

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Волошко Л. В., асистент

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,
пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

lyubov@voloshko.com

Досліджена задача знаходження оптимальної функції правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння, для розв'язування якої використовується один з варіантів градієнтного методу. На кожному кроці ітераційного процесу розв'язується лінійна крайова задача, яка, за допомогою методу потенціалу, зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Ефективність алгоритму підтверджується високою точністю отриманих чисельних результатів.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, метод потенціалу, градієнтний метод, оптимальне керування.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Волошко Л. В., асистент

*Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара,
пр. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49010, Украина*

lyubov@voloshko.com

Исследуется задача нахождения оптимальной функции правой части неоднородного бигармонического уравнения, для решения которой используется один из вариантов градиентного метода. На каждом шаге итерационного процесса решается линейная граничная задача, которая, с помощью метода потенциала, сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эффективность алгоритма подтверждается высокой точностью полученных численных результатов.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, метод потенциала, градиентный метод, оптимальное управление.

RIGHT-HAND SIDE FUNCTION OPTIMAL CONTROL PROBLEM SOLUTION FOR INHOMOGENEOUS BIHARMONIC EQUATION

Voloshko L. V., assistant

*Dnipropetrovs'k national university named after Oles Honchar,
Haharina avenue 72, Dnipropetrovsk, 49010, Ukraine*

lyubov@voloshko.com

Mathematical model construction of complicate physical phenomenon often leads to the setting and solving problems of parameters optimal control in differential equations in partial derivatives. Chosen equation with boundary and initial conditions is usually mathematical model basis of the object, which is under analysis. Optimal control of right-hand side function in non-linear problem for inhomogeneous biharmonic equation in irregular shape region has been investigated. The particular case for such kind of problem is the problem of plate theory. It is formulated as follows: when boundary conditions are given, plate load need to be found, in such way that the bends in the plate points were as small as possible. One of the gradient method variations is used for this problem solution. Such kind of problem feature is the fact that iterative process construction is impossible without obtaining sufficiently accurate linear problem solution. Otherwise, the non-linear problem will be solved with unacceptable error.

That is why the potential method for boundary value problem with inhomogeneous biharmonic equation and inhomogeneous boundary conditions is presented in this paper. Due to this approach, problem solution has been found as a sum of a biharmonic potentials and particular solution of inhomogeneous biharmonic equation. Satisfaction of boundary conditions leads to the system of Fredholm first kind integral equations. Whereas potential kernels comprise logarithmic peculiars, the self-regularization effect occurs in these kernels. And that is the reason why this incorrect problem can be calculated with high level of accuracy without extra regularization procedures. Besides, analytical solution for this problem has been obtained. Boundary Green's function and right-hand side functions of boundary conditions and biharmonic equation in explicit form has been presented in this solution.

Linear problem was solved numerically according to this method. Obtained solution was verified with the help of model problem, which was constructed in the following way: model function was chosen and then the same function was put in the boundary conditions and in the right-hand side part of biharmonic equation (after taking all necessary particular derivatives). Thus, both obtained values and model function values should coincide in the region points, because of the solution uniqueness. Numerical results, which depict high effectiveness of algorithm, have been shown. Hereupon method for solution of optimal control problem for right-hand side function has been described. It is based on gradient method with fractional steps. Accordingly Frechet derivative for quality functional has been presented in the paper. Algorithm runs as follows: initial step is chosen, region is covered by grid; Frechet derivative is calculated and the step in antigradient direction for every point of this grid is done; reduction monotony condition of functional values is checked on every iteration; if this condition is violated then algorithm step should be bisected. Thus minimizing sequence is built. Every element of this sequence is formed with the help of linear problem solution.

