УДК 519.71

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ МЕЖДУ ПОДМНОЖЕСТВАМИ

Коряшкина Л. С., к. ф.-м. н., доцент, Череватенко А. П., аспирант

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, Украина

koryashkinals@mail.ru, pavlova-tonya@mail.ru

Сформулированы необходимые условия оптимальности для динамической задачи оптимального разбиения множества с подвижными границами между подмножествами. Указано, какими свойствами должны обладать функции, входящие в постановку задачи, чтобы эти условия были и достаточными условиями оптимальности разбиения и управляемого процесса в целом.

Ключевые слова: непрерывная задача оптимального разбиения множеств, управляемая система, принцип максимума Понтрягина, динамическое разбиение

УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ МІЖ ПІДМНОЖИНАМИ

Коряшкіна Л. С., к. ф.-м. н., доцент, Череватенко А. П., аспірант

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, Україна

koryashkinals@mail.ru, pavlova-tonya@mail.ru

Сформульовано необхідні умови оптимальності для динамічної задачі оптимального розбиття множини з рухомими границями між підмножинами. Зазначено, якими властивостями мають володіти функції, що входять в постановку задачі, щоб ці умови були і достатніми умовами оптимальності розбиття і керованого процесу загалом.

Ключові слова: неперервна задача оптимального розбиття множин, керована система, принцип максимуму Понтрягіна, динамічне розбиття

OPTIMALITY CONDITIONS FOR THE OPTIMAL SET PARTITIONING PROBLEM WITH MOVING BOUNDARIES BETWEEN SUBSETS

Koriashkina L. S., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
Cherevatenko A. P., Graduate Student

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, boulevard of Gagarin, 72, Dnipropetrovsk, Ukraine

koryashkinals@mail.ru, pavlova-tonya@mail.ru

Dynamical problems of optimal sets partitioning (OSP) appeared as a generalization of the OSP continuous problems in response to the need to take into account the changes over time of the character of some controlled parameters of partitioning problems in the process of their formalization. The mathematical models of such problems include differential equation that describes the change of the studied object state. Particular cases of OSP dynamical problems are presented in [1-4]. We consider such OSP dynamical problem with moving boundaries between the subsets: let us assume that Ω – finite Lebesgue measurable set from E_n; Σ_Ω^N – class of all possible partitionings of the set Ω at N subsets:

$$\Sigma_\Omega^N = \left\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, ..., \Omega_N): \ \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \, mes\left(\Omega_i \bigcap \Omega_j\right) = 0, \, i \neq j, \, i, j = \overline{1, N} \right\},$$

where $mes(\cdot)$ – Lebesgue measure; U – class of admissible control functions:

$$U = \left\{ (u(\cdot, \cdot; \bar{\omega}(\cdot)) : u(x,t;\bar{\omega}(t)) = u_i(x,t) \text{ a. e. for } x \in \Omega_i, \, i = \overline{1, N}, \bar{\omega}(t) \in \Sigma_\Omega^N, \, t \in \left[0, T\right] \right\},$$

where the functions $u_i(x,t),\ i=\overline{1,N},$ are given real, confined, defined on $\Omega\times[0,T]$, measurable in x and t. Minimize the functional

$$F(\rho(\cdot,\cdot),u(\cdot,\cdot;\bar{\omega}(\cdot)))=\int_0^T\int_\Omega \Phi(\rho(x,t),u(x,t;\bar{\omega}(t)),t)dxdt$$

under constraints

$$\dot{\rho}(x,t)=\varphi(\rho(x,t),u(x,t;\bar{\omega}(\mathrm{t})),\mathrm{t}),\quad \bar{\omega}(\mathrm{t})\in\Sigma_\Omega^N,\ t\in[0,T],$$

$$\rho(x,0)=\rho_0(x),\quad x\in\Omega,$$

$$u(x,t)\in U \text{ a.e. for } x\in\Omega,\ 0\le t\le T.$$

T is fixed.

We formulated necessary optimality conditions for this problem by introducing the characteristic functions of subsets $\Omega_1,...,\Omega_N$, reducing it to the family of optimal control problems and applying local maximum principle to each of them.

We indicated what properties should have the functions in the statement of the problem that necessary conditions were sufficient optimality conditions and controlled partitioning process as a whole. Obtained conditions turned out to be constructive: for subsets characteristic functions that make up an optimal dynamical set Ω partitioning it is possible to obtain an operator equation. Given theorems may be further lightly generalized in various ways, e.g., with other types of functional and boundary conditions, with presence of integral or phase restrictions, etc.

