

3. Goltsova, M.V. and Lyubimenko, E.N. (2011), "Features of formation of a gradient alloy palladium-hydrogen and form-changing palladium plate in a process of unilateral hydrogen saturation", *Fizika metallor i metallovedenie*, vol. 112, no. 4, pp. 393-403.
4. Goltsova, M.V. and Lyubimenko, E.N. (2012), "Form-changing of palladium plate in a process of unilateral hydrogen saturation: the influence of the growth rate of hydrogen gas pressure", *Fizika metallor i metallovedenie*, vol. 113, no. 11, pp. 1073-1079.
5. Lyubimenko, E.N. (2012), "Form-changing of palladium plate induced by hydrogen", *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov*, vol. 48, no. 1, pp. 83-88.
6. Goltsov, V.A. (2001), Fundamentals of hydrogen Treatment of materials, *Progress in Hydrogen Treatment of Materials*, pp. 3-36.
7. Zhirov, G.I. and Goltsova, M.V. (2002), "Experimental confirmation of the phenomenon of thermo-elastic-baro-diffusion-equilibrium phases convert in hydride transformation", *Fizika metallor i metallovedenie*, vol. 94, no. 1, pp. 70-74.
8. Glukhova, Zh.L., Goltsov, V.A., Shchegoleva, T.A. and Lyubimenko, E.N. (2009), "Hydrogen concentration stresses: thermodynamic description and mathematical modeling", *Metallofizika i noveishie tekhnologii*, vol. 31, no. 3, pp. 333-342.
9. Lewis, F.A. (2001), "Uphill Hydrogen Diffusion Effects: Nature and Manifestations", *Progress in Hydrogen Treatment of Materials*, pp. 147-161.
10. Lewis, F.A. Kandasamy, K. and Tong, X.Q. (2001), "Palladium- and Platinum-Hydrogen", *Hydrogen In Metal System II*, vol. 73-75, pp. 207-517.

УДК 519.876.5

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТОЛСТЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛИТ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Овский А. Г.

*Запорожский национальный университет,  
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

mastergiver@yandex.ua

В работе охарактеризован препроцессор для решения трехмерных и двумерных задач теории упругости для многослойных пластин, плит с заданными начальными и граничными условиями. Для разработки препроцессора используется система компьютерной математики Maxima, которая эффективно производит вычисления с символическими данными в задачах. Процессор осуществляет перевод символического дифференциального решения в формульное без производных и дифференциалов. Из формульного решения в результате подстановки данных получается числовое решение, удобное для визуализации результатов задач. На базе разработанного препроцессора построены математические модели для решения задач теории упругости в двумерной и трехмерной постановках. В частности в статье построены модели двумерных многослойных плит. Решения трехмерных задач не приведены в силу большого объема формульной информации полученного результата. Препроцессор осуществляет вывод символического решения в форме дифференциальных операторов, записанных с помощью упрощенной символики. В статье приведены алгоритмы автоматизации аналитических методов, с помощью которых осуществляется предварительный вывод препроцессором символического дифференциального решения общей задачи статической теории упругости для многослойных тел. Алгоритмы, с помощью которых строятся модели, носят общий характер и могут быть применены для любой из систем компьютерной математики.

*Ключевые слова: система компьютерной математики (СКМ), автоматизация, многослойные плиты, препроцессор, символическое решение.*

## МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТОВСТИХ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ У СИСТЕМАХ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Овський О. Г.

