

- inflexibility of fibred-reinforced composites], *Mekhanika kompozitnykh materialov*, t. 45, no. 1, pp. 109-144.
5. Grebenyuk, S.N. (2011) *Uprugiye kharakteristiki kompozitsionnogo materiala s transtropnoy matritsey i voloknom* [Resilient descriptions of composite material with a transtropic matrix and fibre] *Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdogo tila: zbirnyk naukovykh prats'*, Lira, Dnipropetrovs'k, Ukraine, vol. 12, pp. 62-68.
  6. Grebenyuk, S.N. (2012) *Opredeleniye prodolnogo modulya uprugosti kompozita na osnove energeticheskogo usloviya soglasovaniya* [Determination of the longitudinal module of composite's resiliency on the basis of power condition of concordance], *Vestnik Khersonskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta, KhNTU, Kherson, Ukraine*, vol. 2(45), pp. 106-110.
  7. Tang, T. (2008) *Variational Asymptotic Micromechanics Modeling of Composite Materials*, Utah State University, Logan.
  8. Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J. (2001) "Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I : Elastic and hexagonal symmetry", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, pp. 1445-1462.
  9. Suwatnodom, P. (2008) "Three-dimensional Micromechanical Damage Models, Fiber Pullout Models and Fracture Toughness of Discontinuous Steel Fiber Reinforced Cementitious Composites", *A dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in Civil Engineering*, ProQuest, Los Angeles.
  10. Ko, Y.-F., Ju, J.W. (2012) "New higher-order bounds on effective transverse elastic moduli of three-phase fiber-reinforced composites with randomly located and interacting aligned circular fibers", *Acta Mechanica*, vol. 223, pp. 2437-2458.
  11. Samul, V.I. (1982) *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti: Uchebnoye posobiye dlya studentov vuzov* [Bases of theory of resiliency and plasticity : train aid for the students of institutions of higher learning], *Vysshaya shkola, Moskow, Russia*.

УДК 539.3

## НЕЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМ АБСОРБЕРОМ

Гришак В. З., д.т.н., професор, Д'яченко Т. А., магістр

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

TANUSHKOD@rambler.ru

У роботі досліджено коливання літального апарату з абсорбером поблизу збуреної поверхні. Показано, що цей процес моделюється системою диференціальних рівнянь у частинних похідних. Цю систему розв'язано у двох випадках: геометрично лінійному та нелінійному, що характеризує собою можливі великі деформації балки при вимушених коливаннях. Для розв'язання задачі в лінійному випадку застосовуються метод Фур'є, метод варіації довільних сталих, а в нелінійному – метод малого параметра та вище зазначені методи. Числові результати візуалізовано графічно.

*Ключові слова: метод Фур'є, метод малого параметра, метод варіації довільних сталих, система диференціальних рівнянь, поперечне навантаження, прогин балки, зосереджена маса, демпферна система, нелінійні коливання.*

## НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Гришак В. З., д.т.н., профессор, Дьяченко Т. А., магистр

*Запорожский национальный университет  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

TANUSHKOD@rambler.ru

В работе исследовано колебания летающего аппарата с абсорбером вблизи возмущенной поверхности. Показано, что этот процесс моделируется системой дифференциальных уравнений в частных производных. Эту систему решено в двух случаях: геометрически линейном и нелинейном, последний характеризует возможные большие деформации балки при вынужденных колебаниях. Для решения задачи в линейном случае используется метод Фурье, метод вариации произвольных постоянных, а в нелинейном – метод малого параметра и выше указанные методы. Численные результаты визуализировано графически.

*Ключевые слова: метод Фурье, метод малого параметра, метод вариации произвольных постоянных, система дифференциальных уравнений, продольная нагрузка, прогиб балки, сосредоточенная масса, демпферная система, нелинейные колебания.*

## NONLINEAR ANALYSIS OF DYNAMICS INHOMOGENEOUS MECHANICAL SYSTEMS WITH LUMPED MASS

Gristchak V. Z., D. of Technical Science, Professor, Dyachenko T. A., Magister

*Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

TANUSHKOD@rambler.ru

Problem damping occurs during the construction of bridges, flying machines and other modern designs. One way of damping vibration is to incorporate into the structural design of the damper system (absorbers).

We have investigated the fluctuations flying machine with an absorber near the disturbed surface. This heterogeneous mechanical system modeled elastic beam with localized damping system. It is assumed that is hinged opening beam on elastic foundation that simulates disturbing the surface and the beam affects distributed over the entire length of the outer lateral load and axial force in the presence of a localized absorber. Accounting for large deformations during forced oscillations leads to a cubic nonlinearity type.

This process is modeled oscillation system of differential equations in partial derivatives of the sixth order. This system is solved in two ways: geometrically linear and nonlinear.

In the linear case, the use of the Fourier method reduces to the fourth order of the system for two and system of orthogonal functions of a variable  $x$ . Desired function appears to move the beam in the form of expansions for these functions. Both sides of each of the system of equations multiplied by one of the orthogonal functions. Then, the resulting equations are integrated across the segment of the variable, using the orthogonality property and the definition of the Dirac delta function. As a result, the system is expressed only by a function of time. Approximate analytical solution has been found: built the first harmonic of the displacement of the beam and the corresponding function move the damper system.

