4. Shevchenko, T.A., Kiseleva, E.M., and Koriashkina L.S/ (2009), “The features of solving of the set partitioning problems with moving boundaries between subsets”, *Operations Research Proceedings 2008*, pp. 533-538.
5. Vasiliev, F.P. (2002), *Metody optimizatsii* [Optimization techniques], Factorial Press, Moscow, Russia.
6. Milutin, A.A. (1999), *Printsip maksimuma v obschey zadache optimalnogo upravleniya* [The maximum principle in general optimal control problem], Nauka, Moscow, Russia.
7. Truhaev, R.N. and Homeniuk, V.V. (1971), *Teoriya neklassicheskikh variachionnych zadach* [The theory of non-classical variational problems], LGU, Leningrag.

УДК 519.85

ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗКЛАД ЗА НАЯВНОСТІ ОЧІКУВАННЯ ОБСЛУГОВУВАННЯ НА ОДНОМУ ПРИЛАДІ

Леонова М. В., пошукач

Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г. Короленка, вул. Остроградського, 3, м. Полтава, 36000, Україна

Mariay2604@rambler.ru

В статті проводиться аналіз публікацій, присвячених задачі розкладу для одного приладу. Розглядається одна із постановок даної задачі та її модель, яка утворена за допомогою модифікації критерію оптимальності. Запропонований спосіб знаходження оптимального розв’язку задачі за допомогою поліноміального способу.
Ключові слова: задача розкладу для одного приладу,поліноміальний алгоритм.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПИСАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОЖИДАНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОДНОМ ПРИБОРЕ

Леонова М. В., соискатель

Полтавский национальный педагогический университет им. В.Г. Короленко, ул. Остроградского, 3, г. Полтава, 36000, Украина

Mariay2604@rambler.ru

В статье проводится анализ публикаций, посвященных задаче расписания для одного прибора. Рассматривается одна из постановок данной задачи и ее модель, образованная с помощью модификации критерия оптимальности. Предложен способ нахождения оптимального решения задачи полиномиальным способом.
Ключевые слова: задача расписания для одного прибора, полиномиальный алгоритм.

THE OPTIMAL SCHEDULE WITH A PRESENCE OF WAITING SERVICE ON ONE DEVICE

Leonova M. V., competitor

Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University, Ostrogradsky St., 2, Poltava, Ukraine

Mariay2604@rambler.ru

The article is devoted to finding the optimal solution for the problem of scheduling for a single device using polynomial algorithm. Considered one of the performances of the problem and its model that has optimality criterion – minimizing completion time of the last task when specified timeout is a beginning of each task.
The article consists of following sections: analysis of the problems and separation the problem with the device timetable, setting the scheduling problem model of the device, polynomial solution method, conclusions and list of used sources.

The problems of scheduling of a single and multiple devices widely considered in a scientific literature. In particular in the writings of Coffman E.G., Tanayeva V.S., Zgurovsky M.Z. described models of a such problems. The problems scheduling theory is related to ordering some work on time or performers (devices). It is necessary to take into account the restrictions on the sequence of work and restrictions that related to performers etc. The aim of solving such problems - the construction of permissible schedules in which all limitations are met, or which is more difficult – finding of the optimal acceptable schedule for one or another optimality criterion. For example, the construction of the schedule for optimal performance (namely the minimizing total execution time for all works), schedule with minimal financial cost etc.

Considering in the article the problem proposed by P. Brucker, S. Kunst, Shereshyk N. Y. which is as follows. Given a set $V = \{1, 2, ..., k\}$ of numbers task. Each task has a positive weight w_i, processing time p_i and waiting time r_i, if it is not available for service. The processing time is constant for all tasks $p_i = p$. Interrupts are allowed in the appliance. It is necessary to minimize the total weighted completion time of all maintenance tasks. Let $D = \{1, 2, ..., d\}$ – the set of moments in time which are sufficient to serve all tasks.