Modal problem for checking algorithm operating reability has been performed. This problem was formed on the principles similar to linear model problem. But this time model function contained certain parameter and was chosen in such way that this parameter remained in right-hand side function of biharmonic equation, where forth-order derivative is obtained, and this function acquired constant values at the region bound. This way, it will be easy to comprehend what minimal value right-hand side function can acquire. This value need to be compared with numerical solution. Corresponding calculation results for boundary conditions optimization in appropriate problem allow us to come to conclusion about effectiveness of given approach. Software implementation indicates the application possibility of this method in constructing algorithms for right-hand side function control for elliptic type equation.

Key words: biharmonic equation, potential method, gradient method, optimal control.

ВСТУП

Побудова математичної моделі складного фізичного явища часто призводить до постановки та розв'язування задач оптимального керування параметрами диференціальних рівнянь у частинних похідних. Обране рівняння разом з граничними та початковими умовами зазвичай складають основу математичної моделі об'єкта, що підлягає аналізу [1]. За допомогою різних варіантів градієнтних методів успішно розв'язуються задачі керування параметрами диференціальних рівнянь та оптимального розбиття множин [2]. У роботі [3] наведені типи та характеристика основних обернених задач, вказується на некоректність як основну їх математичну особливість. У цій же роботі розглядаються способи оптимізації параметрів цих задач разом з усуненням їх некоректності. Проте задачі оптимального керування системами, які описані бігармонічними рівняннями, для областей складної форми мало вивчені. Тому в роботі розглядається коефіцієнтна задача оптимізації правої частини неоднорідного бігармонічного рівняння. Одним з факторів, який істотно її ускладнює, є неканонічність форми області визначення шуканих функцій. Зрозуміло, що така задача може бути розв'язана лише із застосуванням методів обчислювальної математики. Без точного розв'язку лінійної задачі неможливо застосувати градієнтний метод, побудувати збіжний ітераційний процес, з потрібною точністю отримати розв'язок оптимізаційної задачі. Успішно подолати цю проблему дозволяє алгоритм розв'язування лінійної крайової задачі за допомогою граничних інтегральних рівнянь. Аналіз отриманих розв'язків, їх точність, простота алгоритму, затрачений машинний час свідчать про перспективність застосування цього підходу до інших граничних задач математичної фізики.

ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

з граничними умовами

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

де замкнутий контур Γ оточує область $\Omega \in R^2$, функції крайових умов $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y) \in L^2(\Gamma)$ задані на контурі Γ , n – внутрішня нормаль в точці $(x, y) \in \Gamma$. Функція правої

частини неоднорідного бігармонічного рівняння $f(x, y) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$ задана в області Ω , де \bar{B} – деяка, обмежена певними умовами, замкнена підмножина функціонального простору. Функція $w(x, y) \in C^4(\bar{\Omega})$ є розв'язком задачі (1)-(2). У [4] доведено існування і єдиність розв'язку цієї задачі.

Очевидно, що розв'язок задачі (1)-(2) залежить від правої частини рівняння і функцій крайових умов. У припущенні, що функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ задані, поставимо задачу знаходження такої функції $f(x, y) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$, яка доставляє мінімум функціоналу

$$I(f(\cdot, \cdot)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy,$$

де $w(x, y; f(x, y))$ – розв'язок крайової задачі (1)-(2), який відповідає функції правої частини рівняння (1).

Скорочено задача записується так:

$$I(f(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}}. \quad (3)$$

Зауваження. Частинним випадком задачі (1)-(2) є наведена нижче задача теорії пластин:

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$w = \varphi(x, y) = 0, \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$I(f(\cdot, \cdot)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}},$$

де Ω – серединна площина пластини, обмежена контуром Γ , $q(x, y)$ – поперекове навантаження на пластину, $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини, h – товщина

пластини, E – модуль пружності першого роду і σ – коефіцієнт Пуассона її матеріалу. Крайові умови означають, що точки контуру пластини не переміщуються $\varphi(x, y) = 0$, а кут нахилу їх закріплення визначений, тобто $tg(\alpha(x, y)) = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma$. Задача полягає у знаходженні такого навантаження $q(x, y)$, щоб згин у кожній точці пластини був якомога меншим з урахуванням заданих крайових умов (рис. 1).