In the nonlinear case, the solution is represented by an asymptotic expansion in the small parameter based on the first approximation. Application of the small parameter leads to two systems. First of these systems corresponds to the zero approximation and has the same form as in the linear case. The second system differs from the first one only the right side of the equations. Therefore, methods for solving linear systems of both are the same.

Numerical results are visualized in the form of a dependency graph of the numerical values of the beam deformation time, and the damper system over time. Established their agreement with previous results in the solutions of the problem of static deflection of the beam with the same physical and geometrical characteristics. In this dynamic problem, vibration damping damper displacements lead to stabilization at a value that is a little different from the beam deflection in the static problem.

Main attention is paid to the influence of localized damping and nonlinearity on the dynamic behavior of the beam on elastic foundation. Accounting for non-linearity leads to a slight increase in the amplitude of oscillations, as beams and damper system at certain times.

Axial thrust alters the amplitude of oscillation as beams as and absorber: In the initial time interval for the amplitude maximum compressive force for stretching – smallest.

The results obtained make it possible to investigate the influence of physical parameters on the amount of movement of the beam in swing. Urgent problems in this area of research is to examine the structure in which the damper is moving along the beam by a known law.

*Key words: Furje method, the small parameter method, the method of variation of parameters, the system of differential equations, the longitudinal load, deflection of the beam, concentrated mass, damping system, nonlinear oscillations.*

## ВСТУП

Задачі гасіння коливань постають під час будівництва мостів, літальних апаратів та інших сучасних конструкцій. Одним із способів гасіння коливань є додавання до конструкції демпферних систем (абсорберів).

У роботі досліджено коливання літального апарата з абсорбером поблизу збуреної поверхні. Цю механічну систему змодельовано балкою з демпферною системою. Передбачається, що балка лежить на пружній основі, яка моделює збурену поверхню, і на балку впливає розподілене по всій довжині зовнішнє поперечне навантаження і осьове зусилля за наявності локалізованого демпфера.

Основи теорії коливань закладені, наприклад, у роботах [1, 2]. У роботах [3-5] розглянуто деякі випадки впливу гасників коливань та вплив геометричної нелінійності пружної системи кубічного типу.

З поточних публікацій цього напрямку слід відзначити роботи [6-10]. Зокрема, у статті [9] досліджено коливання балки з демпфером, із зосередженою гармонічною силою та з урахуванням в'язкого тертя у демпфері. У статті [10] розглядалася балка з прикріпленими до неї декількома динамічними гасниками коливань.

У роботі основна увага приділена впливу локалізованого демпфера та характеру нелінійності на динамічну поведінку балки на пружній основі.

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БАЛКИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ З ПРИКРІПЛЕНИМ ДЕМПФЕРОМ

Розглядається динаміка механічної системи при наявності динамічного абсорбера. Припускається, що ця система знаходиться на пружній основі і на неї діють розподілене по всій довжині поперечне навантаження та осьове зусилля.

Схема процесу коливання балки наведена на рисунку 1.

Система диференціальних рівнянь, що моделює коливання балки, в певній точці якої закріплена демпферна система має вигляд [2, 10]

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{T}{EI} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{K}{EI} W - \frac{A}{EI} \left( 2D\sqrt{cm} \frac{dy}{dt} + cy \right) \delta(x - x_1) = -\frac{Q(x,t)}{EI}, \\ m \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right]_{x=x_1} + cy + 2D\sqrt{cm} \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $W = W(x,t)$  – нормальні переміщення балки,  $y = y(t)$  – переміщення демпферної системи,  $E$  – модуль пружності матеріалу балки,  $I$  – момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі, яка проходить через центр тяжіння,  $\rho$  – щільність матеріалу балки,  $S$  – площа поперечного перерізу балки,  $K$  – коефіцієнт постелі пружної основи,  $T$  – величина осьового зусилля,  $Q(x,t)$  – розподілене по всій довжині балки поперечне навантаження,  $c$  – жорсткість пружини в демпферній системі,  $D$  – коефіцієнт демпфірування,  $m$  – маса вантажу демпферної системи,  $A = \frac{1}{l}$ .

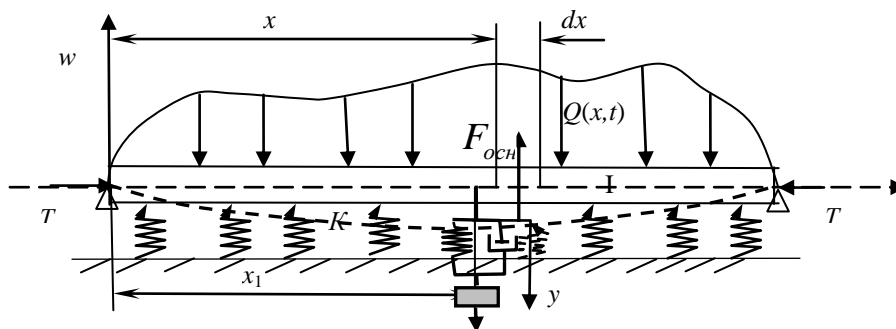


Рис. 1. Схема процесу коливання балки

Припустимо, що балка шарнірно спирається на кінцях, тобто граничні умови задаються у формі:

$$W(0,t) = 0, \quad W(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} = 0,$$