*Запорізький національний університет,  
бул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

mastergiver@yandex.ua

У роботі охарактеризовано препроцесор для розв'язання тривимірних і двовимірних задач теорії пружності для багатошарових пластин, плит із заданими початковими і граничними умовами. Для розробки препроцесору використовується система комп'ютерної математики Maxima, яка ефективно здійснює обчислення з масивами даних у задачах. Процесор здійснює перетворення символічного диференційного розв'язку у формульне без похідних і диференціалів. Із формульного розв'язку в результаті підстановки даних знаходиться числовий розв'язок, зручний для візуалізації результатів задач. На базі розробленого препроцесора побудовані математичні моделі для розв'язку задач теорії пружності в двовимірній і тривимірній постановках. Зокрема, в статті побудовані моделі двовимірних багатошарових плит. Розв'язання тривимірних задач не наведені, оскільки мають великий обсяг формульної інформації отриманого результату. Препроцесор здійснює виведення символічного розв'язку у формі диференційних операторів, записаних за допомогою спрощеної символіки. У статті наведені алгоритми автоматизації аналітичних методів, за допомогою яких здійснюється попереднє виведення препроцесором символічного розв'язку диференційного розв'язку загальної задачі статичної теорії пружності для багатошарових тіл. Алгоритми, за допомогою яких будуються моделі, носять загальний характер і можуть бути застосовані для будь-якої з систем комп'ютерної математики.

*Ключові слова: система комп'ютерної математики (СКМ), автоматизація, багатошарові плити, препроцесор, символічний розв'язок.*

## MODELLING FLAT PROBLEMS THE ELASTICITY'S THEORY OF THICK MULTILAYERED PLATES IN SYSTEMS OF COMPUTER MATHEMATICS

Ovsky O. G.

*Zaporizhzhue National University,  
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

mastergiver@yandex.ua

In work the preprocessor for a solution of three-dimensional and two-dimensional problems of the elasticity's theory for multilayered plates, plates with set initial and boundary conditions is described. The processor chooses system of computer mathematics Maxima which effectively makes evaluations with the symbolical data in problems. Examples of preprocessor's work - completely constructed mathematical models of solutions of problems of the elasticity's theory in two-dimensional and three-dimensional statements. In paper models of two-dimensional multilayered problems are considered. Three-dimensional problems are not reduced owing to great volume of the formulas information of the received outcome. The preprocessor carries out a conclusion of a symbolical solution in the form of the differential operators noted by means of simplified symbolic. The processor translates a symbolical differential solution in formulas without derivatives and differentials. From a formulas solution as a result of substitution of the data the numerical solution convenient for visualization of outcomes of problems turns out. In paper automation's algorithms of analytical methods with which help the preliminary conclusion by a preprocessor of a symbolical differential solution of the general problem of the static elasticity's theory for multilayered skew fields is carried out are reduced. Is carried out are reduced. Algorithms, with which help models are under construction, have the general character and can be applied to any of systems of computer mathematics.

*Key words: computer mathematics system (CMS), automation, multilayered plates, preprocessor, symbolical solution*

Несмотря на то, что в настоящее время численные методы решения задач теории упругости интенсивно развиваются, не теряют своей актуальности и аналитические методы, которые позволяют получать более обобщенные и достоверные результаты. Применению аналитических методов в математическом моделировании задач механики на ЭВМ способствует современное развитие систем компьютерной математики (СКМ). СКМ обладают достаточно развитыми средствами решения аналитических формульных задач. Поэтому большинство из них применяется в алгебре и математическом анализе. При математическом моделировании сложных задач механики вычислительных инструментов СКМ начинает не хватать. Следовательно, необходимо их программно дорабатывать. В этом

направлении получены фундаментальные результаты такими учеными: В.З. Аладьевым, Н.Н. Васильевым, В.П. Дьяконовым, Г.Б. Ефимовым, М.В. Грошевой, Е.Ю. Зуевой, В.В. Ивановым, Д.М. Климовым, В.А. Шуригиным. Актуальным становится новый подход в математическом моделировании. Он основан на интеграции в СКМ новых алгоритмов автоматизации аналитических методов. Разработки новых программных продуктов на СКМ очерчивают новые перспективы использования математического моделирования и открывают путь к развитию новых аппаратно-программных технологий, которые позволяют использовать в математическом моделировании сложные аналитические вычисления. Таким образом, работа посвящена созданию нового программного продукта на системах компьютерной математики.