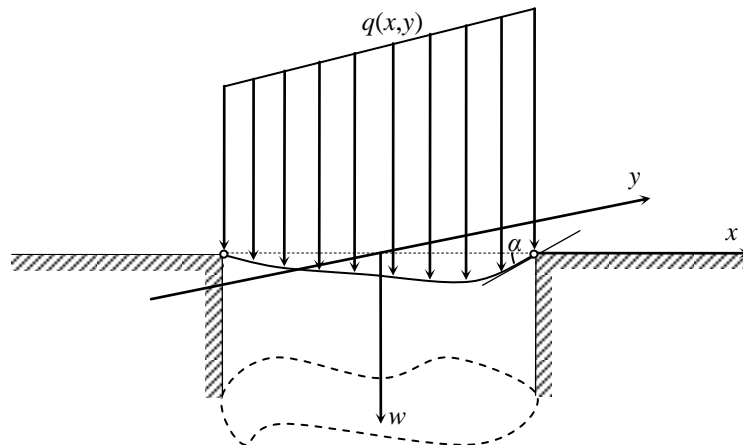


Рис. 1. Згин пластини під дією навантаження $q(x, y)$

Важливою складовою розв'язку задачі (1)-(3) є лінійна задача (1)-(2). Тому спочатку розглянемо алгоритм її розв'язування із застосуванням методу потенціалу.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Згідно з [4], розв'язок задачі (1)-(2) будемо шукати у вигляді

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y). \quad (4)$$

Функція $w_1(x, y)$ є частинним розв'язком неоднорідного бігармонічного рівняння

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \quad (5)$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, (x, y) – точка спостереження, (ξ, η) – змінна інтегрування; функція $w_2(x, y)$ є розв'язком задачі для однорідного бігармонічного рівняння

$$\Delta \Delta w_2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (6)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} w_2 &= \varphi(x, y) - w_1(x, y), \\ \frac{dw_2}{dn} &= \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Розв'язок задачі (6)-(7) є сумою бігармонічних потенціалів [4]

$$w_2(x, y) = \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma, \quad (8)$$

де $\mu_1, \mu_2 \in L^2(\Gamma)$ – поки що довільні і невідомі функції щільності, ν – внутрішня нормаль у точці $(\xi, \eta) \in \Gamma$.

Розв'язок (8) має задовольняти крайовим умовам (7), що призводить до такої системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma} r^2 \ln r \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) &= \\ &= \varphi(x, y) - w_1(x, y); \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n \partial \nu} (r^2 \ln r) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) &= \\ &= \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y); \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \right.$$

звідки будуть знайдені $\mu_1(\xi, \eta)$, $\mu_2(\xi, \eta)$. Цю систему запишемо в матричному вигляді

$$\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y) \Big|_{(x,y) \in \Gamma} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де матричне ядро

$$A(\xi, \eta; x, y) = \begin{pmatrix} r^2 \ln r & \frac{\partial}{\partial v}(r^2 \ln r) \\ \frac{\partial}{\partial n}(r^2 \ln r) & \frac{\partial}{\partial n \partial v}(r^2 \ln r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \check{G}_1 & \check{G}_2 \\ \frac{\partial \check{G}_1}{\partial n} & \frac{\partial \check{G}_2}{\partial n} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\check{G} = \begin{pmatrix} r^2 \ln r & \frac{\partial}{\partial v}(r^2 \ln r) \end{pmatrix} = (\check{G}_1 \quad \check{G}_2).$$

Наявність у ядрах системи рівнянь (9) логарифмічних особливостей дозволяє досягти регуляризуючого ефекту їх розв'язування прямими обчислювальними методами. Їх суть полягає в тому, що систему інтегральних рівнянь (9) за допомогою формул типу Сімпсона зведемо до системи алгебраїчних. Для цього контур Γ розбиваємо на елементарні дуги, на кожній з яких обираємо серединну точку. Систему інтегральних рівнянь наближено, заміною інтегралів за елементарними дугами, представляємо у вигляді системи лінійних алгебраїчних відносно $\mu_1(\xi, \eta)$, $\mu_2(\xi, \eta)$ на ділянках контура [6].