при цьому початкові умови мають вигляд

$$W(x,0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0.$$

Після заміни  $\xi = \frac{x}{l}$ ,  $\xi_1 = \frac{x_1}{l}$  та позначень  $a^2 = \frac{\rho S l^4}{EI}$ ,  $\hat{T} = \frac{T l^2}{EI}$ ,  $\hat{K} = \frac{K l^4}{EI}$ ,  $\hat{A} = \frac{l^4 A}{EI}$ ,  $C_1 = 2\hat{A}\sqrt{cm}$ ,

$C_2 = \hat{A}c$ ,  $\hat{m} = m\hat{A}$ ,  $\hat{Q}(\xi,t) = \frac{Q(x,t)l^4}{EI}$ , система (1) набуде вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \hat{T} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \hat{K} W - \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) \delta(\xi - \xi_1) = -\hat{Q}(\xi,t), \\ \hat{m} \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right]_{\xi=\xi_1} + C_2 y + D C_1 \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для розв'язку системи (2) на першому етапі розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \hat{T} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \hat{K} W = 0, \quad (3)$$

для розв'язання якого застосується метод Фур'є

$$W = X(\xi)Z(t). \quad (4)$$

Відповідно до стандартної процедури, підставимо (4) до (3). Після перетворень отримаємо

$$\frac{X^{(4)} + \hat{T}X^{(2)} + \hat{K}X}{a^2 X} = -\frac{Z^{(2)}}{Z} = \omega^2,$$

де  $\omega^2$  – деяка константа.

З останньої рівності отримаємо два рівняння: перше відносно  $X(\xi)$ , а друге відносно  $Z(t)$

$$\begin{aligned} X^{(4)} + \hat{T}X^{(2)} + \hat{K}X - \omega^2 a^2 X &= 0, \\ Z^{(2)} + \omega^2 Z &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язок другого рівняння має вигляд

$$Z(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Тепер знайдемо розв'язок першого рівняння з (5), який має вигляд

$$\begin{aligned} X(\xi) &= C_1 (\cos(\beta \xi) + ch(\alpha \xi)) + C_2 (\cos(\beta \xi) - ch(\alpha \xi)) + \\ &+ C_3 (\sin(\beta \xi) + sh(\alpha \xi)) + C_4 (\sin(\beta \xi) - sh(\alpha \xi)), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\alpha = \sqrt{\frac{-\hat{T} + \sqrt{\hat{T}^2 - 4\hat{K} + 4\omega^2 a^2}}{2}}, \quad \text{а} \quad \beta = \sqrt{\frac{\hat{T} + \sqrt{\hat{T}^2 - 4\hat{K} + 4\omega^2 a^2}}{2}}. \quad (7)$$

Скористаємося крайовими умовами (шарнірне спирання), які для функції  $X(\xi)$  отримують вигляд

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X''(1) = 0. \quad (8)$$

Звідки одержимо

$$\begin{aligned} C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = C_4, \\ \beta = \pi k. \end{aligned} \quad (9)$$

Отже,  $X_k(\xi) = 2C_3 \sin(\pi k \xi)$ . Із умов ортонормованості випливає, що  $2C_3 = \sqrt{2}$ , тоді

$$X_k(\xi) = \sqrt{2} \sin(\pi k \xi). \quad (10)$$

Співставляючи (7) та (9), отримаємо:

$$\omega_k^2 = \frac{\pi^4 k^4}{a^2} \left( 1 - \frac{\hat{T}}{\pi^2 k^2} + \frac{\hat{K}}{\pi^4 k^4} \right). \quad (11)$$

Отже, розв'язок однорідного рівняння (3) запишеться у вигляді ряду

$$W(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\xi) Z_j(t), \quad (12)$$

де

$$Z_j(t) = A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t), \quad X_j(\xi) = \sqrt{2} \sin(\pi j \xi). \quad (13)$$

Функцію  $W(\xi, t)$ , яка є розв'язком системи (2), подамо рядом

$$W(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\xi) \bar{Z}_j(t). \quad (14)$$

Функцію  $\hat{Q}(\xi, t)$  розвинемо в ряд

$$\hat{Q}(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(t) X_j(\xi), \quad (15)$$

де

$$N_j(t) = \int_0^1 \hat{Q}(\xi, t) X_j(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Підставимо (14) і (15) до першого рівняння системи (2), звідки отримаємо залежність

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{Z}_j(t) \left( X_j^{(4)}(\xi) - \hat{T} X_j^{(2)}(\xi) + \hat{K} X_j(\xi) \right) - a^2 \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\xi) \bar{Z}_j^{(2)}(t) - \\ - \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) \delta(\xi - \xi_1) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(t) X_j(\xi). \end{aligned} \quad (17)$$

Внаслідок (5), має місце рівність

$$X_j^{(4)}(\xi) - \hat{T} X_j^{(2)}(\xi) + \hat{K} X_j(\xi) = a^2 \omega_j^2 X_j(\xi), \quad (18)$$

тому перше рівняння системи (2) набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{Z}_j(t) a^2 \omega_j^2 X_j(\xi) - a^2 \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\xi) \bar{Z}_j^{(2)}(t) - \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) \delta(\xi - \xi_1) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(t) X_j(\xi). \quad (19)$$