Key words: continuous problem of optimal set partitioning, the control system, the maximum principle of Pontryagin, dynamic partitioning.

Динамические задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ) появились как обобщение непрерывных задач ОРМ в ответ на необходимость учета меняющегося со временем характера некоторых, как правило управляемых, параметров задач разбиения при их математической формализации. Математические модели таких задач содержат дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений, описывающих изменение состояния изучаемого процесса или объекта. Частные случаи динамических задач ОРМ, их свойства и методы решения представлены в работах [1-4]. Так, в [1] получены оптимальные решения простейшей динамической задачи ОРМ с линейным функционалом качества разбиения, с функционалом энергии и их линейной сверткой. В [2] простейшая динамическая задача разбиения дополнена интегральными ограничениями на фазовую траекторию. В [3] приведена математическая постановка динамической задачи оптимального разбиения множества n-мерного пространства с размещением центров подмножеств, при интегральных ограничениях-неравенствах на фазовую траекторию. Исследованы условия существования оптимального решения указанной задачи. Приведен метод и численный алгоритм ее решения. В отличие от задач из [1-3], в работе [4] представлена непрерывная задача оптимального разбиения множеств, в которой динамический характер носят границы между подмножествами. В данной работе сформулированы необходимые условия оптимальности для динамической задачи оптимального разбиения множества с подвижными границами между подмножествами. Указано, какими свойствами должны обладать функции, входящие в постановку задачи, чтобы эти условия были и достаточными условиями оптимальности разбиения и управляемого процесса в целом.

Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество из E_n, Σ_Ω^N – класс всевозможных разбиений множества Ω на N подмножеств:

$$\Sigma_\Omega^N=\left\{\bar{\omega}=(\Omega_1,...,\Omega_N):\ \bigcup_{i=1}^N\Omega_i=\Omega,\ mes\left(\Omega_i\cap\Omega_j\right)=0,\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,N}\right\},$$

где $mes(\cdot)$ означает меру Лебега. Пусть функции $u_i(x,t),\ i=\overline{1,N},$ – заданные действительные, ограниченные, определенные на $\Omega\times[0,T]$, измеримые по x и t.

Введем в рассмотрение класс допустимых управляющих функций:

$$U=\left\{(u(\cdot,\cdot;\bar{\omega}(\cdot)):u(x,t;\bar{\omega}(t))=u_i(x,t)\text{ п. в. для }x\in\Omega_i,\ i=\overline{1,N},\bar{\omega}(t)\in\Sigma_\Omega^N,\ t\in[0,T]\right\}.$$

Задача 1. Минимизировать функционал

$$F(\rho(\cdot,\cdot),u(\cdot,\cdot;\bar{\varpi}(\cdot)))=\int_0^T\int_\Omega \Phi(\rho(x,t),u(x,t;\bar{\varpi}(t)),t)dxdt \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{\rho}(x,t)=\varphi(\rho(x,t),u(x,t;\bar{\varpi}(\mathrm{t})),\mathrm{t}),\quad \bar{\varpi}(\mathrm{t})\in\Sigma_\Omega^N,\ t\in[0,T], \tag{2}$$

$$\rho(x,0)=\rho_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$u(x,t)\in U \text{ почти всюду для } x\in\Omega,\ 0\le t\le T. \tag{4}$$

Минимизация функционала (1) производится по всем ограниченным измеримым $u\in U$ и по всем непрерывным $\rho(x,t)$, удовлетворяющим (2), (3) почти всюду для $t\in[0,T]$ и $x\in\Omega$. Момент времени T фиксирован. Уравнение (2) будем понимать в интегральном смысле: п. в. для $x\in\Omega$ при произвольном разбиении $\bar{\omega}(\mathrm{t})\in\Sigma_\Omega^N,\ t\in[0,T]$ и соответствующем управлении $(u(\cdot,\cdot;\bar{\omega}(\cdot))\in U$ решением задачи Коши (2), (3) почти всюду для $t\in[0,T]$ является функция $\rho(x,t)$ (непрерывная по t), удовлетворяющая интегральному уравнению:

$$\rho(x,t)=\rho_0(x)+\int_0^t\varphi(\rho(x,\theta),u(x,\theta;\bar{\varpi}(\theta)),\theta)\,\mathrm{d}\,\theta,\quad \bar{\varpi}(\mathrm{t})\in\Sigma_\Omega^N,\ t\in[0,T]. \tag{5}$$

Заметим, что управление в каждой точке $x\in\Omega$ в каждый момент времени $t\in[0,T]$ полностью определяется разбиением множества $\bar{\varpi}(\mathrm{t})=(\Omega_1(\mathrm{t}),\ldots,\Omega_N(\mathrm{t}))\in\Sigma_\Omega^N$.