In the article proposed the way of solving a similar problem with a simplification and modification of the conditions of optimality criterion, namely: given set of tasks with a numbers $V = \{1, 2, ..., k\}$ for a single device. The task with a number *i* has a waiting time r_i when it is not available for processing $r_i \geq 0$. The time p_i processing of the task with a number *i* is the same for all tasks – $p_i = 1$, the weight of all tasks is the same too – $w_i = 1$. The objective function – minimizing service time of all tasks.

Then each acceptable solution of this problem is *k*-ordered with multisets of sample $R = \{r_1, ..., r_k\}$, that is part of the overall set of permutations, $E_{kn}(R)$: $x \in E_{kn}(R)$, where *n* – number of different elements in *R*, and x_i – waiting time of a task, which processing *i*-th.

We consider polynomial method of finding the optimal solution of the problem in the form of the statement:

The optimal solution of the problem of minimizing schedule time completion of all tasks is organizing tasks according to the ordering of elements in decreasing permutations $X = (r_{i_1}, ..., r_{i_k}) \in E_{kn}(R)$ provided $r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq ... \leq r_{i_k}$.

The proposed method is polynomial because obtaining optimal rearrangement *X* with enough property $r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq ... \leq r_{i_k}$ to arrange element *R*. This can be done by $O(n \cdot \log n)$ operations.

As the prospect of further research can be considered a generalization of this problem, particularly when w_i, p_i – different for different tasks, and (or) minimization of interruption number of all tasks.

Key words: task scheduling for a single device, polynomial algorithm.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ВИОКРЕМЛЕННЯ ПРОБЛЕМ РОЗКЛАДУ РОБОТИ ПРИЛАДУ

Задача розкладу одного і декількох приладів широко розглядаються в науковій літературі [1-3]. Зокрема, у працях Коффмана Е.Г. [1] описана така модель задачі. За допомогою деякої множини ресурсів або обслуговуючих пристроїв повинна бути виконана деяка фіксована система завдань. Мета полягає в тому, щоб при заданих властивостях завдань та ресурсів і накладених на них обмеженнях знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, що оптимізує бажану міру ефективності. Як основні міри ефективності визначаються довжина розкладу і середній час виконання завдань. Моделі цих задач є детермінованими в тому сенсі, що вся інформація, на основі якої приймаються рішення про впорядкування, відома заздалегідь. Зокрема, завдання і всі дані про них вважаються відомими в початковий момент. Запропоновані два основні показники ефективності, а саме: довжина розкладу, або максимальний час завершення, і середньо зважений час завершення, або проходження.

Робота Танаєва В.С. та Шкурби В.В. [2], присвячена теорії розкладів, містить, зокрема і випадок, коли потрібно скласти розклад для одного приладу. Кінцевий набір завдань, що надходять на обслуговування в заданий моменти часу, обслуговується одним приладом. У кожен момент часу прилад обслуговує не більше однієї вимоги. Відомі терміни обслуговування вимог. Порядок обслуговування може бути довільним, або регламентуватися заданими відносинами часткового порядку, при деяких постановках задачі можуть допускатися переривання. В обслуговуванні кожної окремої вимоги необхідно так організувати процес обслуговування, щоб він у тому чи іншому сенсі був найкращим.

Нехай необхідно обслугувати множину завдань з номерами $J_n = \{1, 2, ..., n\}$. Завдання $k,\ k \in J_n$ надходить на обслуговування в момент часу $d_k \geq 0$ і для обслуговування потрібно $t_k > 0$ одиниць часу. Процес обслуговування може бути описаний кусково-постійною, неперервною зліва функцією $s = s(t)$, яка приймає при $0 \leq t < \infty$ одне зі значень $0, 1, 2, ..., n$. Якщо $s(t) = k \neq 0$, то в момент часу t жодне із завдань не обслуговується. Ця функція називається розкладом.

