 5*. Нехай* 1) $\mu(t)\in C(\mathbf{R})\bigcap Q_{2\pi}$; 2) $f(x,t)\in A_2\bigcap\tilde{C}_{\pi t}$.

Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (17), має неперервні частинні похідні першого порядку в прямокутнику* $\prod_{2\pi}$.

Доведення. Для доведення теореми 5 потрібно показати виконання умов теореми 3, а саме, (20), (21).

Оскільки $\mu(t)$ неперервна і 2π-періодична функція, то умова (20) завжди виконується.

Нехай тепер $f(x,t)\in A_2\bigcap\tilde{C}_{\pi t}$. Тоді на основі виразу лівої частини рівності (21) маємо

$$\int_0^{\pi}f(\eta,-\eta)d\eta-\int_0^{\pi}f(\eta,\eta)d\eta=\int_0^{\pi}f(\pi-\xi,-\pi+\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^{\pi}f(\eta,\eta)d\eta=\int_0^{\pi}f(\pi-\xi,\pi+\xi)d\xi-\int_0^{\pi}f(\eta,\eta)d\eta=0,$$

тобто, при виконанні умов теореми 5 завжди виконуються умови (20) і (21).

Теорему 5 доведено.

Зауваження 1. Слід зазначити, що функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (17), у класі 2π-періодичних за змінною *t* функцій не завжди буде 2π-періодичною за змінною *t* функцією. Справді, обчислюючи, згідно з формулами (7), (16), значення $\tilde{u}(x,0)$ і $\tilde{u}(x,2\pi)$, маємо

$$\tilde{u}(x,0)\equiv u_{\Delta_1}(x,0)=\frac{1}{2}\int_0^{x}\mu(\alpha)d\alpha+\frac{1}{2}\int_{2\pi-x}^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{x}d\eta\int_{-x+\eta}^{x-\eta}f(\eta,\tau)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{-x+\eta}f(\eta,\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{2\pi-x-\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau\equiv I_1^1+I_2^1+I_3^1+I_4^1+I_5^1;\qquad(27)$$

$$\tilde{u}(x,2\pi) \equiv u_{\Delta_2}(x,2\pi) = \frac{1}{2}\int_0^x \mu(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_{2\pi-x}^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^x d\eta \int_{2\pi-x+\eta}^{2\pi+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_{2\pi-\eta}^{2\pi+x-\eta} f(\eta,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_0^\pi d\eta \int_{\eta}^{x+\eta} f(\eta,\tau)d\tau \equiv I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + I_5^2. \quad (28)$$

Отже, припускаючи, що $f(x,t)$ – періодична по t функція, переконуємося, що перші три інтеграли рівностей (27) і (28) рівні між собою, тобто $I_k^1 \equiv I_k^2, k=1,2,3$, а $I_k^1 \neq I_k^2, k=4,5$. Це означає, що $\tilde{u}(x,0) \neq \tilde{u}(x,2\pi)$. Однак у класах функцій A_2 і $A_{2\pi}^+$, тобто при $f(x,t) \in A_2$ чи $f(x,t) \in A_{2\pi}^+$ можна довести, що $I_k^1 = I_k^2, k=4,5$. Отже, у цих класах функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (17), є також 2π-періодичною за змінною t функцією.

Теорема 6. *Нехай* 1) $\mu(t) \in C^1(\mathbf{R}) \cap Q_{2\pi}^-$; 2) $f(x,t) \in A_2^- \cap G_t$.

Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$, визначена формулою (17), є в прямокутнику $\Pi_{2\pi}$ 2π-періодичним класичним розв'язком задачі (1)-(3).

Узагальнено неперервний розв'язок крайової задачі. У попередньому пункті встановлено класи 2π-періодичних функцій, для яких завжди існує у прямокутнику $\bar{\Gamma}_{2\pi}$ неперервний розв'язок крайової задачі (1), (2) (теорема 4). Однак, цей результат справедливий і для більш широкого класу неперервних функцій.