Помножуємо обидві частини отриманого рівняння на  $X_k(\xi)$  та проінтегруємо на відрізку  $[0,1]$ . Зважаючи на те, що система  $\{X_k(\xi)\}$  є ортонормованою, а також на те, що

$$\int_0^1 X_k(\xi) \delta(\xi - \xi_1) d\xi = X_k(\xi_1) \quad (k=1,2,3,\dots), \quad (20)$$

отримаємо

$$a^2 \omega_k^2 \bar{Z}_k(t) + a^2 \bar{Z}_k''(t) - \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) X_k(\xi_1) = N_k(t). \quad (21)$$

Підставимо (14) до другого рівняння (2)

$$\hat{m} \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\xi_1) \bar{Z}_j''(t) \right] + C_2 y + DC_1 \frac{dy}{dt} = 0. \quad (22)$$

Таким чином, маємо систему рівнянь (21), (22):

$$\begin{cases} a^2 \omega_k^2 \bar{Z}_k(t) + a^2 \bar{Z}_k''(t) - \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) X_k(\xi_k) = N_k(t), \\ \hat{m} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + X_k(\xi_k) \bar{Z}_k''(t) \right) + C_2 y + DC_1 \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Знайдемо наближений розв'язок (23), розглядаючи його першу гармоніку

$$\begin{cases} a^2 \omega_1^2 \bar{Z}_1(t) + a^2 \bar{Z}_1''(t) - \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) X_1(\xi_1) = N_1(t), \\ \hat{m} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + X_1(\xi_1) \bar{Z}_1''(t) \right) + C_2 y + DC_1 \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Із системи (24) виразимо  $\bar{Z}_1(t)$  через  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1(t) = & \frac{1}{a^2 \hat{m} \omega_1^2 X_1(\xi_1)} \left( a^2 \left( \hat{m} \frac{d^2 y}{dt^2} + C_2 y + DC_1 \frac{dy}{dt} \right) + \right. \\ & \left. + \hat{m} \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) X_1^2(\xi_1) + \hat{m} N_1(t) X_1(\xi_1) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

Із (24) випливає, що функцію  $y(t)$  можна знайти як розв'язок диференціального рівняння четвертого порядку

$$\begin{aligned} \hat{m} a^2 \omega_1^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 \left( \hat{m} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + C_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + DC_1 \frac{d^3 y}{dt^3} \right) + \hat{m} \left( C_1 D \frac{d^3 y}{dt^3} + C_2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right) X_1^2(\xi_1) + \\ + \hat{m} N_1''(t) X_1(\xi_1) + C_2 a^2 \omega_1^2 y + da^2 \omega_1^2 C_1 \frac{dy}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

методом варіації довільних сталих.

Отже, розв'язком системи (2) є дві функції  $y(t)$  і  $w(\xi, t)$ , остання подається рядом (14), складовими першої гармоніки якої є функції  $X_1(\xi_1) = \sqrt{2} \sin(\pi\xi)$  і  $\bar{Z}_1(t)$ . Функцію  $y(t)$  будемо знаходити як розв'язок диференціального рівняння четвертого порядку (26), а функцію  $\bar{Z}_1(t)$  – із рівності (25) після підстановки в неї знайденої функції  $y(t)$ .

### НЕЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ З ЛОКАЛІЗОВАНИМ АБСОРБЕРОМ

Система нелінійних диференціальних рівнянь, що моделює коливання балки, у певній точці якої закріплена демпферна система, і відповідає нелінійності пружної системи кубічного типу, має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{T}{EI} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{K}{EI} W - \frac{A}{EI} \left( 2D\sqrt{cm} \frac{dy}{dt} + cy \right) \delta(x - x_1) + b\mu W^3 = -\frac{Q(x, t)}{EI}, \\ m \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right]_{x=x_1} + cy + 2D\sqrt{cm} \frac{dy}{dt} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

де  $b = \frac{1}{l^2}$ ,  $\mu$  – малий параметр. У позначеннях, уведених вище, система набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \hat{T} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \hat{K} W - \left( C_1 D \frac{dy}{dt} + C_2 y \right) \delta(\xi - \xi_1) + \hat{b} \mu W^3 = -\hat{Q}(\xi, t), \\ \hat{m} \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right]_{\xi=\xi_1} + C_2 y + DC_1 \frac{dy}{dt} = 0, \end{cases} \quad (28)$$

де  $\hat{b} = bl^4$ . Застосуємо метод малого параметра. Будемо знаходити розв'язок рівняння, який представимо у вигляді

$$W = W_0 + \mu W_1, \quad (29)$$

$$y = y_0 + \mu y_1. \quad (30)$$

Підставимо (29) та (30) до (28), розділяючи члени при різних степенях  $\mu$ , отримаємо

$$\mu^0 : \begin{cases} \frac{\partial^4 W_0}{\partial \xi^4} + a^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} + \hat{T} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} + \hat{K} W_0 - \left( C_1 D \frac{dy_0}{dt} + C_2 y_0 \right) \delta(\xi - \xi_1) = -\hat{Q}(\xi, t), \\ \hat{m} \left[ \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} \right]_{\xi=\xi_1} + C_2 y_0 + DC_1 \frac{dy_0}{dt} = 0; \end{cases} \quad (31)$$