Будем предполагать, что функция $\varphi(y,u,t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных при всех $(y,u,t)\in R\times R\times[0,T]$, и пусть для любых $(y,u,t),\,(z,u,t)\in R\times R\times[0,T]$ выполняется неравенство

$$|\varphi(y,u,t)-\varphi(z,u,t)|\le L(t)|y-z|,$$

где $L(t)\in L_1(0,T]$ – неотрицательная функция. Кроме того,

$$|\varphi(z,u,t)|\le C_0(|z|+|u|^2)+\mathrm{C}_1(t)$$

для всех $(z,u,t)\in R\times R\times[0,T]$, где $C_0=\mathrm{const}\ge 0,\ \mathrm{C}_1(t)\ge 0,\ \ \mathrm{C}_1(t)\in L_1[0,T)$. Тогда п.в. для $x\in\Omega$ для произвольного допустимого управления $u(x,\cdot)\in \mathrm{L}_2[0,T]$ и начального условия существует, и притом единственное, решение $\rho=\rho(x,t)$ задачи (2), (3), определенное на всем отрезке $t\in[0,T]$. Это решение п.в. для $x\in\Omega$ имеет производную $\dot{\rho}(x,t)$ почти всюду на $[0,T]$ и удовлетворяет уравнению (5) при почти всех $t\in[0,T]$.

Оптимальным решением задачи **1** будем называть допустимую тройку $\gamma^*=\left(\bar{\varpi}^*(\cdot),u^*(\cdot,\cdot;\bar{\varpi}^*(\cdot)),\rho^*(\cdot,\cdot)\right)$, при которой достигается минимальное значение функционала F.

Будем также предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1. Функции $\Phi(\rho,u,t)$ и $\varphi(\rho,u,t)$ заданы на R^3 со значениями в R^1, непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по ρ и t, причем $\Phi_\rho(\rho,u,t)$, $\varphi_\rho(\rho,u,t)$, $\Phi_t(\rho,u,t)$, $\varphi_t(\rho,u,t)$ ограничены при любых ограниченных $\rho,\,u$.

Необходимые и достаточные условия оптимальности. Введем характеристические функции $\left(\lambda_1(\cdot,\cdot),...,\lambda_N(\cdot,\cdot)\right)\in\Lambda$ подмножеств $\Omega_1,...,\Omega_N$, где

$$\Lambda=\left\{\lambda(\cdot,\cdot)=(\lambda_1(\cdot,\cdot),\ldots,\lambda_N(\cdot,\cdot)):\ \lambda_i(x,t)=0\vee 1,\ i=\overline{1,N},\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x,t)=1 \text{ п.в. для } x\in\Omega,\ t\in\left[0,T\right]\right\},$$

и представим функции, входящие в класс допустимых управлений U, в виде:

$$u(x,t;\lambda(x,t))=\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i(x,t).$$

Тогда уравнение (2) можно записать так:

$$\dot{\rho}(x,t)=\varphi(\rho(x,t),u(x,t;\lambda(x,t)),t) \quad \text{п.в. для } x\in\Omega,\ t\in\left[0,T\right], \qquad (6)$$

а в качестве управляющих функций в задаче **1** можно рассматривать вектор-функции из множества Λ. Перейдем от задачи **1**, в которой неизвестным является разбиение множества Ω, к следующей задаче.

Задача 2. Найти вектор-функцию $\lambda^*(\cdot,\cdot)=\left(\lambda_1^*(\cdot,\cdot),...,\lambda_N^*(\cdot,\cdot)\right)\in\Lambda$ и соответствующую ей фазовую траекторию $\rho^*(x,t)$ (удовлетворяющую (6), (3)), при которых функционал

$$I(\rho(\cdot,\cdot),\lambda(\cdot,\cdot))=\int_0^T\int_\Omega \Phi(\rho(x,t),\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i\ (x,t),t)dxdt \qquad (7)$$

достигает своего минимального значения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\lambda^*(\cdot,\cdot)\in\Lambda$; $\rho^*(x,\cdot)\in C\left(\left[0,T\right]\right)$ п. в. для $x\in\Omega$ – решение задачи Коши (6), (3), соответствующее вектор-функции $\lambda^*(x,\cdot)$. Для того, чтобы допустимый процесс $\left(\lambda^*(\cdot,\cdot),\rho^*(\cdot,\cdot)\right)$ доставлял минимальное значение функционалу (7), необходимо и достаточно, чтобы *почти всюду* для $x\in\Omega$ выполнялось равенство

