

2. Васильев В. В. Оптимальное управление эллиптической орбитой спутника Земли с двигателем малой тяги / В. В. Васильев // Космич. исслед. — 1980. — 18, вып. 5. — С. 707-714.
3. Васильев В. В. Многошаговые алгоритмы коррекции орбиты спутника Земли двигателем малой тяги / В. В. Васильев, В. В. Салмин // Космич. исслед. — 1984. — 22, вып. 4. — С. 507-519.
4. Петухов В. Г. Оптимизация траекторий с малой тягой / В. Г. Петухов // Презентация на семинаре по механике космического полета, управлению и информатике ИКИ РАН, Москва, июнь 2000 г.
5. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова. — М. : Машиностроение, 1972.
6. Охоцимский Д. Е. Основы механики космического полета / Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сухарилдзе. — М. : Недра, 1990. — 448 с.

#### REFERENCES

1. Vasilev Y.Yu., Kiforenko B.N., Pasechnik Z.V. Sravnenie effektivnosti dvigatelei postoiannoї i rehuliruemoї po velichine tiahі pri mnohooborotnikh mezhorbitalnikh perekhodakh // Problemi upravleniia i informatiki. — 2005. — № 6. — PP. 98-105.
2. Vasilev V.V. Optimalnoe upravlenie ellipticheskoi orbitoi sputnika Zemli s dvigatelem maloi tiahі // Kosmich. issled. — 1980. — 18, v. 5. — PP. 707-714.
3. Vasilev V.V., Salmin V.V. Mnohoshahovie alhoritmi korrektsii orbiti sputnika Zemli dvigatelem maloi tiahі // Kosmich. issled. — 1984. — 22, v. 4. — PP. 507-519.
4. Petukhov V.H. Optimizatsiia traektorii s maloi tiahoi. Prezentatsiia na seminare po mekhanike kosmicheskoho poleta, upravleniiu i informatike YKY RAN, Moskva, iun 2000 h.
5. Osnovi teorii poleta kosmicheskikh apparatov / Pod red. H.S. Narimanova, M.K. Tikhonravova. — М. : Mashinostroenie, 1972.
6. Okhotsimskii D.E., Sukharilidze Yu.H. Osnovi mekhaniki kosmicheskoho poleta. — М. : Nedra, 1990. — 448 p.

УДК 517.958 : 539.3:534.21

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ПЛАСТИНИ З УРАХУВАННЯМ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ МАТЕРІАЛУ

Кудзіновська І. П., к. т. н., доцент

*Національний авіаційний університет,  
просп. Космонавта Комарова, 1, м. Київ-058, 03680, Україна*

Kudzinovskaya@ukr.net

Проведено дослідження вимушених вісесиметричних згинальних коливань круглої п'єзокерамічної пластини з товщиною поляризацією під дією зовнішнього гармонічного навантаження. Записано замкнену систему диференціальних рівнянь, що описує коливання пластини, з урахуванням в'язкопружності матеріалу. Для випадків жорсткого закріплення контуру та шарнірного опирання пластини отримано точний розв'язок. Проведено числовий розрахунок і аналіз амплітудно-частотних характеристик пластини в області основного резонансу.

*Ключові слова: кругла п'єзокерамічна пластинка, вимушені вісесиметричні коливання, розрахунок та аналіз амплітудно-частотних характеристик коливань.*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГОСТИ МАТЕРИАЛА

Кудзиновская И. П., к. т. н., доцент

*Национальный авиационный университет,  
просп. Космонавта Комарова, 1, г. Киев-058, 03680, Украина*

Kudzinovskaya@ukr.net

Проведены исследования вынужденных осесимметричных изгибных колебаний круглой пьезокерамической пластины с толщиной поляризации под воздействием внешней гармонической нагрузки. Записана замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающая колебания пластины, с учетом вязкоупругости материала. Для случаев жесткого закрепления контура и шарнирного опирания пластины получено точное решение. Проведен числовой расчет и анализ амплитудно-частотных характеристик пластины в области основного резонанса.