Теорема 7. *Нехай* $f(x,t) \in \tilde{C}_{\pi t}$ *і*

$$\int_0^\pi d\eta \int_\eta^{2\pi-\eta} f(\eta,\tau)d\tau = \delta \neq 0. \quad (29)$$

Тоді для кожної функції $\mu(t) \in C(\mathbf{R})$, *для якої*

$$\int_0^{2\pi} \mu(\alpha)d\alpha = \gamma \neq 0, \quad (30)$$

крайова задача (1), (2) має єдиний узагальнено неперервний розв'язок у прямокутнику $\Pi_{2\pi}$.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $\beta(t) = \frac{\delta}{\gamma}\mu(t)$, де δ і γ визначені формулами (29), (30), і на основі формул (4), (7) і (16), покладаючи замість $\mu(t)$ функцію $\beta(t)$, побудуємо розв'язки $u_\Delta(x,t,\beta)$, $u_{\Delta_1}(x,t,\beta)$ і $u_{\Delta_2}(x,t,\beta)$ у трикутниках $\bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}_1$ і $\bar{\Delta}_2$. Тоді, згідно з теоремою 1, функція

$$\tilde{u}(x,t,\beta) = \begin{cases} u_\Delta(x,t,\beta), & (x,t) \in \bar{\Delta}, \\ u_{\Delta_1}(x,t,\beta), & (x,t) \in \Delta_1 \setminus \{t = x, \quad 0 \le x \le \pi\}, \\ u_{\Delta_2}(x,t,\beta), & (x,t) \in \Delta_2 \setminus \{t = 2\pi - x, \quad 0 \le x \le \pi\}, \end{cases} \quad (31)$$

буде неперервною у прямокутнику $\Pi_{2\pi}$, а отже, неперервним розв'язком рівняння (1). Покажемо, що функція $\tilde{u}(x,t,\beta)$ задовольняє крайові умови (2). Справді, $\tilde{u}(0,t,\beta) = u_\Delta(0,t,\beta) \equiv 0$, $0 \le t \le 2\pi$. Аналогічно в силу позначень (29) і (30), враховуючи, що $\beta(t) = \frac{\delta}{\gamma}\mu(t)$, маємо

$$\tilde{u}(\pi,t,\beta)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\beta(\alpha)\,d\alpha-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\frac{\delta}{\gamma}\gamma-\frac{1}{2}\delta\equiv 0\,,\quad 0\le t\le 2\pi\,,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження. У тривіальному випадку, тобто, коли $\int_0^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha\equiv 0$, твердження, аналогічне теоремі 6, вірне при додатковій умові на праву частину $f(x,t)$ рівняння (1), тобто, коли виконується умова $\int_0^{\pi}d\eta\int_{\eta}^{2\pi-\eta}f(\eta,\tau)d\tau\equiv 0$.

Теорема 8*. Нехай* 1) $\mu(t)\in C(\mathbf{R})\cap Q_{2\pi}^{-}$; 2) $f(x,t)\in A_{2\pi}^{-}\cap\tilde{C}_{\pi t}$.

Тоді функція $\tilde{u}(x,t)$*, визначена формулою (17), є неперервним розв'язком крайової задачі (1), (2).*

ВИСНОВКИ

У статті наведено нову схему дослідження розв'язків крайової періодичної задачі для лінійного неоднорідного хвильового рівняння $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$. Вказаний метод побудови розв'язку лінійної задачі дає змогу досліджувати умови існування неперервних розв'язків багатьох нелінійних крайових періодичних задач, які лежать в основі реальних процесів, що моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань).