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Phi(\rho(x,t),\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i^*(x,t),t)dt=\\ &=\min_{\left(\lambda(x,\cdot),\rho(x,\cdot)\right)\in V_x}\int_0^T \Phi(\rho(x,t),\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i\ (x,t),t)dt,\end{aligned} \qquad (8)$$

где множество V_x для каждого $x\in\Omega$ определяется следующим образом:

$$V_x=\left\{\left(\rho,\lambda\right):\lambda(x,t)\in\Lambda_{xt};\ \dot{\rho}(x,t)=\varphi(\rho(x,t),u(x,t;\lambda(x,t)),t),\forall\, t\in\left[0,T\right];\ \rho(x,0)=\rho_0(x)\right\},$$

где Λ_{xt} – сечение множества Λ при конкретных параметрах $x\in\Omega$ и $t\in\left[0,T\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Учитывая тот факт, что, согласно условиям (6), функция $\rho(x,t)$ для каждого $x\in\Omega$ изменяется только по времени, поменяем порядок интегрирования в функционале (7):

$$I(\rho(\cdot,\cdot),\lambda(\cdot,\cdot))=\int_\Omega\int_0^T \Phi(\rho(x,t),\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i\ (x,t),t)dtdx$$

и введем обозначения:

$$B(\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot))=\int_0^T \Phi(\rho(x,t),\sum_{i=1}^N u_i(x,t)\lambda_i\ (x,t),t)dt,$$

$$V=\bigcup_{x\in\Omega} V_x\ .$$

Тогда задачу (7), (6), (3) можно записать следующим образом:

$$\int_\Omega B\big(\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot)\big)dx\ \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot,\cdot),\rho(\cdot,\cdot))\in V}.$$

Необходимость. Пусть $(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))$ – оптимальное решение задачи, т. е.

$$I(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))\le I(\rho(\cdot,\cdot),\lambda(\cdot,\cdot))\quad \forall\lambda(\cdot,\cdot)\in\Lambda,$$

$\rho(\cdot,\cdot)$ – решение (6), (3), соответствующее функции управления $\lambda(\cdot,\cdot)$. Покажем, что этот процесс почти всюду для $x\in\Omega$ удовлетворяет условию (8). Предположим противное: существует подмножество $\tilde{\Omega}$ множества Ω, такое, что $mes(\tilde{\Omega})>0$ и $\forall x\in\tilde{\Omega}$ условие (8) не выполняется, а это значит, п. в. для $x\in\tilde{\Omega}$ существует процесс $(\tilde{\rho}(x,\cdot),\tilde{\lambda}(x,\cdot))\in V_x$, для которого справедливо неравенство

$$\int_0^T \Phi(\tilde{\rho}(x,t),\sum_{i=1}^N u_i(x,t)\tilde{\lambda}_i\ (x,t))dt<\int_0^T \Phi(\rho^*(x,t),\sum_{i=1}^N u_i(x,t)\lambda_i^*(x,t))dt\ ,$$

или, используя введенные обозначения:

$$B(\tilde{\rho}(x,\cdot),\tilde{\lambda}(x,\cdot))<B(\rho^*(x,\cdot),\lambda^*(x,\cdot))\,.$$

Составим новый процесс:

$$(\bar{\rho}(x,\cdot),\bar{\lambda}(x,\cdot))=\begin{cases}(\tilde{\rho}(x,\cdot),\tilde{\lambda}(x,\cdot))\in V_x, & \forall\,\mathrm{x}\in\tilde{\Omega}\\ (\rho^*(x,\cdot),\lambda^*(x,\cdot))\in V_x, & \forall\,\mathrm{x}\in\Omega\setminus\tilde{\Omega}.\end{cases}$$

Вычислим значение функционала задачи (7) на этом процессе:

$$\int_\Omega B(\bar{\rho}(\cdot,\cdot),\bar{\lambda}(\cdot,\cdot))dx=\int_{\tilde{\Omega}} B(\tilde{\rho}(x,\cdot),\tilde{\lambda}(x,\cdot))dx+\int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} B(\rho^*(x,\cdot),\lambda^*(x,\cdot))dx.$$

Разбивая функционал $I(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))$ аналогичным образом и сопоставляя правые части полученных соотношений, придем к выводу:

$$I(\bar{\rho}(\cdot,\cdot),\bar{\lambda}(\cdot,\cdot))<I(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))\,,$$

что противоречит тому, что процесс $(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))$ оптимален.