*Ключевые слова: круглая пьезокерамическая пластина, вынужденные осесимметричные колебания, расчет и анализ амплитудно-частотных характеристик колебаний.*

## MATHEMATICAL MODELLING OF VIBRATIONS OF ROUND PIEZOCERAMIC PLATE TAKING INTO ACCOUNT VISCOELASTICITY OF MATERIAL

Kudzinovska I., Ph.D. in Engineering, associate professor

*National Aviation University,  
ave. Cosmonaut Komarov, 1, Kiev -058, 03680, Ukraine*

Kudzinovskaya@ukr.net

We considered the problem of research of axisymmetric forced flexural vibrations of round piezoceramic plate with polarization of thickness under external harmonic load. Facial surfaces of the plate covered with an infinitely thin electrodes and shorted, and the back surfaces are not electrified.

The mathematical model of dynamic of piezoceramic plate was formulated, namely linear equation of state and the complete system of equations of movement, in particular physical correlation and differential equations of vibrations of the plate, equations of forced electrostatics and Cauchy relations were written in three-dimensional formulation. For solving the problem of mechanical displacement we adopted as simplifying assumptions known kinematical Kirchhoff-Love hypotheses and electrostatic approximations of Maxwell equations for electric intensity and induction variables. By averaging the stresses over the plate thickness we made a transition from the exact three-dimensional equations of electroelasticity to corresponding two-dimensional equations. It is shown that variable fluctuations in circular piezoceramic plates are reduced to biharmonic equation, the general solution of which is known and recorded through the Bessel functions of zero and first order. To determine the unknown constants included in the general solution of the equation, we considered the two most common options of harmonic conditions – conditions hard and hinged support of outer contour of the plate.

Energy dissipation of investigated electromechanical viscoelastic vibrated system was taken into account through the elastic modules of the model material, which were considered as complex values. This allowed investigating forced vibrations of piezoceramic plate in wide range of frequencies, including resonances.

A computation of amplitude-frequency characteristics of vibrations of plate made from TsTS-19 piezoceramic with rigid and hinged fixation was conducted in range of dimensionless frequencies (from 2.4 to 3.4 unit), which includes the frequency of main resonance.

Graphical dependences of deflection of the middle surface of the plate in the center from the oscillation frequency at different values of mechanical loss tangent angles, which varied from 0,15 to 0,75.

We concluded that changing the tangent of angle of mechanical losses significantly affect the vibration amplitude of the plate at the main resonance frequency and the quality factor of the plate. We noted that at a fixed value of tangent of angle quality factor of the plate is the same as in the case of a hinged leaning, and in the case of clamped plates.

The obtained analytical solution of the problem of bending vibration can be used as a model for comparison with the approximate solution in more complex cases of plate geometry or boundary conditions encountered in practice. Results of the study may be useful in the design of electromechanical energy converters in the construction of which piezoceramic plates with thickness polarization is included as base elements. In addition, these results can be used in solving problems of damping vibrations of bending electromechanical energy converters with operating conditions in range of resonant frequencies.

*Key words: round piezoceramic plate, forced axially symmetric vibrations, computation and analysis of the amplitude and frequency characteristics of vibrations.*

## ВСТУП

Активними елементами електромеханічних перетворювачів енергії різного функціонального призначення у багатьох випадках є пластини із природних і синтетичних п'єзоелектричних матеріалів. Такі пластини здатні перетворювати електричну енергію в механічну, а механічну в електричну, як самі по собі, так і у складі багатокомпонентних електромеханічних систем.

П'єзоелектричні тонкостінні конструктивні елементи круглої форми широко використовуються у різних ультразвукових пристроях. Діскові перетворювачі з суцільними електродами на лицевих площинах вперше аналізувались у статті [1]. Вісесиметричні радіальні коливання тонких п'єзокерамічних дисків і круглих пластин із товщинною поляризацією досліджувалися теоретично та експериментально у багатьох роботах [2-11].

Вивчення резонансних коливань п'єзоелектричних пластин різної геометричної форми залишається важливою та актуальною проблемою механіки зв'язаних полів у матеріалах і елементах конструкцій.