Тепер наведемо розв'язок (4) у детальному вигляді

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \check{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \left(\check{G}_1(x, y; \xi, \eta), \check{G}_2(x, y; \xi, \eta) \right) \Big|_{(x, y) \in \Omega} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta). \quad (11)$$

Далі, розв'язок (11) запишемо таким чином, щоб в явному виді були присутні функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$.

Для інтегрального оператора $\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y) d\Gamma(\xi, \eta)$ існує обернений, оскільки головна діагональ матричного ядра (10) має логарифмічну особливість, а недіагональні елементи неперервні [7]. Тому, записуємо розв'язок системи інтегральних рівнянь (9) у вигляді

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \check{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} \check{G}(x, y; \xi, \eta) \Big|_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(\xi, \eta; x, y) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta).$$

Позначивши

$$G(x, y; \xi, \eta) = (G_1(x, y; \xi, \eta), G_2(x, y; \xi, \eta)) = \check{G}(x, y; \xi, \eta) \Big|_{(x, y) \in \Omega} \cdot A^{-1}(x, y; \xi, \eta),$$

остаточно отримаємо розв'язок задачі (1)-(2) у такому вигляді:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \check{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta), \quad (12)$$

де $G(x, y; \xi, \eta)$ – називають контурною функцією Гріна.

Отже, було отримано аналітичний розв'язок задачі (1)-(2) у вигляді (12), який покладено в основу побудови обчислювального алгоритму розв'язування цієї задачі методом потенціалу, детально описаного в [6]. Далі розглянемо конкретні приклади, які дозволяють оцінювати ефективність такого підходу.

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛУ

Розглянемо такі крайові задачі (1)-(2), для яких розв'язок відомий заздалегідь. Для перевірки достовірності розв'язку наведемо приклади різних модельних функцій $g(x, y)$, визначивши $f(x, y)$ таким чином: $\Delta g(x, y) = f(x, y)$, а також розглянемо різні форми областей Ω . Визначивши значення $g(x, y)$ і її нормальної похідної в точках контуру, визначимо крайові умови $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$. Отже, в силу єдиності розв'язку прямої задачі, має місце $g(x, y) \equiv w(x, y)$ для внутрішніх точок області, тобто $(x, y) \in \Omega$.

Приклад 1. Нехай модельна функція $g(x, y) = \frac{x^2 y^4}{24} + x^6$, тоді $\Delta g = 361x^2 + 2y^2$, тобто

$$f \equiv 361x^2 + 2y^2, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \varphi = \frac{x^2 y^4}{24} + x^6, \quad \psi = \left(\frac{xy^4}{12} + 6x^5 \right) \cos(n \wedge x) + \frac{x^2 y^3}{6} \cos(n \wedge y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Обираємо неканонічний контур Γ – овал Касіні (рис. 2), який задається рівнянням

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi},$$

де (ρ, φ) – полярні координати, а розрахунки проведені для параметрів $a=1,2$, $c=1$. Чисельний розв'язок наведено в табл. 1.