Встановлено нові результати щодо неперервності розв'язку хвильового рівняння в класі періодичних функцій. Доведено існування узагальнених (неперервних $u\in C[0,\pi]\times\mathbf{R}$) розв'язків крайової 2π-періодичної задачі і встановлено, за яких умов узагальнено неперервний розв'язок може бути класичним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Митропольський Ю. О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольський, С. Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, №7. — С. 912-921.
2. Bahri A. Periodic solutions of a nonlinear wave equation / A. Bahri, H. Brezis // Proc. Roy Soc. Edinburg. — 1980. — 85A. — P. 313-320.
3. Brezis H. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems /H. Brezis, L. Nirenberg //Ann. Scuola norm. Sup. Pisa. — 1978. — 5, №2. — P. 225-326.
4. Brezis H. Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz / H. Brezis, J. M. Coron, L. Nirenberg //Comm. Pure Appl. Math. — 1980. — 33. — P. 667-689.
5. Rabinowitz P. Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Appl. Math. — 1967. — 20, №1. — P. 145-205.
6. Rabinowitz P. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations / P. Rabinowitz // Ibit. — 1969. — 22, №1. — P. 15-39.
7. Рудаков И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / И. А. Рудаков. — М., 1985. — 94 с.

8. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. — К. : Наукова думка, 1984. — 264 с.

9. Пташник Б. Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, І .Я. Кміть, В. М. Поліщук. — К. : Наукова думка, 2002. — 416 с.

10. Вейвода О. Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений / О. Вейвода, М. Штедри // Дифференциальные уравнения. — 1984. — XX, №10. — С. 1733-1739.

11. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. — К. : Наук. думка, 1991. — 232 с.

12. Хохлова Л. Г. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі / Л. Г. Хохлова, Н. Г. Хома, Я. Б. Петрівський // Волинський матем. вісник. — 1995, вип. 2. — С. 179-182.

REFERENCES

1. Mytropolskyi, Yu.O. and Khoma-Mohylska, S.H. (2005), "The existence conditions of solutions of periodic boundary-value problem for the inhomogeneous linear the second order hyperbolic equation. I", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 15, no. 7, pp. 912-921.

2. Bahri, A. and Brezis, H. (1980), "Periodic solutions of a nonlinear wave equation", *Proc. Roy Soc. Edinburg*, vol. 85A, pp. 313-320.

3. Brezis, H. and Nirenberg, L. (1978), "Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems", *Ann. Scuola norm. Sup. Pisa*, vol. 5, no. 2, pp. 225-326.

4. Brezis, H., Coron, J.M. and Nirenberg, L. (1980), "Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 33, pp. 667-689.

5. Rabinowitz, P. (1967), "Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations", *Comm. Pure Appl. Math*, vol. 20, no. 1, pp. 145-205.

6. Rabinowitz, P. (1969), "Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations", *Ibit*, vol. 22, no. 1, pp. 15-39.

7. Rudakov, Y. A. (1985), "Periodic solutions of nonlinear wave equation", Thesis abstract for Cand. Sc. (Physics and Math), 01.01.02, Moscow National University, Moscow, Russia.

8. Ptashnyk, B.Y. (1984), *Nekorrektnye granichnye zadachi dlya differentsialnykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [Incorrect boundary-value problems for differential equations with partial derivatives], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

9. Ptashnyk, B.Y., Ilkiv, V.S., Kmit, I.Ya and Polishchuk, V.M. (2002), *Nelokalni kraiovi zadachi dlia rivnian iz chastynnymy pokhidnymy* [nonlocal boundary-value problems for partial differential equations], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

10. Veivoda, O. and Shtedry M. (1984), "The existence of classical periodic solutions of the wave equation. Communication of the theoretic nature of the period and the geometric properties of the solutions", *Differential equations,* vol. XX, no. 10, pp. 1733-1739.

11. Mitropolskii,Yu.A., Khoma G.P. and Gromyak M.I. (1991), *Asimptoticheskie metody issledovaniya uravnenii giperbolicheskogo tipa* [Asymptotic methods of investigation of hyperbolic equations], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

12. Khokhlova, L.H., Khoma, N.H. and Petrivskyi Ya.B. (1995), "Trivial solutions of homogeneous periodic boundary-value problem", *Volynskyi matematychnyi visnyk,* Iss. 2, pp. 179-182.