### 1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ КРУГЛОЇ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ПЛАСТИНИ

У роботі розглядаються вимушені вісесиметричні згинальні коливання круглої п'єзокерамічної пластини радіуса  $R$  з товщинною поляризацією під дією зовнішнього механічного гармонічного навантаження  $\sigma_0 e^{i\omega t}$  з циклічною частотою  $\omega$ . Лицеві поверхні пластини електродовані і закорочені. Замкнена система диференціальних рівнянь в циліндричних координатах  $r, \varphi, z$ , що описує вісесиметричні коливання п'єзокерамічного тіла з попередньою поляризацією вздовж осі  $z$ , містить чотири групи співвідношень [12-14]:

1) фізичні співвідношення

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{11}^E \varepsilon_r + c_{12}^E \varepsilon_\varphi + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z; \\ \sigma_\varphi &= c_{12}^E \varepsilon_r + c_{11}^E \varepsilon_\varphi + c_{13}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z; \\ \sigma_z &= c_{13}^E (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) + c_{33}^E \varepsilon_z - e_{31} E_z; \\ \sigma_{rz} &= c_{55}^E \varepsilon_{rz} - e_{15} E_r;\end{aligned}$$

2) рівняння руху

$$\sigma_{r,r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \sigma_{rz,z} + \rho \omega^2 u_r = 0; \quad \sigma_{r,z} + \sigma_{z,z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \rho \omega^2 u_z - \sigma_0 = 0;$$

3) рівняння вимушеної електростатики

$$\vec{E} = -\text{grad}\psi; \quad \text{div}\vec{D} = 0;$$

4) співвідношення Коші

$$\varepsilon_r = u_{r,r}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} u_r; \quad \varepsilon_z = u_{z,z}; \quad \varepsilon_{rz} = u_{z,r} + u_{r,z}.$$

У цих рівняннях  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \sigma_{rz}$  – компоненти тензора механічних напружень;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$  – компоненти деформацій;  $E_z, E_r$  – компоненти вектора напруженості електричного поля;  $D$  – електрична індукція;  $\psi$  – електричний потенціал;  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{55}^E$  – модулі пружності, виміряні при постійному (нульовому) електричному полі;  $e_{31}, e_{15}$  – діелектричні проникливості;  $u_r, u_z$  – компоненти вектора переміщень точок серединної поверхні

пластини; у рівняннях руху та співвідношеннях Коші і далі записи типу  $\sigma_{r,r}$  або  $u_{z,r}$  означають диференціювання за відповідною координатою.

Для розв'язання задачі як основні спрощуючі припущення візьмемо відомі кінематичні гіпотези Кірхгофа-Лява

$$u_z = w(r), \quad u_r(z, r) = u(r) - zw(r), \quad (1)$$

і гіпотези щодо спряженого електричного поля

$$\psi_1(r, z) = \left(1 - 4(z/h)^2\right) \psi_1(r), \quad D_{z,z} = 0. \quad (2)$$

Тут  $w(r)$ ,  $u(r)$  – відповідно прогин і радіальні переміщення точок серединної поверхні пластини з товщиною  $h$  і густиною матеріалу  $\rho$ . Оскільки розглядаються тільки усталені коливання, множник  $e^{i\omega t}$  можна відкинути. Перехід від точних тривимірних рівнянь електропружності до двовимірних здійснимо, з урахуванням прийнятих гіпотез, шляхом осереднення напружень за товщиною пластини. Рівняння руху тоді набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} Q_{r,r} + \frac{1}{r} Q_r + \rho h \omega^2 w + \sigma_0 h &= 0; \\ M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) + Q_r &= 0; \\ Q_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz; \quad M_{r(\varphi)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r(\varphi)} z dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Фізичні співвідношення через інтегральні характеристики запишуться:

$$M_r = - \left( c_{11}^E w_{,rr} + c_{12}^E \frac{w_{,r}}{r} \right) - e_{31} \psi_1; \quad M_\varphi = - \left( c_{12}^E w_{,rr} + c_{11}^E \frac{w_{,r}}{r} \right) - e_{31} \psi_1. \quad (4)$$