Розклад повинен задовольняти деяким умовам, що випливають із самої постановки задачі. Основними можуть бути такі вимоги:

– умова повноти: для будь-якого $1 \leq k \leq n$ існує $0 \leq t < \infty$ таке, що $s(t) = k$;
– умова готовності до обслуговування: $s(t) \neq k$ для всіх $t < d_k$;
– умова впорядкованості: якщо за умовою задачі завдання i необхідно виконати раніше від завдання j і $s(t') = i$, то $s(t) \neq j$ для всіх $t < t'$;
– умова безперервності: якщо за умовою задачі переривання в обслуговуванні завдань не допускаються і $s(t') = s(t'') = k \neq 0$, то $s(t) = k$ для всіх $t' < t < t''$.

Розклади, які задовольняють перерахованим умовам, називаються допустимими.

У роботі Шерешика Н.Ю. [4] запропонована модель наступної задачі у вигляді задачі цілочислового лінійного програмування.

Задача 1. Задано множину $V = \{1, 2, ..., k\}$ номерів завдань. Кожне завдання має додатну вагу w_i, час обробки p_i і час очікування r_i, коли воно недоступне для обслуговування. Час обробки є сталим для всіх завдань $p_i = p$. У роботі приладу допускаються переривання. Необхідно мінімізувати сумарно зважений час завершення обслуговування всіх завдань. Нехай $D = \{1, 2, ..., d\}$ – множина моментів часу, які є достатніми для обслуговування всіх завдань.

Важливим в задачах знаходження розкладів є виокремлення поліноміальних випадків задачі. Подібні до сформульованої задачі, але з іншими критеріями та їх поліноміальні випадки розглянуті в статті [1], автором пропонується модель задачі, що може бути розв'язана з поліноміальними затратами часу. В роботі [7] розглядаються поліноміальні способи розв'язання, проте з іншими вимогами (наявність директивних термінів).

ПОСТАНОВКА МОДЕЛІ ЗАДАЧІ РОЗКЛАДУ РОБОТИ ПРИЛАДУ

Розглянемо модель задачі складання розкладу для одного приладу, яка одержана з [4, 5] модифікацією критерію оптимізації.

Задача 2. Нехай маємо множину завдань з номерами $J_k = \{1, 2, ..., k\}$ для одного приладу. Завдання з номером i має час очікування r_i, коли воно не доступне для обробки, $r_i \geq 0$. Тобто, відома мультимножина $R = (r_1, ..., r_k)$. Час p_i обробки завдання з номером i є однаковим для всіх завдань – $p_i = 1$, вага всіх завдань теж є однаковою – $w_i = 1$. Необхідно визначити розклад, на якому буде досягатися мінімальний час обслуговування всіх завдань.

Тоді, очевидно, кожен допустимий розв'язок такої задачі є впорядкованою k-вибіркою з множини R, тобто елементом загальної множини переставлень $E_{kn}(R)$ [6]:

$$x \in (x_1, ..., x_k) \in E_{kn}(R),$$

де n – кількість різних елементів в R, а x_i – час очікування завдання, що виконується i-тим.

Часом початку виконання завдання, що виконується першим, є $y_1 = x_1$, часом його завершення – $y_1 + 1$.

Часом початку виконання завдання, що виконується другим, є максимальне значення із x_2 та $y_1 + 1$, тобто $y_2 = \max\{x_2, y_1 + 1\}$, а часом закінчення – $y_2 + 1$.

Аналогічно часом початку виконання завдання, що виконується k-тим, є $y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\}$, часом завершення – $y_k + 1$.

Маємо цільову функцію, яка мінімізує час завершення обслуговування $y_k + 1$, що рівносильне мінімізації часу початку останнього завдання:

$$y_k(x) = y_k = \max\{x_k, y_{k-1} + 1\} \to \min$$

за умови виконання наступних співвідношень:

$$y_1 = x_1;$$

$$y_2 = \max\{x_2, y_1 + 1\};$$

$$\ldots$$

$$y_i = \max\{x_i, y_{i-1} + 1\};$$

$$\forall\ i \in J_k \setminus \{1\}$$

та за умови $x \in (x_1, \ldots, x_k) \in E_{kn}(R)$.

ПОЛІНОМІАЛЬНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Покажемо, що поставлену задачу можна розв'язати поліноміальним алгоритмом.

Алгоритм одержання одного із можливих оптимальних розв'язків задачі визначає таке твердження.

Твердження 1. Оптимальним розв'язком задачі 2 знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією часу завершення виконання всіх завдань є упорядкування завдань згідно з упорядкуванням по неспаданню елементів переставлень $X = (x_1, \ldots, x_k) \in E_{kn}(R)$,

$$r_{i_1} \le r_{i_2} \le \ldots \le r_{i_k}, \tag{1}$$

де $R = (r_1, \ldots, r_k)$ – мультимножина часів очікування завдань.

Доведення. Кожне переставлення номерів завдань визначається перестановками елементів $r_i \in R$. Позначимо через σ перестановку номерів завдань, що визначають розклад роботи приладу, який задовольняє умову (1) твердження. Припустимо, що існує інше переставлення номерів завдань σ', що задає інший допустимий розв'язок $X' = (x'_1, \ldots, x'_k) \in E_{kn}(R)$. Доведемо, що цільова функція, утворена розв'язком σ', буде не менше цільової функції розв'язку σ.

Нехай на деякому кроці розв'язання задачі виконується така нерівність $y_j < y'_j$ (при умові, що попередні значення цільових функцій були рівними, тобто $y_{j-1} = y'_{j-1}$). Це можливо внаслідок того, що елементи розв'язку X впорядковані по неспаданню, а X' довільно. Тоді з нерівності $y_j = \max\{x_j, y_{j-1} + 1\} < y'_j = \max\{x'_j, y'_{j-1} + 1\}$ випливає, що $x_j < x'_j$.

Тоді можливі такі випадки утворення y_{j+1} та y'_{j+1}:

1) $y_{j+1} = \max\left\{x_{j+1}, y_j + 1\right\} = x_{j+1}$, $y'_{j+1} = \max\left\{x'_{j+1}, y'_j + 1\right\} = x'_{j+1}$, то із нерівностей $x_{j+1} \geq y_j + 1 > x_j$, $x'_{j+1} \geq y'_j + 1 > x'_j$ внаслідок того, що $x'_{j+1} > x_j$ та умови впорядкування елементів розв'язку σ випливає така нерівність $x_{j+1} \leq x'_{j+1}$, тобто $y_{j+1} \leq y'_{j+1}$;

2) $y_{j+1} = \max\left\{x_{j+1}, y_j + 1\right\} = x_{j+1}$, $y'_{j+1} = \max\left\{x'_{j+1}, y'_j + 1\right\} = y'_j + 1$. Аналогічно до попереднього випадку, внаслідок того, що $x_j < x'_j \Rightarrow x_{j+1} \leq x'_j < y'_j + 1$, оскільки елементи розв'язку σ впорядковані по неспаданню. Тобто $y_{j+1} \leq y'_{j+1}$;

3) $y_{j+1} = \max\left\{x_{j+1}, y_j + 1\right\} = y_j + 1$, $y'_{j+1} = \max\left\{x'_{j+1}, y'_j + 1\right\} = x'_{j+1}$, то з нерівності $x_{j+1} \leq y_j + 1 < y'_j + 1 \leq x'_{j+1}$ випливає, що $y_{j+1} < y'_{j+1}$;

4) 4) $y_{j+1} = \max\left\{x_{j+1}, y_j + 1\right\} = y_j + 1$, $y'_{j+1} = \max\left\{x'_{j+1}, y'_j + 1\right\} = y'_j + 1$, то $y_{j+1} < y'_{j+1}$.