$$\mu^1 : \begin{cases} \frac{\partial^4 W_1}{\partial \xi^4} + a^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + \hat{T} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} + \hat{K} W_1 - \left( C_1 D \frac{dy_1}{dt} + C_2 y_1 \right) \delta(\xi - \xi_1) = -\hat{b} W_0^3, \\ \hat{m} \left[ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right]_{\xi=\xi_1} + C_2 y_1 + DC_1 \frac{dy_1}{dt} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Система (31) вже була розв'язаною у лінійному випадку. Система (32) відрізняється від (31) правою частиною першого рівняння. При цьому, після розв'язання системи (31) права частина першого рівняння (32) буде відомою. Отже, розклавши функцію  $-\hat{b} W_0^3$  в ряд

$$-\hat{b}W_0^3(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t)X_j(\xi),$$

де

$$B_j(t) = \frac{-\hat{b}}{\|X_j(\xi)\|_0} \int_0^1 W_0^3(\xi, t) X_j(\xi) d\xi,$$

після аналогічних дій над системою (32), як у лінійному випадку, прийдемо до системи рівнянь відносно першої гармоніки в розкладі  $W_1(\xi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(\xi) \bar{Z}_j(t)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} a^2 \hat{m} \omega_1^2 \bar{Z}_1''(t) X_1(\xi_1) &= a^2 \left( \hat{m} \frac{d^4 y_1}{dt^4} + C_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + DC_1 \frac{d^3 y_1}{dt^3} \right) + \\ &+ \hat{m} \left( C_1 D \frac{d^3 y_1}{dt^3} + C_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) X_1^2(\xi_1) + \hat{m} B_1(t) X_1(\xi_1), \\ \hat{m} a^2 \omega_1^2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + a^2 \left( \hat{m} \frac{\partial^4 y_1}{\partial t^4} + C_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + DC_1 \frac{d^3 y_1}{dt^3} \right) &+ \hat{m} \left( C_1 D \frac{d^3 y_1}{dt^3} + C_2 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \right) X_1^2(\xi_1) + \\ &+ \hat{m} B_1''(t) X_1(\xi_1) + C_2 a^2 \omega_1^2 y_1 + da^2 \omega_1^2 C_1 \frac{dy_1}{dt} = 0. \end{aligned} \right. \quad (33)$$

Для знаходження розв'язку другого рівняння системи (33) застосовується метод варіації довільних сталих. При цьому, лінійно незалежні розв'язки його однорідного рівняння ті самі, що і для рівняння (26). Перше рівняння системи (33) дозволяє знайти функцію  $\bar{Z}_1(t)$  на основі функції  $y_1(t)$ .

### ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розрахунки проводилися для довгої ( $l=10\text{ м}$ ) призматичної балки (ширини  $b=0,1\text{ м}$ , висоти  $h=0,15\text{ м}$ ) з фізичними характеристиками  $E=2 \cdot 10^{10}\text{ Па}$ ,  $\rho=2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , коефіцієнтом постелі пружної основи  $K=10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ , навантаженням інтенсивності  $Q=10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ ,  $T=0$ , точкою закріплення демпферної системи  $x_1 = \frac{l}{2}$ , коефіцієнтом демпферної системи та її масою  $D=10$ ,  $m=1000\text{ кг}$  відповідно, жорсткістю пружини гасника коливань  $c=10 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

Фізичні та геометричні характеристики балки в цій задачі динаміки обрано тими ж, що і в статичній задачі прогину балки, що лежить на пружній основі, як в [11]. У цій задачі гасіння коливання демпфером призвело до стабілізації переміщень на значенні, що мало відрізняється від значення прогину балки, отриманого в [11]. Це свідчить про достовірність результатів.

Наведемо числові результати в лінійному випадку. На рисунках 2 а) і б) побудовано графіки функції переміщень балки при коливанні  $W(x^*, t)$  в точці  $x^* = \frac{l}{2}$  та переміщення демпферної системи  $y(t)$  відповідно.