Созданная автором инструментальная система имеет две реализации в виде программных библиотек: первая для системы компьютерной математики Maple и вторая – для Maxima. В статье охарактеризован препроцессор инструментальной системы для решения двумерных и трехмерных задач теории упругости. В качестве примеров работы системы выбраны плоские задачи теории упругости для многослойных толстых плит. Задачи решаются методом начальных функций В.З. Власова [1].

Вопросами применения теории В.З. Власова для решения задач теории упругости занимались такие ученые: Г.Н. Ширунов, А.С. Малиев, В.В. Власов, А.Г. Агарев, В.А. Толоч и т.д.

Вывод символического дифференциального решения осуществляет препроцессор инструментальной системы. Дифференциальное решение преобразуется системой к формульному в зависимости от вида начальных функций (тригонометрические ряды, интегралы для полуплоскости). Ниже приведены постановки плоских модельных задач теории упругости для многослойных толстых плит, и основные аналитические методы их решения, которые полностью автоматизированы в разработанной автором системе.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается толстая плита, состоящая из ряда горизонтальных слоев с различными упругими характеристиками. Толщина всей плиты  $h$ , толщины и упругие постоянные слоев –  $h_m, \nu_m, G_m$ , где  $m$  – номер слоя.

$$h = \sum_m h_m. \quad (1)$$

Предположим, что при переходе через плоскость контакта слоев векторы перемещений и напряжений изменяются непрерывно. Толщины слоев при деформации остаются неизменными. В целях сокращения вводятся для искомых величин перемещений и напряжений  $u, \nu, \tau_{xy}, \sigma_y, \sigma_x$  новые обозначения:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) = U_1, & \quad \nu(x, y) = U_2, \\ \tau_{xy}(x, y) = U_3, & \quad \sigma_y(x, y) = U_4, \quad \sigma_x(x, y) = U_5. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Начальные функции  $u_0(x, y) = U_1^0, \quad \nu_0(x, y) = U_2^0, \quad \tau_{xy}^0(x, y) = X_0(x, y) = U_3^0, \quad \sigma_y^0(x, y) = Y_0(x, y) = U_4^0.$

### РЕШЕНИЕ

В новых обозначениях и при отсутствии массовых сил решения в случае плоской деформации представлены в виде:

$$U_i = \sum_{j=1}^4 L_{ij}(y)U_j^0, \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

где  $L_{ij}(y)$  – линейные дифференциальные операторы, зависящие от  $y$  и содержащие производные по переменной  $x$ . В их форме представляется общее дифференциальное решение в виде рядов Маклорена уравнений двумерной теории упругости для плоской деформации:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \\ \sigma_x = \frac{2G}{1-2\nu} \left( (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_y = \frac{2G}{1-2\nu} \left( (1-\nu) \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{xy} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (4)$$

где  $G$  – модуль сдвига. Для того, чтобы не проводить сложные вычисления со сложными символическими рядами разложений Маклорена, авторами работы [6] был разработан способ нахождения решения подстановкой решения бигармонического дифференциального уравнения [3]:

$$\nabla \nabla U = 0, \quad (5)$$

в форме:

$$U_i = u_0^i(x) \cos(\alpha y) + u_1^i(x) \sin(\alpha y) + u_2^i(x) y \cos(\alpha y) + u_3^i(x) y \sin(\alpha y), \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (6)$$

Подстановкой (6) в (4) после проведения операций дифференцирования и нахождения переменных  $u_0^i(x)$ ,  $u_1^i(x)$ ,  $u_2^i(x)$ ,  $u_3^i(x)$  препроцессором системы выводится дифференциальное решение уравнений теории упругости в двумерной постановке, потом разбивается на линейные дифференциальные операторы. Результат работы препроцессора на рис. 1.