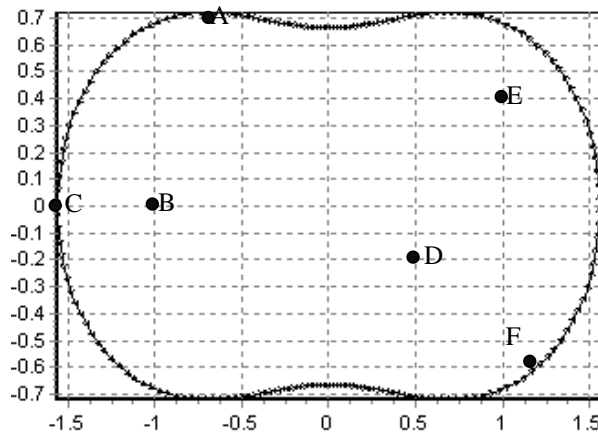


Рис. 2. Область Ω і точки, в яких наведено розв'язок

Таблиця 1 – Порівняння обчислень модельної і знайденої функцій у деяких точках області Ω

Точка (x, y)	Наближене $w(x, y)$	Точне $w(x, y)$	Похибка
A (-0,7; 0,7)	0,12134	0,12255	0,00121
B (-1,0; 0,0)	1,00195	0,99998	0,00197
C (-1,5; 0,0)	11,39234	11,39063	0,00171
D (0,5; -0,2)	0,01511	0,01564	0,00053
E (1,0; 0,4)	1,00249	1,00107	0,00142
F (1,2; -0,6)	2,99920	2,99376	0,00544

Відносна похибка складає 0,05%.

Приклад 2. Тепер розглянемо класичну задачу лінійної теорії пластин.

$$\Delta \Delta w = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

У монографії [8] наведено розв'язок задачі для випадку, коли жорстко закріплена пластина має форму квадрата зі стороною a і навантаженням, розподіленим за гідростатичним законом $q(x, y) = \left(\frac{q_0}{2} + \frac{q_0 x}{2a} \right)$. Нехай $a = 4$, $q_0 = 175000$ н/м.кв.

Відповідно до [8] згин у центрі симетрії квадратної пластини знаходиться за формулою $w(0;0) = \alpha \cdot \frac{q_0 a^4}{D}$, де $\alpha = 0,00063$ – емпіричний коефіцієнт. У результаті обчислень за цією формулою маємо $w(0;0) = 0,0114$. Точний розв'язок, отриманий викладеним методом потенціалу, $w(0;0) = 0,0115$. Відносна похибка складає 0,8%.

Аналіз отриманих даних свідчить про високу точність розв'язку задачі (1)-(2), у тому числі для області складної форми. Тому, цей метод будемо застосовувати для розв'язування поставленої задачі оптимального керування правою частиною неоднорідного бігармонічного рівняння.

ОПИС МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ (1)-(3) ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ

Повернемося до постановки задачі (1)-(3):

$$I(f(\cdot, \cdot)) \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in \bar{B}},$$

де $I(f(\cdot, \cdot)) = \iint_{\Omega} w^2(x, y; f(x, y)) dx dy$, а стан керованого об'єкта описується диференціальним рівнянням

$$\Delta \Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

з крайовими умовами

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Більш детально, з урахуванням аналітичного розв'язку (12) лінійної крайової задачі (1)-(2), функціонал $I(f(\cdot, \cdot))$ представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{I}(f(\cdot, \cdot)) = & \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \left(\varphi(x, y) - w_1(x, y) \right) \right. \\ & \left. \left(\psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \right) d\Gamma(\xi, \eta) \right]^2 dx dy \rightarrow \min_{f(\cdot, \cdot) \in L^2(\bar{\Omega})}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функціонал (13) – опуклий напівнеперервний знизу на $\bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$, тому, за теоремою Вейерштраса, досягає своєї нижньої грані в єдиній точці $f^*(\cdot, \cdot) \in \bar{B} \subset L^2(\bar{\Omega})$.