Виключаючи перерізуючу силу  $Q_r$  із системи (3) і використовуючи співвідношення (4), отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{h^2}{12} c_{11}^E \Delta \Delta w + e_{31} \Delta \psi_1 - \rho \omega^2 w = \sigma_0, \quad (5)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа в циліндричних координатах. Невідома функція  $\psi_1(r)$  визначається із умови (2) і має вигляд

$$\psi_1(r) = \frac{h^2}{12} \frac{e_{31}}{\epsilon_{33}} \Delta w. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (5), приходимо до звичайного диференціального рівняння четвертого порядку відносно прогину

$$\Delta \Delta w - \lambda^4 w = \frac{12 \sigma_0}{h^2 c_{11}^E (1 + k_{31}^2)}, \quad (7)$$

де  $\lambda = \frac{12 \rho \omega^2 R^4}{h^2 c_{11}^E (1 + k_{31}^2)}$ , а  $k_{31}^2 = \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}}$  – коефіцієнт електромеханічного зв'язку. Далі, вводячи

безрозмірні змінні  $\tilde{w} = \frac{w}{R}$ ,  $\tilde{r} = \frac{r}{R}$ ,  $\tilde{\lambda} = \lambda R$ , рівняння (7) набуде вигляду

$$\Delta\Delta\tilde{w} - \tilde{\lambda}^4\tilde{w} = \frac{12\sigma_0 R^3}{h^2 c_{11}^E (1+k_{31}^2)}. \quad (8)$$

## 2. ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ ПРИ ДВОХ ВАРІАНТАХ ГРАНИЧНИХ УМОВ. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Загальний розв'язок диференціального рівняння (8) записується через функції Бесселя (значок хвилі над змінними відкидаємо)

$$w(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 I_0(\lambda r) + C_3 Y_0(\lambda r) + C_4 K_0(\lambda r) + \frac{12\sigma_0 R^3}{\lambda^4 h^2 c_{11}^E (1+k_{31}^2)}. \quad (9)$$

З умови обмеженості прогину в центрі пластини слід покласти  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 0$ . Довільні константи  $C_1$ ,  $C_2$  визначаються з граничних умов [13, 15] на контурі пластини. Розглянемо два типи умов:

1) жорстке закріплення контуру

$$w|_{r=1} = 0; \quad w_{,r}|_{r=1} = 0;$$

2) шарнірне опирання

$$w|_{r=1} = 0; \quad M_{r}|_{r=1} = 0.$$

Після визначення  $C_1$ ,  $C_2$  остаточно отримуємо

$$w(r) = \frac{\sigma_0^*}{\lambda^4} \left( 1 - \frac{I_1(\lambda) J_0(\lambda r) + I_0(\lambda r) J_1(\lambda)}{I_1(\lambda) J_0(\lambda) + I_0(\lambda) J_1(\lambda)} \right),$$

$$\psi_1(r) = \frac{\sigma_0^*}{\lambda^2} \frac{I_1(\lambda) J_0(\lambda r) - I_0(\lambda r) J_1(\lambda)}{I_1(\lambda) J_0(\lambda) + I_0(\lambda) J_1(\lambda)}$$

для випадку 1) і

$$w(r) = \frac{\sigma_0^*}{\lambda^4} \left( 1 - \frac{I^*(\lambda) J_0(\lambda r) + I_0(\lambda r) J^*(\lambda)}{I^*(\lambda) J_0(\lambda) + I_0(\lambda) J^*(\lambda)} \right),$$

$$\psi_1(r) = \frac{\sigma_0^*}{\lambda^2} \frac{I^*(\lambda) J_0(\lambda r) - I_0(\lambda r) J^*(\lambda)}{I^*(\lambda) J_0(\lambda) + I_0(\lambda) J^*(\lambda)}$$

для випадку 2). Тут прийняті такі позначення:

$$J^*(\lambda) = \lambda^2 \left( \frac{J_1(\lambda)}{\lambda} - J_0(\lambda) \right) - \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \lambda J_1(\lambda) + k_{31}^2 \lambda^2 J_0(\lambda);$$

$$I^*(\lambda) = \lambda^2 \left( \frac{I_1(\lambda)}{\lambda} - I_0(\lambda) \right) - \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \lambda I_1(\lambda) + k_{31}^2 \lambda^2 I_0(\lambda); \quad \sigma_0^* = \frac{12\sigma_0 R^3}{h^2 c_{11}^E (1+k_{31}^2)}.$$