$$L_{uu} = \frac{1}{2} \frac{\alpha y \sin(\alpha y) + 2 \cos(\alpha y) \nu - 2 \cos(\alpha y)}{-1 + \nu} \quad L_{uv} = -\frac{1}{2} \frac{-y \cos(\alpha y) \alpha + 2 \sin(\alpha y) \nu - \sin(\alpha y)}{-1 + \nu}$$

$$L_{ux} = \frac{1}{4} \frac{-y \cos(\alpha y) \alpha + 4 \sin(\alpha y) \nu - 3 \sin(\alpha y)}{\alpha (-1 + \nu)} \quad L_{uy} = \frac{1}{4} \frac{y \sin(\alpha y)}{-1 + \nu}$$

$$L_{vu} = \frac{1}{2} \frac{y \cos(\alpha y) \alpha + 2 \sin(\alpha y) \nu - \sin(\alpha y)}{-1 + \nu} \quad L_{vv} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha y \sin(\alpha y) - 2 \cos(\alpha y) \nu + 2 \cos(\alpha y)}{-1 + \nu}$$

$$L_{vx} = \frac{1}{4} \frac{y \sin(\alpha y)}{-1 + \nu} \quad L_{vy} = \frac{1}{4} \frac{y \cos(\alpha y) \alpha + 4 \sin(\alpha y) \nu - 3 \sin(\alpha y)}{\alpha (-1 + \nu)}$$

$$\begin{aligned}
L_{xu} &= \frac{\alpha (y \cos(\alpha y) \alpha + \sin(\alpha y))}{-1 + \nu} & L_{xv} &= -\frac{\alpha^2 y \sin(\alpha y)}{-1 + \nu} \\
L_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{\alpha y \sin(\alpha y) + 2 \cos(\alpha y) \nu - 2 \cos(\alpha y)}{-1 + \nu} & L_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{y \cos(\alpha y) \alpha + 2 \sin(\alpha y) \nu - \sin(\alpha y)}{-1 + \nu} \\
L_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{y \cos(\alpha y) \alpha + 2 \sin(\alpha y) \nu - \sin(\alpha y)}{-1 + \nu} & L_{yv} &= \frac{(-y \cos(\alpha y) \alpha + \sin(\alpha y)) \alpha}{-1 + \nu} \\
L_{yx} &= -\frac{1}{2} \frac{-y \cos(\alpha y) \alpha + 2 \sin(\alpha y) \nu - \sin(\alpha y)}{-1 + \nu} \\
L_{yy} &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha y \sin(\alpha y) - 2 \cos(\alpha y) \nu + 2 \cos(\alpha y)}{-1 + \nu}
\end{aligned}$$

Рис. 1. Линейные дифференциальные операторы решения двумерных уравнений теории упругости для плоской деформации

В решении рис. 1 функции  $\cos(\alpha y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n} (\alpha)^{2n}}{(2n)!}$  и  $\sin(\alpha y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1} (\alpha)^{2n-1}}{(2n-1)!}$  – трансцендентные операционные формулы, которые разлагаются в бесконечные операционные ряды Маклорена, а  $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$  – производная в символьном виде. В результате

выбора конечного числа членов в разложениях Маклорена для трансцендентных операционных формул выводятся приближенные теории для пластин, плит [6]. На этом этапе доказывается общность и точность общего аналитического решения В.З. Власова.

Полученное решение для трехмерной задачи теории упругости сопоставлялось с решением задачи А.Г. Горшковым [2].

Для удобства вывода аналитических решений операторы рис. 1 переписываются в матричной форме, причем  $L_{uu}$  соответствует  $L_{11}$ , а  $L_{uv} = L_{12}$ ,  $L_{ux} = L_{13}$ ,  $L_{uy} = L_{14}$ ,  $L_{vu} = L_{21}$ ,  $L_{vv} = L_{22}$  и т.д. матрица заполняется построчно. Заменой  $\nu = \nu_1$ ,  $G = G_1$ ,  $y \leq h_1$  получают формулы, определяющие перемещения и напряжения первого слоя плиты. Для определения напряжений и перемещений второго слоя начальными функциями будут выступать напряжения и перемещения в области контакта, т.е. выражения (3) при  $y = h_1$ . Заменяя в формуле (7)  $\nu = \nu_2$ ,  $G = G_2$  и, подставляя в нее выражения для начальных функций второго слоя выводятся формулы, определяющие перемещения и напряжения во втором слое плиты:

$$U_i = \sum_{j=1}^4 L_{ij}^*(y) U_j^0 \quad (i=2), \quad (7)$$

где

$$L_{ij}^*(y) = \sum_{k=1}^4 L_{ik}^{(2)}(y) L_{kj}^{(1)}(h_1) \quad (h_1 \leq y \leq h_2). \quad (8)$$

В выражении (8) через  $L_{kj}^{(1)}(h_1)$  и  $L_{ik}^{(2)}(y)$  обозначены операторы  $L_{ij}$  соотношений (3), взятые с упругими характеристиками первого слоя при  $y = h_1$  и с упругими характеристиками второго слоя при произвольном значении  $y$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} L_{kj}^{(1)}(h_1) &= L_{kj}(v_1, G_1, h_1), \\ L_{ik}^{(2)}(y) &= L_{ik}(v_2, G_2, y) \quad (h_1 \leq y \leq h_2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Исходя из свойств, доказанных в работе [5] вытекает, что матрица  $\|L_{ij}^*(y)\|$  определяется формально как произведение матрицы  $\|L_{ik}^{(2)}(y)\|$  на матрицу  $L_{kj}^{(1)}(h_1)$ . При этом в матрицу  $\|L_{ij}^*(y)\|$  будут входить начальные функции, относящиеся к прямой  $y=0$ . Аналогичным образом матрица  $\|L_{ij}^*(y)\|$  для перемещений и напряжений  $m$ -го слоя плиты формально представляет собой произведение матриц  $\|L_{ij}^{(k)}(h_k)\|$  ( $k=1, 2, \dots, m-1$ ) и  $\|L_{ij}^{(m)}(y)\|$   $h_{m-1} \leq y \leq h_m$

$$U_i = \sum_{j=1}^4 L_{ij}^*(y) U_j^0 \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (10)$$

Выражение (8) содержит только две начальные функции из четырех, поскольку две начальные функции определяются непосредственно из граничных условий, заданных на прямой  $y=0$ . При помощи (3) и граничных условий, заданных на прямой  $y=h$ , определяются оставшиеся начальные функции через систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами бесконечно высокого порядка.

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Рассматривается класс модельных задач, для которого на поперечных краях плиты при  $x=0$  и  $x=l$  заданы граничные условия. Начальные функции представлены в виде рядов с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} U_1^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^0 \sin \alpha_n x, & U_2^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}^0 \cos \alpha_n x, \\ U_3^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{3n}^0 \sin \alpha_n x, & U_4^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{4n}^0 \cos \alpha_n x, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ .

Разложениям (11) на краях плиты  $x=0$  и  $x=l$  отвечают следующие условия:

$$U_1 = U_3 = 0 \quad (Gu = \tau_{xy} = 0). \quad (12)$$

Рассмотрим пример заданных условий: плита, опирающаяся на бесконечное количество одинаковых опор, поставленных на равных расстояниях друг от друга, при действии нагрузки, симметричной относительно концов каждого пролета. Представление решения в форме (11) соответствует решению в форме Рибьера. Замена в рядах (3) синусов на косинусы, а косинусов на синусы даст решение в форме Файлона, отвечающее граничным условиям на краях:

$$U_2 = U_5 = 0. \quad (13)$$

Подставляются разложения (11) в формулы (8). Разработанный препроцессор производит операции упрощения и перевода дифференциальных операторов  $L_{ij}$  с символического представления в форму числовых рядов и сворачивает получаемые результаты. Правила обработки результатов зависят от четности операторов и наличия операций умножения и деления в символической записи [7]. Препроцессор работает с двумерными и трехмерными уравнениями теории упругости. Все перемещения в уравнениях заданы в форме  $U = Gu$ ,  $V = Gv$ ,  $W = Gw$ , где  $G$  – модуль сдвига. Двумерные уравнения заданы для плоской

деформации, для перехода в напряженно-деформированное состояние необходимо  $E$  заменить на  $E \frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2}$ , а коэффициент Пуассона заменить на  $\nu \Rightarrow \frac{\nu}{1+\nu}$ .