Опишемо алгоритм розв'язування задачі (1)-(2), (13), побудований на основі градієнтного методу з дробленням кроку [3, 5]. Попередньо запишемо аналітичний вид похідної Фреше функціоналу (13) в кожній точці $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \Omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}(f(\hat{\xi}, \hat{\eta}))}{\partial f(\hat{\xi}, \hat{\eta})} = & \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} \tilde{G}_1(x, y; \xi, \eta) \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{\Gamma} G(x, y; \xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \varphi(x, y) - w_1(x, y) \\ \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\tilde{G}_1(x, y; \hat{\xi}, \hat{\eta}) - \tilde{G}_1(x, y; \hat{\xi}, \hat{\eta}) \int_{\Gamma} G_1(x, y; \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \tilde{G}_1(x, y; \hat{\xi}, \hat{\eta})}{\partial n} \int_{\Gamma} G_2(x, y; \xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Алгоритм

Початковий етап

Крок 1. Обрати довільне початкове наближення $f^0(x, y)$ і початковий крок градієнтного методу $\alpha^0 > 0$, задати сітку, яка розіб'є область Ω на $N \times M$ точок $(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij})$, встановити лічильник ітерацій $k = 0$ та точність $\varepsilon > 0$.

Крок 2. Обчислити наближено $\tilde{I}(f^0(x, y))$. Перейти до основного етапу.

Основний етап

Крок 1. Обчислити наближено похідну Фреше (14) в кожній точці $(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij})$ області Ω , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$.

Крок 2. Знайти $k+1$ наближення функції $f(x, y)$ за правилом

$$f^{k+1}(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij}) = P_{\bar{B}} \left(f^k(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij}) - \alpha^k \frac{\partial \tilde{I}(f^k(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij}))}{\partial f^k(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij})} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де $P_{\bar{B}}$ – проекція наближення функції $f(x, y)$ на замкнену множину \bar{B} . Обчислити значення функціоналу $\tilde{I}(f^{k+1}(x, y))$.

Крок 3. Перевірити умову монотонності спадання значень функціоналу (13) $\tilde{I}(f^{k+1}(x, y)) < \tilde{I}(f^k(x, y))$. Якщо вона виконується, покласти $\alpha^{k+1} = \alpha^k$ і перейти до кроку 4, в протилежному випадку – величину кроку α^k поділити навпіл і повернутися до кроку 2. Виконувати дроблення кроку α^k до тих пір, поки не відновиться монотонність.

Крок 4. Здійснити перевірку умови завершення ітераційного процесу $\sqrt{\frac{1}{N \cdot M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |f^{k+1}(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij}) - f^k(\hat{\xi}_{ij}, \hat{\eta}_{ij})|^2} < \varepsilon$. У випадку її невиконання заміняємо k на $k+1$ і повертаємося до кроку 1.

Алгоритм описано.

Таким чином, розв'язок задачі (1)-(3) зводиться до побудови мінімізуючої послідовності $\{f^k(x, y)\}$ за формулою (15), при цьому на кожній ітерації розв'язується лінійна задача (1)-(2) за допомогою методу потенціалу.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Для перевірки достовірності роботи описаного вище алгоритму складемо наступну модельну задачу.

Розглянемо функцію

$$g(x, y; \lambda) = (\lambda^2 + 1) \cdot (1 - (x^2 + y^2))^2 + (1 - (x^2 + y^2)), \quad \lambda \in [0; 1], \quad (16)$$

в області Ω , яка обмежена контуром $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$. Аналогічно до використання модельної функції для лінійної задачі (1)-(2), задачу (1)-(3) представимо у вигляді:

$$I(g) \rightarrow \min_{f \in L^2(\Omega)}, \quad (17)$$

$$\text{де } I(g) = \iint_{\Omega} g^2(x, y; \lambda) dx dy,$$

$$\Delta g = f(x, y) \equiv 64(\lambda^2 + 1), \quad (x, y) \in \Omega \quad (18)$$

$$g(x, y; \lambda) = \varphi(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$\left(\frac{dg}{dn}(x, y; \lambda) \right) = \psi(x, y) \equiv (-4x(\lambda^2 + 1)(1 - (x^2 + y^2)) - 2x) \cos(n \wedge x) + \\ + (-4y(\lambda^2 + 1)(1 - (x^2 + y^2)) - 2y) \cos(n \wedge x) = 2, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (19)$$