Достаточность. Пусть процесс $(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))$ удовлетворяет условию (8) почти всюду для $x\in\Omega$. Покажем, что пара $(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))$ является оптимальным решением задачи (7), (6), (3). Пусть для всех $x\in\Omega$ $(\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot))\in V_x$ – произвольный допустимый процесс. Тогда из условия (8) следует, что почти всюду для $x\in\Omega$

$$B(\rho^*(x,\cdot),\lambda^*(x,\cdot))\le B(\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot))\,.$$

Интегрируя это неравенство по всем $x\in\Omega$ и учитывая тот факт, что неравенство может не выполняться на множестве точек из множества Ω, значение подынтегральной функции в которых не влияет на величину интеграла, получим:

$$\int_{\Omega} B(\rho^*(x,\cdot),\lambda^*(x,\cdot))dx \le \int_{\Omega} B(\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot))dx\,,$$

что указывает на оптимальность допустимого процесса $(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot))$.

И, таким образом, теорема 1 сводит решение задачи (7), (6), (3) к решению семейства задач оптимального управления: почти всюду для $x\in\Omega$

$$B(\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot)) \to \min_{(\lambda(x,\cdot),\rho(x,\cdot))\in V_x}, \tag{9}$$

где функция $\rho(x,\cdot)$ – решение задачи (6), (3).

Предположим, что вектор-функция $\lambda(\cdot,\cdot)$ может принимать значения на симплексе

$$\Lambda_1=\left\{\lambda(\cdot,\cdot)=(\lambda_1(\cdot,\cdot),\dots,\lambda_N(\cdot,\cdot)):\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x,t)=1; 0\le\lambda_i(x,t)\le 1 \text{ п. в. для } x\in\Omega,\, t\in[0,T]\right\}.$$

Наряду с задачей **2** будем рассматривать и следующую задачу.

Задача 3. Найти вектор-функцию $\lambda^*(\cdot,\cdot)=\left(\lambda_1^*(\cdot,\cdot),\dots,\lambda_N^*(\cdot,\cdot)\right)\in\Lambda_1$, соответствующую ей фазовую траекторию $\rho^*(\cdot,\cdot)$, которые минимизируют функционал (7).

Нетрудно показать, что задача **3** обладает следующим **свойством**: если функция $\Phi(\rho,u,t)$ выпукла по переменной u при всех фиксированных ρ и t и не убывает на R, то функционал $I(\rho(\cdot,\cdot),\lambda(\cdot,\cdot))$ является выпуклым по $\lambda(\cdot,\cdot)$ на Λ_1.

Аналогично тому, как задача **2** эквивалентна семейству задач (9), задача **3** эквивалентна решению семейства задач оптимального управления:

$$I(\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot)) \to \min_{(\lambda(x,\cdot),\rho(x,\cdot))\in\hat V_x}, \quad \text{п. в. для } x\in\Omega, \tag{10}$$

$$\hat V_x=\Big\{ (\rho(x,\cdot),\lambda(x,\cdot)) : \lambda(x,t)\in\Lambda_{1x},$$

$$\dot\rho(x,t)=\varphi(\rho(x,t),\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)\lambda_i(x,t),t),\quad t\in[0,T],\ \rho(x,0)=\rho_0(x) \Big\}$$

с управляющей функцией $\lambda(x,\cdot)$, где Λ_{1x} – сечение множества Λ_1 при конкретном $x\in\Omega$. Обозначим $\hat V=\bigcup_{x\in\Omega}\hat V_x$. Сформулируем локальный принцип максимума для задачи **3**.

Теорема 2. Пусть в задаче **3** функции $\Phi(\rho,u,t)$ и $\varphi(\rho,u,t)$ заданы на R^3 со значениями в R^1, непрерывны по ρ и u, измеримы по t, непрерывно дифференцируемы по ρ и u, причем $\Phi_\rho(\rho,u,t)$, $\varphi_\rho(\rho,u,t)$, $\Phi_u(\rho,u,t)$, $\varphi_u(\rho,u,t)$ ограничены при любых ограниченных ρ, u. Пусть $u_i(x,t)$, $i=\overline{1,N}$, – заданные, действительные, ограниченные, определенные на $\Omega\times[0,T]$, измеримые по x и t.