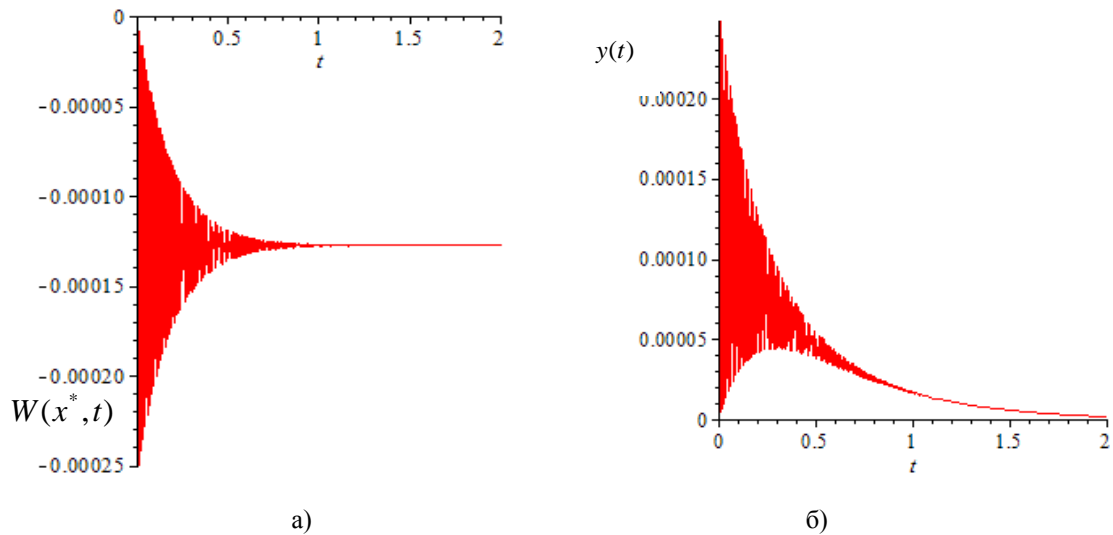


Рис. 2. Результати для призматичної балки в лінійному випадку:

а) функція  $W(x^*, t)$  при  $x^* = \frac{l}{2}$ ; б) функція  $y(t)$

Для зручності порівняння наведемо числові результати для прогину шарнірно-спертої балки на рисунку 3.

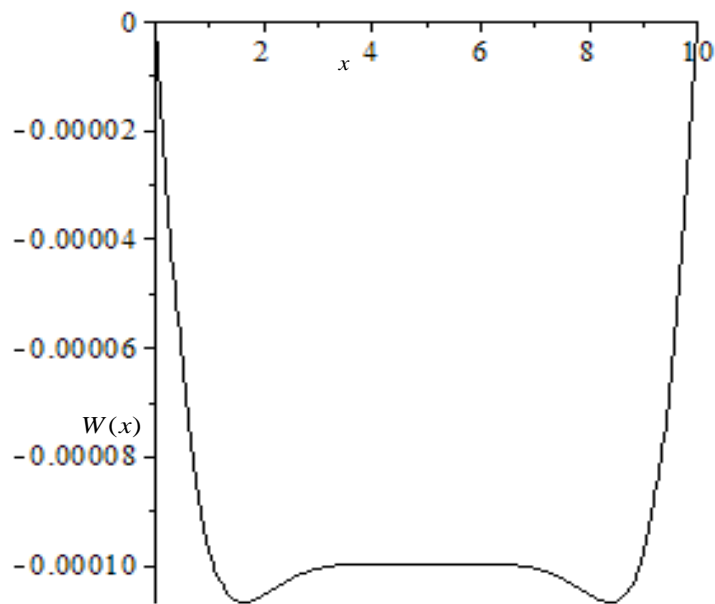


Рис. 3. Функція прогину шарнірно-спертої балки

Проведено розрахунки щодо переміщень балки і демпферної системи в лінійному та нелінійному випадках для однакових вхідних параметрів. У нелінійному випадку обрано малий параметр  $\mu = 0,1$ . На рисунку 4 наведено функції переміщень демпферної системи в обох випадках. Аналізуючи результати, дійшли таких висновків. Як для балки, так і для демпферної системи, у лінійному та нелінійному випадках максимальна амплітуда на початку процесу коливання майже однакова. Подальший процес коливання призводить у нелінійному випадку до більших амплітуд, ніж в лінійному.

На рисунку 5 зображено функції переміщень  $W(x^*, t)$  балки (рис. 5 а-в) і демпферної системи  $y(t)$  (рис. 5 г-е) при різних осьових зусиллях: стискаючого, за модулем рівного  $T = 10^7 H$  (рис. 5 а, г), розтягуючого, з тим же модулем (рис. 5 в, е) та за відсутності цього зусилля (рис. 5 б, д).

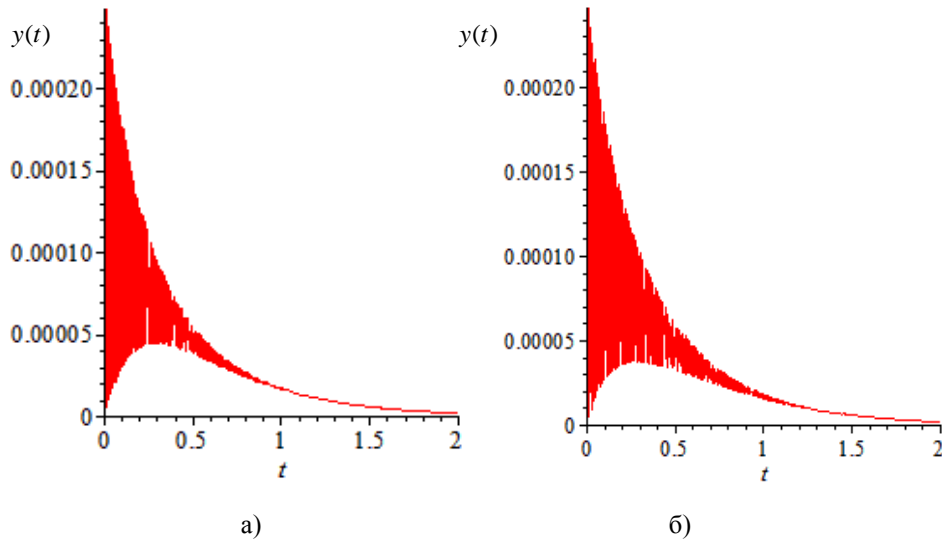


Рис. 4. Порівняння лінійного та нелінійного випадків для прямокутної в перерізі балки

Аналізуючи поведінку балки при стискаючому осьовому зусиллі, доходимо такого висновку. На початку процесу коливання балка здійснює рухи, за яких вона кілька разів підіймається вище своєї осі, після чого, подальший процес коливання здійснює нижче своєї осі. За відсутності осьового зусилля та за наявності розтягуючого зусилля процес коливання балки проходить нижче її осі. Крім того, найбільша амплітуда коливання як балки, так і демпферної системи, відповідає стискаючому зусиллю, а найменша – розтягуючому.