У рамках розглянутої в'язкопружної моделі вважаємо пружні модулі матеріалу комплексними величинами [8, 16, 17]

$$c_{11}^E = c_{11R}^E (1 + i \operatorname{tg} \alpha), \quad c_{12}^E = c_{12R}^E (1 + i \operatorname{tg} \beta),$$

де  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \beta$  – тангенси кутів механічних втрат.

На рис. 1 представлено залежності прогину серединної поверхні в центрі пластини від безрозмірного числа  $\lambda$ , що характеризує квадрат частоти.

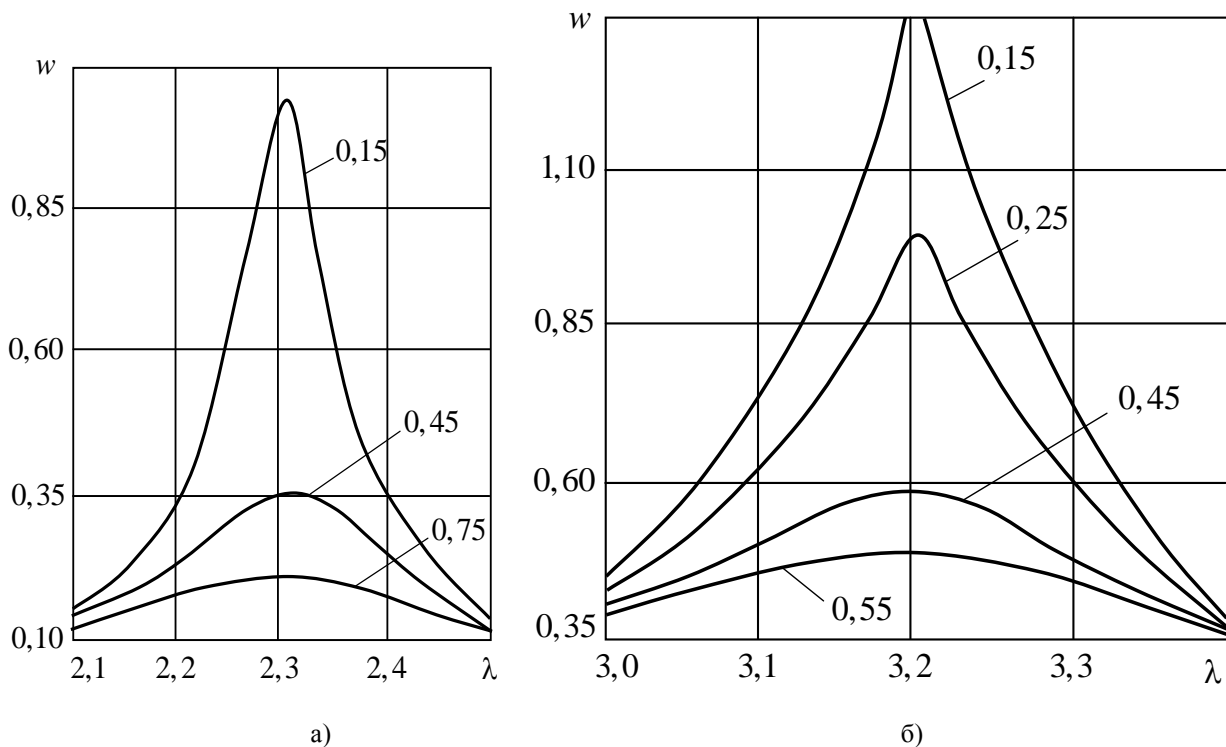


Рис. 1. Амплітудно-частотна характеристика коливань пластини:  
а) при жорсткому закріпленні її контуру; б) при її шарнірному закріпленні

Відповідні графічні залежності будувалися для першого основного резонансу при різних тангенсах кутів механічних втрат, що змінюються в межах від 0,15 до 0,75. Розрахунки проводилися для п'єзокераміки ЦТС-19 з такими фізико-механічними характеристиками:

$$\frac{c_{11R}^E}{c_{12R}^E} = 1,7; \quad k_{31}^2 = 0,014; \quad \operatorname{tg}\alpha = 0,1.$$

Як видно із представлених графіків, зміна тангенса кута механічних втрат суттєво впливає на амплітуду коливань на частоті основного резонансу і на добротність пластини. Необхідно відзначити також, що при фіксованому значенні тангенса добротність у випадках шарнірного і жорсткого закріплення однакова.