Пусть пара $\left(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot)\right)\in\hat V$ – решение задачи **3**. Тогда п. в. для $x\in\Omega$ необходимо существуют функция $\psi_x(t)$ и константа $\psi_0\ge 0$ (свои для каждого x), не равные одновременно нулю ни при каком $t\in[0,T]$, такие что:

1) функция $\psi_x(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\dot{\psi}_x = -\psi_x(\mathrm{t}) \cdot \frac{\partial \varphi^*(\rho(x,t),u(x,t),t)}{\partial \rho} + \psi_0 \frac{\partial \Phi^*(\rho(x,t),u(x,t),t)}{\partial \rho}; \tag{11}$$

$$\psi_x(\mathrm{T}) = 0, \tag{12}$$

где

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \varphi(\rho^*(x,t),u(x,t;\lambda^*(x,t)),t)}{\partial \rho}, \quad u(x,t;\lambda^*(x,t)) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x,t)\lambda_i^*(x,t);$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial \rho} = \frac{\partial \Phi(\rho^*(x,t),u(x,t;\lambda^*(x,t)),t)}{\partial \rho};$$

2) п.в. для $t \in [0,T]$ и $\lambda(x,t) \in \Lambda_{1xt}$

$$\left(\left(-\psi_x(\mathrm{t}) \cdot \frac{\partial \varphi^*(\rho,u,t)}{\partial u} + \psi_0 \frac{\partial \Phi^*(\rho,u,t)}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda}, \lambda(x,t) - \lambda^*(x,t) \right) \ge 0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $x \in \Omega$ – фиксированная точка. Функция Понтрягина для задачи (10) имеет следующий вид:

$$H(\rho,\lambda,\psi_x,\mathrm{t}) = \psi_x(\mathrm{t}) \cdot \varphi(\rho(x,t), \sum_{i=1}^{N} u_i(x,t)\lambda_i(x,t),t) - \psi_0 \Phi(\rho(x,t), \sum_{i=1}^{N} u_i(x,t)\lambda_i(x,t),t).$$

Условия (11), (12) являются условиями стационарности и трансверсальности по фазовой координате соответственно для процесса $\left(\rho^*(x,\cdot),\lambda^*(x,\cdot)\right) \in \hat{V}_x$ задачи оптимального управления (10). Условие (13) – это необходимое условие максимума функции Понтрягина $H(\rho,\lambda,\psi_x,\mathrm{t})$ по всем $\lambda(x,t) \in \Lambda_{1xt}$:

$$\left(H_\lambda(\rho,\lambda,\psi_x,\mathrm{t}), \lambda - \lambda^*(x,t)\right) \le 0 \ \text{ п. в. для } t \in [0,T] \text{ и } \lambda(x,t) \in \Lambda_{1xt}.$$

Компоненты вектора $H_\lambda(\rho,\lambda,\psi_x,\mathrm{t})$ – градиента функции Понтрягина по переменной $\lambda_k(x,t)$ при всех $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$ вычисляются по формуле:

$$H_{\lambda_k}(\rho^*,\lambda^*,\psi_x,\mathrm{t}) = \left(\psi_x(t) \cdot \frac{\partial \varphi^*(\rho,u,t)}{\partial u} - \psi_0 \frac{\partial \Phi^*(\rho,u,t)}{\partial u} \right) \cdot u_k(x,t), \quad k = \overline{1,N}.$$

Таким образом, условия (11)-(13) являются необходимыми условиями оптимальности допустимого процесса в задаче (10). В силу того, что решение задачи **3** эквивалентно решению семейства задач (10) п. в. для $x \in \Omega$, заключаем, что процесс $\left(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot)\right) \in \hat{V}$, для которого выполняются условия теоремы, является стационарным процессом для задачи **3**.

Если не требовать выпуклости и существования внутренних точек множества допустимых управлений, что характерно для задачи **2** (или самой исходной задачи), а также требования дифференцируемости функций $\Phi(\rho,u,t)$ и $\varphi(\rho,u,t)$ по управляющей переменной, можно сформулировать и доказать по схеме Дубовицкого – Милютина следующую теорему.

Теорема 3. Функции $\Phi(\rho,u,t)$ и $\varphi(\rho,u,t)$ заданы на R^3 со значениями в R^1, непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по ρ, t, причем $\Phi_\rho(\rho,u,t)$, $\varphi_\rho(\rho,u,\mathrm{t})$, $\Phi_t(\rho,u,t)$, $\varphi_t(\rho,u,t)$ ограничены при любых ограниченных ρ, u.