Результат работы инструментальной системы получается следующим (рис. 2).

$$\begin{aligned}
 U_{1,1} &= \frac{U_{10nm} \sin(anx)(any \sinh(any) + (2\nu-2) \cosh(any))}{2(\nu-1)G} + \\
 & \frac{U_{20nm} \sin(anx)((-2\nu-1) \sinh(any) - any \cosh(any))}{2(\nu-1)G} + \\
 & \frac{U_{30nm} \sin(anx)((-3-4\nu) \sinh(any) - any \cosh(any))}{4an(\nu-1)G} + \frac{U_{40nm} \sin(anx)y \sinh(any)}{4(\nu-1)G} \\
 U_{1,2} &= \frac{U_{20nm} \cos(anx)(any \sinh(any) + (2\nu-2) \cosh(any))}{2(\nu-1)G} + \\
 & \frac{U_{10nm} \cos(anx)((2\nu-1) \sinh(any) + any \cosh(any))}{2(\nu-1)G} + \\
 & \frac{U_{40nm} \cos(anx)((3-4\nu) \sinh(any) + any \cosh(any))}{4an(\nu-1)G} + \frac{U_{30nm} \cos(anx)y \sinh(any)}{4(\nu-1)G} \\
 U_{1,3} &= \frac{U_{30nm} \sin(anx)(any \sinh(any) + (2\nu-2) \cosh(any))}{2(\nu-1)} + \\
 & \frac{U_{40nm} \sin(anx)((-1-2\nu) \sinh(any) - any \cosh(any))}{2(\nu-1)} + \frac{an^2 U_{20nm} \sin(anx)y \sinh(any)}{\nu-1} - \\
 & \frac{an U_{10nm} \sin(anx)(any \cosh(any) - \sinh(any))}{\nu-1} \\
 U_{1,4} &= \frac{U_{40nm} \cos(anx)(any \sinh(any) + (2\nu-2) \cosh(any))}{2(\nu-1)} + \\
 & \frac{U_{30nm} \cos(anx)((1-2\nu) \sinh(any) + any \cosh(any))}{2(\nu-1)} + \frac{an^2 U_{10nm} \cos(anx)y \sinh(any)}{\nu-1} + \\
 & \frac{an U_{20nm} \cos(anx)(any \cosh(any) - \sinh(any))}{\nu-1}
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Общее решение двумерной задачи теории упругости для первого слоя на СКМ Maxima

Начальные функции задаются препроцессору в форме:

$U[0,1]:Uo\$$

$U[0,2]:Vo\$$

$U[0,3]:Xo\$$

$U[0,4]:Yo\$$ .

Здесь

$Uo:U_{10nm}*\sin(an*x)\$$

$Vo:U_{20nm}*\cos(an*x)\$$

$Xo:U_{30nm}*\sin(an*x)\$$

$Yo:U_{40nm}*\sin(an*x)\$$

Такая форма записи является наиболее удобной для проведения операций. Далее для первого слоя получаются выражения в форме (рис. 2). Для всех слоев форма записи напряжений и

перемещений в системе будет следующей:  $U[k, i]$ ,  $k$  – номер слоя,  $k=1, 2, \dots, m$ ,  $m$  – количество слоев, а  $i$  – порядковый номер переменной,  $i=1, 2, 3, 4, 5$ .