## ВИСНОВКИ

Проведено дослідження вимушених коливань круглої п'єзокерамічної пластини з урахуванням в'язкопружності матеріалу на частоті основного резонансу. Записано математичну модель коливань пластини під дією зовнішнього механічного гармонічного навантаження. Для випадків жорсткого закріплення контуру та шарнірного обпирання пластини отримано точний розв'язок та проведено чисельний розрахунок і аналіз амплітудно-частотних характеристик пластини в області основного резонансу.

Результати дослідження можуть бути корисними при проектуванні електромеханічних перетворювачів енергії, у конструкції яких п'єзокерамічні пластини входять як базові елементи. Крім цього, ці результати можуть використовуватися при вирішенні проблем демпфування коливань згинних електромеханічних перетворювачів енергії при робочих режимах в області резонансних частот.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Mason W. P. Electrostrictive effect in barium titanate ceramics / W.P. Mason // *Phys. Rev.* — 1948. — 74. — P. 1134-1147.
2. Вовкодав И. Ф. Анализ несимметричных колебаний тонких пьезокерамических дисков с разрезными электродами / И. Ф. Вовкодав, В. Л. Карлаш, А. Ф. Улитко // *Прикл. механика.* — 1979. — Т. 15, №2. — С. 77-82.
3. Исследование коэффициента электромеханической связи в круглых пьезокерамических пластинах / В. А. Андрущенко, И. Ф. Вовкодав, В. Л. Карлаш, А. Ф. Улитко // *Прикл. механика.* — 1975. — Т. 11, №4. — С. 42-48.
4. Карлаш В. Л. К определению динамических напряжений в тонких пьезокерамических дисках / В. Л. Карлаш // *Диэлектрики и полупроводники.* — 1977. — Вып. 12. — С. 33-36.
5. Карлаш В. Л. Радиальные колебания круглых пьезокерамических пластин с разомкнутыми электродами / В. Л. Карлаш // *Прикл. механика.* — 1981. — Т. 17, №9. — С. 83-87.
6. Карлаш В. Л. Особенности планарных колебаний пьезокерамических круглых пластин / В. Л. Карлаш // *Прикл. механика.* — 1987. — Т. 23, №11. — С. 74-80.
7. Окадзахи К. Анализ колебаний в тонких пьезокерамических резонаторах с кольцевыми электродами / К. Окадзахи, М. Умино // *Нихон онке гаккаси.* — 1969. — Т. 25, №6. — С. 325-334. (Перевод ВИНТИ № 93131/1).
8. Шульга Н. А. Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. — К. : Наук. думка, 1990. — 228 с.
9. Ikegami S. Frequency spectra of resonant vibrations in disk plates of  $\text{PbTiO}_3$  piezoelectric ceramics / S. Ikegami, J. Ueda, S. Kobajashi // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1974. — 55. — P. 339-344.
10. Munk E. C. The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes // *Phillips Res. Rep.* — 1965. — 20. — P. 170-189.
11. Onoe M. Contour vibrations of isotropic circular plates // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1956. — 28. — P. 1158-1162.
12. *Физическая акустика* / Под. ред. У. Мэзона. — М. : Мир, 1968. — Т. 1., Ч. А. — 592 с.
13. Шульга М. О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин : монографія / М. О. Шульга, В. Л. Карлаш. — К. : Наукова думка, 2008. — 272 с.
14. Борисейко В. А. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения / В. А. Борисейко, В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко // *Прикл. механика.* — 1976. — Т. 12, №2. — С. 26-33.
15. Улитко А. Ф. О некоторых особенностях постановки граничных задач электроупругости / А. Ф. Улитко // *Современные проблемы механики и авиации.* — М. : Наука, 1982. — С. 290-300.
16. Улитко А. Ф. Исследование рассеяния энергии в пьезокерамике / А. Ф. Улитко // *Рассеяние энергии при колебаниях механических систем.* — Киев, 1978. — С. 138-144.
17. Карлаш В. Л. Диссипация энергии при колебаниях тонких пьезокерамических круглых пластин / В. Л. Карлаш // *Прикл. механика.* — 1984. — Т. 20, №5. — С. 77-82.