Пусть пара $\left(\rho^*(\cdot,\cdot),\lambda^*(\cdot,\cdot)\right)\in V$ – решение задачи **2**. Тогда п. в. для $x\in\Omega$ необходимо существуют функция $\psi_x(t)$ и константа $\psi_0\ge 0$ (для каждого x – свои), не равные одновременно нулю ни при каком $t\in[0,T]$, такие, что

1) функция $\psi_x(t)$ является решением задачи Коши (11), (12);

2) функция Понтрягина $H(\rho,\lambda,\psi,\mathrm{t})$ при $\lambda(x,\cdot)=\lambda^*(x,\cdot)$, $\rho(x,\cdot)=\rho^*(x,\cdot)$ достигает максимума по всем $\lambda(x,\cdot)\in\Lambda_x$, что равносильно условию:

$$H(\rho^*(x,t),\lambda^*(x,t),\psi_x(t),\mathrm{t})=\max_{\lambda(x,t)\in\Lambda_{xt}} H(\rho^*(x,t),\lambda(x,t),\psi_x(t),\mathrm{t}),\ t\in[0,T]$$

или

$$H(\rho^*(x,t),\lambda^*(x,t),\psi_x,\mathrm{t})=\sigma+$$
$$+\int_t^T\left(-\psi_x(\theta)\cdot\varphi_t'(\rho^*(x,\theta),u^*(x,\theta),\theta)-\psi_0\Phi_t'(\rho^*(x,\theta),(x,\theta),\theta)\right)d\theta,$$

где $u^*(x,t)=\sum_{i=1}^N u_i(x,t)\lambda_i^*(x,t)$, σ – некоторая константа.

Определение. Будем говорить, что задача **3** удовлетворяет **условию сильной регулярности**, если функция Понтрягина $H(\rho,\lambda,\psi_x,\mathrm{t})$ почти каждой из задач оптимального управления семейства (10) такова, что

$$H_{\lambda_k}(\rho^*,\lambda^*,\psi_x,\mathrm{t})\ne 0,\ \ \mathrm{k}=\overline{1,N},\ \ t\in[0,T],\tag{14}$$

за исключением множества точек $t\in[0,T]$ нулевой меры.

В соответствии с теоремой **2**, учитывая структуру множества Λ_1, для вычисления компоненты $\lambda^*(x,\cdot)$ оптимального решения задачи **3** можно записать следующее операторное уравнение: п. в. для $x\in\Omega$

$$\lambda_i^*(x,t)=\begin{cases}1, & \text{если } B_i(x,t)=\min\limits_{k=\overline{1,N}} B_k(x,t),\\ 0, & \text{в остальных случаях},\ i=\overline{1,N},\end{cases}\tag{15}$$

где величина $B_i(x,t)$ вычисляется по формуле:

$$B_i(x,t)=\left(-\psi_x(\mathrm{t})\cdot\frac{\partial\varphi^*(\rho,u,t)}{\partial u}+\psi_0\frac{\partial\Phi^*(\rho,u,t)}{\partial u}\right)\cdot u_i(x,t),$$

а функции $\psi_x(t)$ и $\rho*(x,t)$ являются решениями задач Коши (11), (12) и (6), (3) при $\lambda=\lambda^*(x,\cdot)$ соответственно.

Таким образом, если задача **3** удовлетворяет условию сильной регулярности (14), то компонента $\lambda^*(x,\cdot)$ оптимального решения задачи **3** определяется однозначно из операторного уравнения (15). Очевидно, что п.в. для $x\in\Omega$, $t\in[0,T]$ первая компонента оптимального решения задачи **3** является крайней точкой симплекса Λ_{1xt}. Крайние точки допустимого множества Λ_{1xt} для каждого $x\in\Omega$, $t\in[0,T]$ представляют собой значения характеристических функций некоторых подмножеств Ω_i, образующих разбиение множества Ω. С учетом того, что для всех $x\in\Omega$ и $t\in[0,T]$ множество Λ_{xt} погружено в множество Λ_{1xt}, заключаем, что при выполнении условия сильной регулярности (14) оптимальные решения задач **2** и **3** совпадают, что означает эквивалентность этих двух задач.

Следующая теорема определяет условия критерия оптимальности для решения задачи 2.

Теорема 4. Пусть в задаче **2:**

1) функция $\Phi(\rho,u,t)$ – выпукла и непрерывно дифференцируема по переменным ρ и u, а также непрерывна по t;
2) функция $\varphi(\rho,u,t)$ линейна и по фазовой ρ, и по управляющей переменной u с коэффициентами $A(t), B(t)$, непрерывно зависящими от переменной t.

Тогда при сделанных предположениях локальный принцип максимума (теорема **2**) является достаточным условием экстремума в задаче **2**.