Формулами (рис. 2) при  $\nu = \nu_1$ ,  $G = G_1$ , характеризуется напряженное и деформированное состояние первого слоя плиты. Коэффициенты  $U1onm$ ,  $U2onm$ ,  $U3onm$ ,  $U4onm$  этих формул представляют собой неизвестные величины, определяемые из граничных условий на прямых  $y=0$  и  $y=h$ .

Подстановкой разложений в форме (11) в выражения (10) получаются формулы для напряжений и перемещений произвольного  $m$ -го слоя, при этом  $u_{1n}^0 \rightarrow U1onm$ ,  $u_{2n}^0 \rightarrow U2onm$ ,  $u_{3n}^0 \rightarrow U3onm$ ,  $u_{4n}^0 \rightarrow U4onm$ .

### ПРИМЕРЫ

Задача о равновесии двухслойной плиты под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки  $p$ , приложенной по верхней плоскости плиты. Ширина опоры плиты –  $2c$ , расстояние между опорами –  $a$ . Вводится система координат, см. рис. 3.

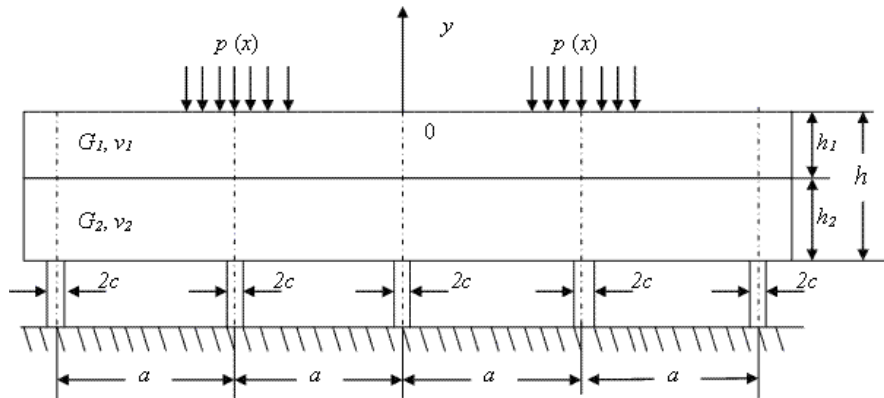


Рис. 3. Двухслойная плита

Предполагается, что в опорах под действием внешней нагрузки возникают одни лишь нормальные напряжения  $U_4$ , распределенные по ширине опоры равномерно. В этом случае эпюра напряжений  $U_4$  при  $y=h$  принимает на опорах постоянное значение  $-\frac{1}{2} \frac{pl}{c}$ , а между опорами равна нулю.

Из граничных условий на верхней, начальной, прямой плиты следует, что

$$U_3^0 = 0, \quad U_4^0 = u_{40}^0 = -p.$$

Нормальная нагрузка, действующая на нижней прямой плиты, в ряд Фурье на отрезке  $(0, l)$ :

$$U_4(x, h) = -p \left( 1 + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{2}{c\alpha_n} \sin \alpha_n c \cos \alpha_n x \right). \quad (14)$$

Удовлетворяя граничным условиям при  $y=h$  и применяя формулы (10) и (14) в результате работы препроцессора получится следующая система двух уравнений. В результате ее решения находятся  $U1onm$ ,  $U2onm$ . После этого результаты подставляются в формулы (10).

Исходные данные для расчета:  $E = 10^7$ ;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $G_1 = 3,8461 \cdot 10^6$ ;  $G_2 = 3,846153 \cdot 10^7$ ;  $a = 20$ ;  $c = 5$ ;  $h_1 = 30,0$ ;  $h_2 = 60,0$ ;  $p = 10^6$ .



Расчет задачи производится в перемещениях и напряжениях. Выбираются два, потом три члена в разложениях (11) и формулах рис. 2. Выбор большего числа членов незначительно влияет на результат. Сходимость аналитического решения многослойной плиты следует из сходимости результата для однослойной плиты [6].

Общий вид графиков для двух членов ряда следующий, рис. 4.