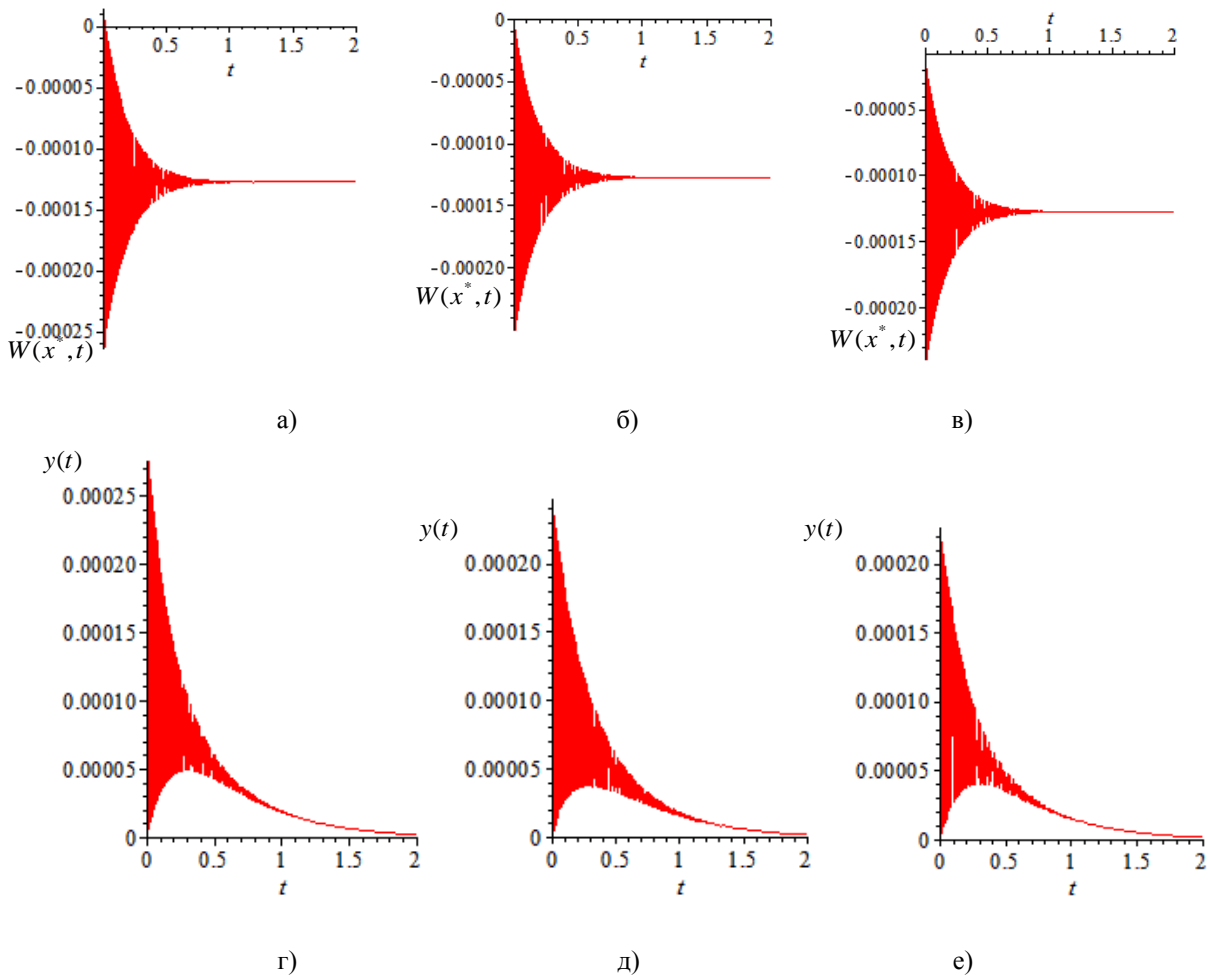


Рис. 5. Порівняння у нелінійному випадку для прямокутної у перерізі балки для різних значень осьового зусилля  $T$

## ВИСНОВКИ

В цій роботі було знайдено розв'язки задачі про коливання балки, що лежить на пружній основі з урахуванням демпфера, прикріпленого в певній точці, осьового зусилля, а також розподіленого за всією довжиною поперечного навантаження.

Отримані результати дають можливість дослідити вплив фізичних параметрів на величину переміщення балки при коливанні. Наведені в роботі функції переміщення балки при коливанні можуть бути використані для розрахунків на міцність, зокрема, літальних апаратів, мостів, та інших споруд.

У роботі отримано аналітичні розв'язки, які узгоджуються з дослідженнями [11].