Выводы. Сформулированные условия сильного экстремума для непрерывной задачи оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами являются конструктивными: для характеристических функции подмножеств, составляющих оптимальное динамическое разбиение множества Ω, удалось получить операторное уравнение. Теоремы **2**–**4** могут быть обобщены для задач с другими типами функционалов и граничных условий, при наличии интегральных или фазовых ограничений и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселева Е. М. О решении и свойствах простейшей динамической задачи оптимального разбиения множеств / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина // Проблемы управления и информатики. — №3. — 2013. — С. 102-112.
2. Киселева Е. М. О динамической задаче оптимального разбиения множеств с интегральными ограничениями / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, Т. А. Шевченко // Проблемы управления и информатики. — №4. — 2013. — С. 33-44.
3. Киселева Е. М. О решении динамической задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, Т. А. Шевченко // Кибернетика и системный анализ. — №6. — 2014. — С. 29-40.
4. Шевченко Т. А. Особенности решения задач оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами / Т. А. Шевченко, Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина // Труды по исследованию операций 2008. — Шпрингер – Хайдельберг, 2009. — С. 533 – 538.
5. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — М. : Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
6. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления / А. А. Милютин. — М. : Наука, 1999. — 304 с.
7. Трухаев Р. Н. Теория неклассических вариационных задач / Р. Н. Трухаев, В. В. Хоменюк. — Л. : ЛГУ, 1971. — 168 с.

REFERENCE

1. Kiseleva, E.M. and Koriashkina, L.S. (2013), “On the solution and properties of simple dynamic problem of optimal set partitioning”, *Problems of control and computer science,* no. 3, pp. 102-112.
2. Kiseleva, E.M., Koryashkina, L.S. and Shevchenko, T.A. (2013), “On the dynamic problem of optimal set partitioning with integral constraints”, *Problems of control and computer science,* no. 4, pp. 33-44.
3. Kiseleva, E.M., Koryashkina, L.S. and Shevchenko, T.A. (2014), “The solution of the dynamic problem of optimal set partitioning with subsets centers accommodation”, *Cybernetics and Systems Analysis,* no 6, pp. 29-40.

4. Shevchenko, T.A., Kiseleva, E.M., and Koriashkina L.S/ (2009), “The features of solving of the set partitioning problems with moving boundaries between subsets”, *Operations Research Proceedings 2008*, pp. 533-538.
5. Vasiliev, F.P. (2002), *Metody optimizatsii* [Optimization techniques], Factorial Press, Moscow, Russia.
6. Milutin, A.A. (1999), *Printsip maksimuma v obschey zadache optimalnogo upravleniya* [The maximum principle in general optimal control problem], Nauka, Moscow, Russia.
7. Truhaev, R.N. and Homeniuk, V.V. (1971), *Teoriya neklassicheskikh variachionnych zadach* [The theory of non-classical variational problems], LGU, Leningrag.

УДК 519.85

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗКЛАД ЗА НАЯВНОСТІ ОЧІКУВАННЯ ОБСЛУГОВУВАННЯ НА ОДНОМУ ПРИЛАДІ

Леонова М. В., пошукач

Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г. Короленка, вул. Остроградського, 3, м. Полтава, 36000, Україна

Mariay2604@rambler.ru

В статті проводиться аналіз публікацій, присвячених задачі розкладу для одного приладу. Розглядається одна із постановок даної задачі та її модель, яка утворена за допомогою модифікації критерію оптимальності. Запропонований спосіб знаходження оптимального розв’язку задачі за допомогою поліноміального способу.
Ключові слова: задача розкладу для одного приладу,поліноміальний алгоритм.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПИСАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОЖИДАНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОДНОМ ПРИБОРЕ

Леонова М. В., соискатель

Полтавский национальный педагогический университет им. В.Г. Короленко, ул. Остроградского, 3, г. Полтава, 36000, Украина

Mariay2604@rambler.ru

В статье проводится анализ публикаций, посвященных задаче расписания для одного прибора. Рассматривается одна из постановок данной задачи и ее модель, образованная с помощью модификации критерия оптимальности. Предложен способ нахождения оптимального решения задачи полиномиальным способом.
Ключевые слова: задача расписания для одного прибора, полиномиальный алгоритм.

THE OPTIMAL SCHEDULE WITH A PRESENCE OF WAITING SERVICE ON ONE DEVICE

Leonova M. V., competitor

Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University, Ostrogradsky St., 2, Poltava, Ukraine

Mariay2604@rambler.ru

The article is devoted to finding the optimal solution for the problem of scheduling for a single device using polynomial algorithm. Considered one of the performances of the problem and its model that has optimality criterion – minimizing completion time of the last task when specified timeout is a beginning of each task.

The article consists of following sections: analysis of the problems and separation the problem with the device timetable, setting the scheduling problem model of the device, polynomial solution method, conclusions and list of used sources.