Тобто, кожне значення y_{j+1} для розв'язку σ буде меншим або рівним цільовій функції розв'язку σ', що означає цей факт і для y_k, тобто для значення цільової функції.

Теорему доведено.

Розглянемо приклад.

Нехай маємо множину завдань J_6 та мультимножину мінімально можливого початку обробки завдань $R = (5,2,1,2,7,3)$. Зручно розглядати узагальнену підстановку $\rho = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6 \\ 5,2,1,2,7,3 \end{pmatrix}$, де в першому рядку номер, а в другому R.

Упорядкуємо елементи другого рядка ρ за не спаданням, відношення підстановки ρ' має вигляд: $\begin{pmatrix} 3,2,4,6,1,5 \\ 1,2,2,3,5,7 \end{pmatrix}$. Згідно твердження 1, оптимальним є розв'язок $X = (x_1,...,x_k)$, де $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, $x_6 = 7$. Маємо послідовність виконання завдань, що задається рядком ρ': $(3,2,4,6,1,5)$.

$$y_1 = x_1 = 1;$$

$$y_2 = \max\left\{x_2, y_1 + 1\right\} = \max\left\{2, 1+1\right\} = 2;$$

$$y_3 = \max\left\{x_3, y_2 + 1\right\} = \max\left\{2, 2+1\right\} = 3;$$

$$y_4 = \max\left\{x_4, y_3 + 1\right\} = \max\left\{3, 3+1\right\} = 4;$$

$$y_5 = \max\left\{x_5, y_4 + 1\right\} = \max\left\{5, 4+1\right\} = 5;$$

$$y_6 = \max\left\{x_6, y_5 + 1\right\} = \max\left\{7, 5+1\right\} = 7;$$

Тобто значення цільової функції є $y_6 + 1 = 8$.

Зауваження. Є ще одна послідовність завдань, яка задається рядком ρ'': $(3,2,6,4,1,5)$ при якій цільова функція матиме значення $y_6 + 1 = 8$.

Твердження 2. Алгоритм, що задає твердження 1 є поліноміальним.

Доведення випливає з того, що для одержання оптимального переставлення X з властивістю (1) достатньо впорядкувати елементи *R*. Це, як відомо (див., наприклад, [8]), можна здійснити за $O(n \cdot \log n)$ операцій, тобто за поліноміальний час.

ВИСНОВКИ

У статті отримано поліноміальний спосіб розв'язання однієї задачі розкладу для приладу зі сталими тривалістю виконання та вагою завдань, з заданими значеннями часу очікування виконання завдань r_i за критерієм мінімізації часу виконання всіх завдань. Як перспективу подальших досліджень можна розглядати деякі узагальнення цієї задачі, зокрема, коли w_i, p_i різні для різних завдань, та (або) мінімізацію кількості переривань усіх завдань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коффман Э. Г. Теория расписаний и вычислительные машины / Э. Г. Коффман. — М. : Наука, 1984. — 336 с.
2. Танаев В. С. Введение в теорию расписаний / С. В. Танаев, В. В. Шкурба. — М. : Наука, 1975. — 257 с.
3. Згуровский М. З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами : Монография / М. З. Згуровский, А. А. Павлов. — К. : Наукова думка, 2010. — 573 с.
4. Шерешик Н. Ю. Полиэдральные свойства задачи обслуживания различных требований одним прибором / Н. Ю. Шерешик // Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». — Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2014. — С. 96.
5. Peter Brucker, Sigrid Knust, "Complexity Results for Scheduling Problems" URL : www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class.
6. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Інститут систем досліджень освіти, 1993. — 188 с. — Режим доступу : http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487.
7. Лазарев А. А. Решение NP-трудной задачи теории расписаний минимизации суммарного запаздывания / А. А. Лазарев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — С. 1087-1098.
8. Кнут Д. Искусство программирования: Т. 3. Сортировка и поиск / Д. Кнут. — М. : Изд. дом «Вильямс», 2000. — 824 с.