Функція $g(x, y; \lambda)$ підібрана таким чином, щоб параметр λ був відсутній у правій частині другої крайової умови (19) і при цьому виконувалася перша. З аналізу (16) і (18) випливає, що при значенні параметра $\lambda = 0$

$$I_{\min}(g) = \iint_{\Omega} g^2(x, y; 0) dx dy$$

і при цьому права частина неоднорідного бігармонічного рівняння $f(x, y) \equiv 64$, $(x, y) \in \Omega$. Як початкове наближення функції $f(x, y)$ можна взяти, наприклад, функцію вигляду (18) при різних $\lambda \neq 0$. Згідно з ітераційною формулою (15) функціональна послідовність збігається до розв'язку $f(x, y) = 64$, а значення функціоналу досягає мінімуму.

ВИСНОВОК

Отже, у роботі викладено спосіб розв'язування задачі оптимального керування правою частиною рівняння та схема обчислювального експерименту для практичної перевірки достовірності отриманих результатів. Для цього було використано градієнтний метод, на кожній ітерації якого методом потенціалу розв'язувалася лінійна крайова задача. Результати аналогічних обчислювальних експериментів для оптимізації крайових умов у відповідній задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння дозволяють зробити висновок про ефективність викладеного підходу. Практична програмна реалізація свідчить про можливість застосування цього підходу для побудови алгоритмів задач оптимального керування правою частиною рівнянь еліптичного типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергієнко І. В. Наукові ідеї В.М. Глушкова та розвиток актуальних напрямів інформатики / І. В. Сергієнко. — К. : Наук. думка, 2013. — 288 с.
2. Киселева Е. М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина. — К. : Наукова думка, 2013. — 606 с.
3. Ободан Н. І. Обернені задачі ідентифікації моделей / Н. І. Ободан, Н. А. Гук. — Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2013. — 47 с.
4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 736 с.
5. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. — М. : Наука, 1978. — 487 с.
6. Волошко Л. В. Розв'язок крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння і постановка зворотної коефіцієнтної задачі / Л. В. Волошко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наукових праць. — Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2012. — С. 65-71.
7. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1986. — 287 с.
8. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки = Theory of plates and shells / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М. : USSR, 2009. — 635 p.

REFERENCES

1. Serhienko, I.V. (2013), *Naukovi idei V.M. Glushkova ta rozvytok aktulnykh napriamkiv informatyky* [V.M. Glushkov's scientific ideas and actual informatics trends development], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
2. Kiseleva, E.M., Koryashkina, L.S. (2013) *Modeli i metody resheniya nepreryvnykh zadach optimalnogo razbieniya mnozhestv: lineinye, nelineinye, dinamicheskie zadachi* [Models and methods for solution of continuous problems of set optimal partition: linear, non-linear, dynamic problems], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
3. Obodan, N.I. and Huk, N.A. (2013) *Obernenni zadachi identyfikatsii modelei* [Identification models inverse problems], RVV DNU, Dnipropetrovsk, Ukraine.
4. Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1972) *Uravenniya matematicheskoi fiziki* [Mathematical physics equations], Nauka, Moscow, Russia.
5. Fedorenko, R.P. (1978) *Priblizhennoe reshenie zadach optimalnogo upravleniya* [Approximate solution of optimal control problems], Nauka, Moscow, Russia.
6. Voloshko, L.V. (2012), "Boundary value problem for inhomogeneous biharmonic equation solution and inverse coefficient problem formulation", *Pytannia prykladnoi matematyky i matematychnogo modeliuвання. Zbirnyk naukovykh prac*, pp. 65-71.
7. Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Ya. (1986) *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods ill-posed problems solutions], Nauka, Moscow, Russia.
8. Timoshenko, S.P. and Voinovskii-Kriger S. (2009) *Plastinki i obolochki* [Theory of plates and shells], Librokom, Moscow, Russia.