## REFERENCES

1. Mason W.P. Electrostrictive effect in barium titanate ceramics / W.P. Mason // *Phys. Rev.* – 1948. – 74. – PP. 1134–1147.
2. Vovkodav I.F. Analysis of asymmetric vibrations of thin piezoceramic disks with split electrodes / I.F. Vovkodav, V.L. Karlash, A.F. Ulitko // *Applied mechanics.* – 1979. – V. 15, № 2. – PP. 77-82.
3. Study of the electromechanical coupling coefficient in circular piezoceramic plates / V.A. Andruschenko, I.F. Vovkodav, V.L. Karlash, A.F. Ulitko // *Applied mechanics.* – 1975. – V. 11, № 4. – PP. 42-48.
4. Karlash V.L. To determination of dynamic stresses in thin piezoceramic disks / V.L. Karlash // *Dielectrics and semiconductors.* – 1977. – Vol. 12. – PP. 33-36.
5. Karlash V.L. Radial oscillations of circular piezoceramic plates with open electrodes / V.L. Karlash // *Applied mechanics.* – 1981 – V. 17, № 9. – PP. 83-87.
6. Karlash V.L. Particularities of planar vibration of piezoceramic circular plates / V.L. Karlash // *Applied mechanics.* – 1987 – V. 23, № 11. – PP. 74-80.
7. Okadzahi K. Analysis of oscillations in thin piezoelectric ceramic resonators with ring electrodes / Okadzahi K., M. Umino // *Nihon onke gakkasi.* – 1969. – V. 25, № 6. – PP. 325-334 (Translation VINITI № 93131/1).
8. Shulga N.A. Vibrations of piezoelectric bodies / N.A. Shulga, A.M. Bolkisev. – K. : Nauk dumka, 1990. – 228 p.
9. Ikegami S. Frequency spectra of resonant vibrations in disk plates of PbTiO<sub>3</sub> piezoelectric ceramics / S. Ikegami, J. Ueda, S. Kobajashi // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1974. – 55. – PP. 339-344.
10. Munk E.C. The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes // *Phillips Res. Rep.* – 1965. – 20. – PP. 170-189.
11. Onoe M. Contour vibrations of isotropic circular plates // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1956. – 28. – PP. 1158-1162.
12. *Physical acoustics* / Under. Ed. W. Mason. – M. : Mir, 1968. – T. 1, Part A. – 592 p.
13. Shulga M.O. Resonant electromechanical oscillations of piezoceramic plates: monograph / M.O. Shulga, V.L. Karlash. – K. : Naukova Dumka, 2008. – 272 p.
14. Boriseyko V.A Electroelasticity ratio for piezoceramic shells of revolution / V.A. Boriseyko, V.T. Hrinchenko A.F. Ulitko // *Applied mechanics.* – 1976. – Vol. 12, №2. – PP. 26-33.
15. Ulitko A.F. About some particularities of boundary problems of electrodynamics / A.F. Ulitko // *Modern problems of mechanics and aviation.* – M. : Nauka, 1982. – PP. 290-300.
16. Ulitko A.F. Study of energy dissipation in the piezoceramic / A.F. Ulitko // *Dissipation of energy with the oscillations in mechanical systems.* – Kiev, 1978. – PP. 138-144.
17. Karlash V.L. Energy dissipation during vibrations of thin piezoceramic circular plates / V.L. Karlash // *Applied mechanics.* – 1984. – V. 20, № 5. – PP. 77-82.