REFERENCES

1. Koffman, E.G. (1984), *Teoriya raspisaniy i vyichislitelnyie mashinyi* [Computer and job-shop scheduling theory], Nauka, Moskow, Russia.
2. Tanaev, V.S. and Shkurba, V.V. (1975), *Vvedenie v teoriyu raspisaniy* [Introduction to Scheduling], Nauka, Moskow, Russia.
3. Zgurovskiy, M.Z. and Pavlov, A.A. (2010), *Prinyatie resheniy v setevyih sistemah s ogranichennyimi resursami: monograph* [Decision making in networked systems with limited resources], Naukovadumka, Kiev, Ukraine.
4. Shereshik, N.YU. (2014), Poliedralnyie svoystva zadachi obsluzhivaniya razlichnyih trebovaniy odnim priborom. *XVI Baykalskoy mezhdunarodnoy shkolyi-seminara "Metody ioptimizatsii i ihprilozheniya"* [Baikal International School-Seminar "Optimization Methods and their Applications"], Irkutsk, ISEM SO RAN, p. 96.
5. Peter Brucker, Sigrid Knust, "Complexity Results for Scheduling Problems", URL: www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class.

6. Stoyan, YU.G. and Emets, O.O. (1993), *Teoriya i metodi evklidovoy I kombinatornoyi optimizatsii* [Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization], Institute of Education Research, Kiev, Ukraine.
7. Lazarev, A.A. (2007), "Solution of NP-hard problem of scheduling to minimize total tardiness", *Zhurnal vyichislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, pp.1087-1098.
8. Knut, D. (2000), *Iskusstvo programmirovaniya* [Art of Computer Programming: Vol. 3. Sorting and Searching], Moskow, Russia.

УДК 539.3

ІМПУЛЬСНЕ ЗБУДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ РЕЗЕРВУАРА З РІДИНОЮ НА РУХОМОМУ МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ

Лимарченко О. С., д. т. н., професор, Мухіна В. В., магістр

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, 01601, Україна

comentsno@rambler.ru

Розглянуто задачу про сумісний рух системи, що складається з рідини з вільною поверхнею і резервуара на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу. Досліджені особливості розвитку динамічних процесів і прояву нелінійних властивостей системи при дії короткочасних силових навантажень. Вивчено характеристики розвинення перехідного процесу і фактори, від яких залежить його тривалість.
Ключові слова: сумісний рух резервуара з рідиною, варіаційний метод, кутовий рух резервуара, вільна поверхня рідини.

ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ НА ПОДВИЖНОМ МАЯТНИКОВОМ ПОДВЕСЕ

Лимарченко О. С., д. т. н., профессор, Мухина В. В., магистр

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко,
ул. Владимирская, 64/13, г. Киев, 01601, Украина

comentsno@rambler.ru

Рассмотрена задача о совместном движении системы, состоящей из жидкости со свободной поверхностью и резервуара на маятниковом подвесе с подвижной точкой подвеса. Исследованы особенности развития динамических процессов и проявления нелинейных свойств в системе при действии кратковременных силовых нагрузок. Изучены характеристики развития переходного процесса и факторы, от которых зависит его длительность.
Ключевые слова: совместное движение резервуара с жидкостью, вариационный метод, угловое движение резервуара, свободная поверхность жидкости.

PULSE EXITED VIBRATION OF TANK WITH LIQUID ON PENDULUM SUSPENSION

Limarchenko O. S., D. of Technical Science, Professor, Mukhina V. V., Magister

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
st. Vladimir, 64/13, Kyiv, 01601, Ukraine

comentsno@rambler.ru

It is known that problems about combined motion of reservoirs with liquid represent significant part of investigation in the field of wave motions of liquid, which have great theoretical and applied significance. Engineering structures, including tanks partially filled by a liquid, are widely used in various areas of technology. Importance of such problems in applied aspect is caused by the fact that in the case of great relative mass of liquid its wave motion can influence