Перспективним дослідженням роботи вважається розгляд динаміки неоднорідної конструкції, коли демпфер рухається за відомим законом.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О вынужденных колебаниях упругих призматических стержней / А. Н. Крылов // Избранные труды. — Л. : Изд-во АН СССР, 1958. — С. 268-314.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер ; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука ; под ред. Э.И. Григолюка. — М. : Машиностроение, 1985. — 472 с.
3. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. — М. : Наука, 1991. — 256 с.
4. Бидерман В. К. Теория механических колебаний / В. К. Бидерман. — М. : Высшая школа, 1980. — 408 с.
5. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ ; пер. с англ. — М. : Мир, 1984. — 535 с.
6. Алгазин С. Д. Численное исследование свободных колебаний балки с осцилляторами / С. Д. Алгазин // Прикладная механика и теоретическая физика. — 2006. — Т. 47, №4. — С. 135-144.
7. Андрианов И. В. Асимптотические методы теории колебаний балок и пластин / И. В. Андрианов, В. В. Данишевский, А. О. Иванов. — Днепропетровск : ПДАБА, 2010. — 216 с.
8. Атамуратов А. Ж. Численный метод решения уравнения колебаний балки при разных типах граничных условий / А. Ж. Атамуратов // Молодой ученый. — 2014. — №2. — С. 7-12.
9. Демецкая В. В. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения / В. В. Демецкая, А. И. Маневич // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2010. — Вип 14. — С. 148-158.
10. Михасев Г. И. О контроле n-ой моды колебаний с присоединенным динамическим гасителем / Г. И. Михасев, М. Г. Ботогова // Теоретическая и прикладная механика : сб. ст. — 2009. — Вып. 2. — С. 30-33.
11. Грищак В. З. Застосування методу початкових параметрів у матричній формі та методу ВКБ до розв'язку задачі статичного деформування балки із змінними за координатами параметрами / В. З. Грищак, Т. А. Д'яченко // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових праць. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2012. — №2. — С. 13-22.

## REFERENCES

1. Krylov, A.N. (1958), "Forced vibrations of elastic prismatic bars", *Selected Works*, Acad Sciences of the USSR, Leningrad, pp. 268-314.
2. Timoshenko, S.P., Yanh, D.H. and Weaver, W. (1985), *Fluctuations in engineering*, Translated from English. L.G. Korneychuka; ed. E.I. Grigolyuk, Mechanical Engineering, Moskow, Russia.
3. Panovko, Y.G. (1991), *Introduction to the theory of mechanical vibrations*, Science, Moskow, Russia.
4. Biederman, V.K. (1980), *The theory of mechanical vibrations*, High School, Moskow, Russia.
5. Nayfe, A. (1984), *Introduction to perturbation methods*, Translated from English, World, Moskow, Russia.
6. Algazin, S.D. (2006), *Numerical solution of free oscillations with oscillators*, Applied mechanics and theoretical physics, v. 47, no. 4, pp. 135-144.
7. Andrianov, I.V. Danishevskii, V.V. and Ivanov, A.O. (2010), *Asymptotic methods of the theory of vibrations of beams and plates*, PDABA, Dnepropetrovsk.
8. Atamuratov, A.J. (2014), *Numerical method for solving the wave equation of the beam for different types of boundary conditions*, Young scientist, no. 2, pp. 7-2.
9. Demetskaya, V.V. and Manevitch, A.I. (2010), *Forced vibrations of a beam with a viscous friction dampers*, Problems of computing mechanics and durability of designs, release 14, pp. 148-158.
10. Mikhasev, G.I. and Botogova, M.G. (2009), *On the control of the n-th oscillation mode with an attached dynamic absorber*, Theoretical and Applied Mechanics: Sb. Art., release 2, pp. 30-33.
11. Grischak, V.Z. and Dyachenko, T.A. (2012), *Application of the method of initial parameters in matrix form and the WKB method to the solution of the problem of static deformation of beams with variable parameters the coordinates*, Bulletin of Zaporizhzhya National University: Collected Works. Physics and mathematics, Zaporizhzhya, Zaporizhzhya National University, no. 2, pp. 13-22.

УДК 538.91 : 539.21'24

## НИЗЬКОТЕМПЕРАТУРНЕ ЦИКЛУВАННЯ ТЕХНІЧНОГО АЛЮМІНІЮ ПІСЛЯ ЛАЗЕРНОГО ЛЕГУВАННЯ МІДІЮ ТА КОБАЛЬТОМ

Ковальова В. М., аспірант

*Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна,*

vikoalyova@gmail.com

Методами рентгенівського фазового та металографічного аналізів досліджена структура поверхневих шарів лазернолегованого міддю та кобальтом технічного алюмінію після низькотемпературного циклування. Встановлено, що значна диспергізація структури та формування інтерметалідних фаз призвели до зростання мікротвердості в зоні лазерного легування у 3...4 рази (залежно від режимів лазерної обробки). Термоциклічна низькотемпературна обробка призводила до поступового зменшення середніх значень мікротвердості внаслідок релаксації знакозмінних мікронапружень у структурі зони легування.

*Ключові слова:* лазерне легування, структура, квазікристалічна фаза, інтерметалідні фази, термоциклічна обробка.