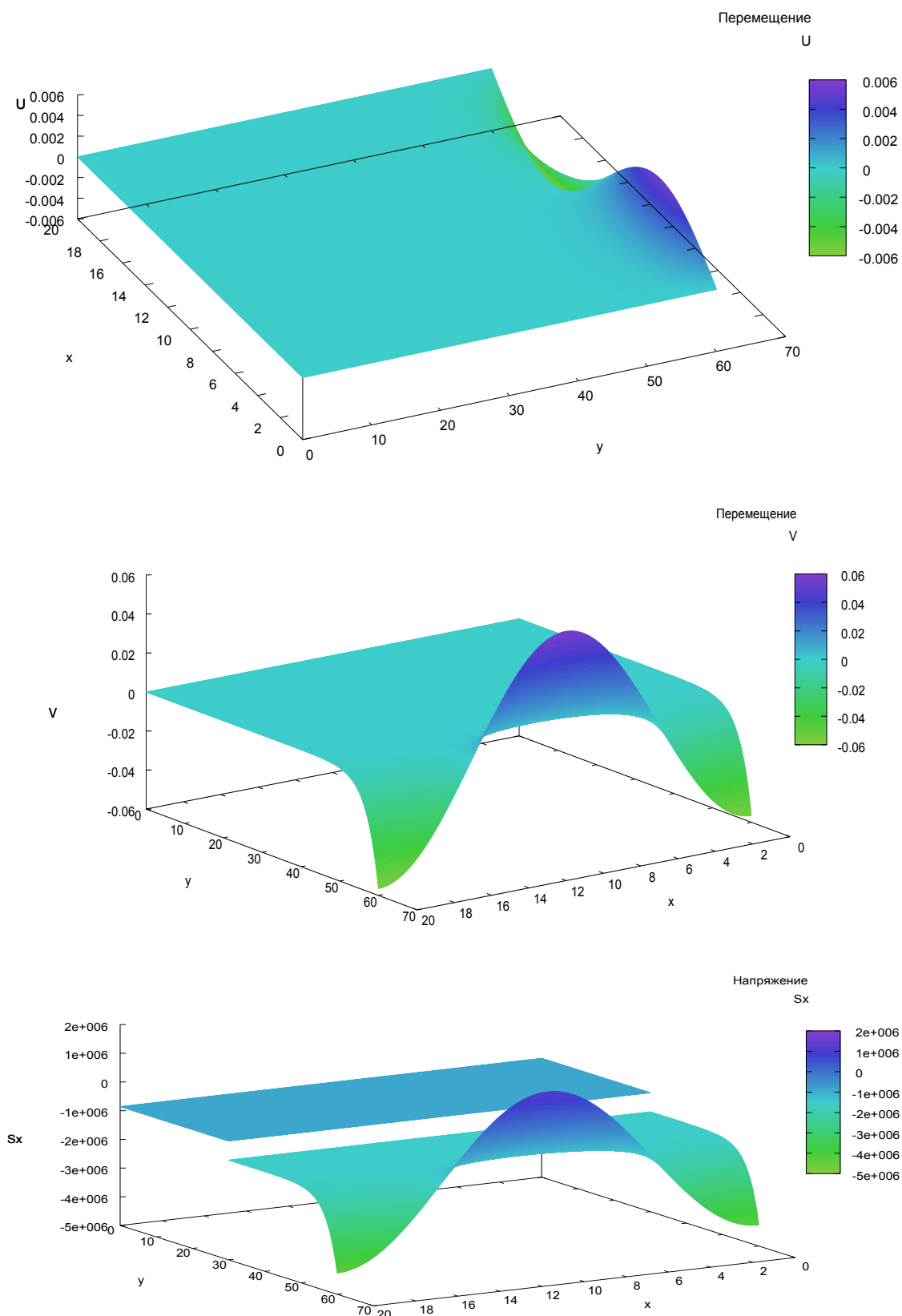
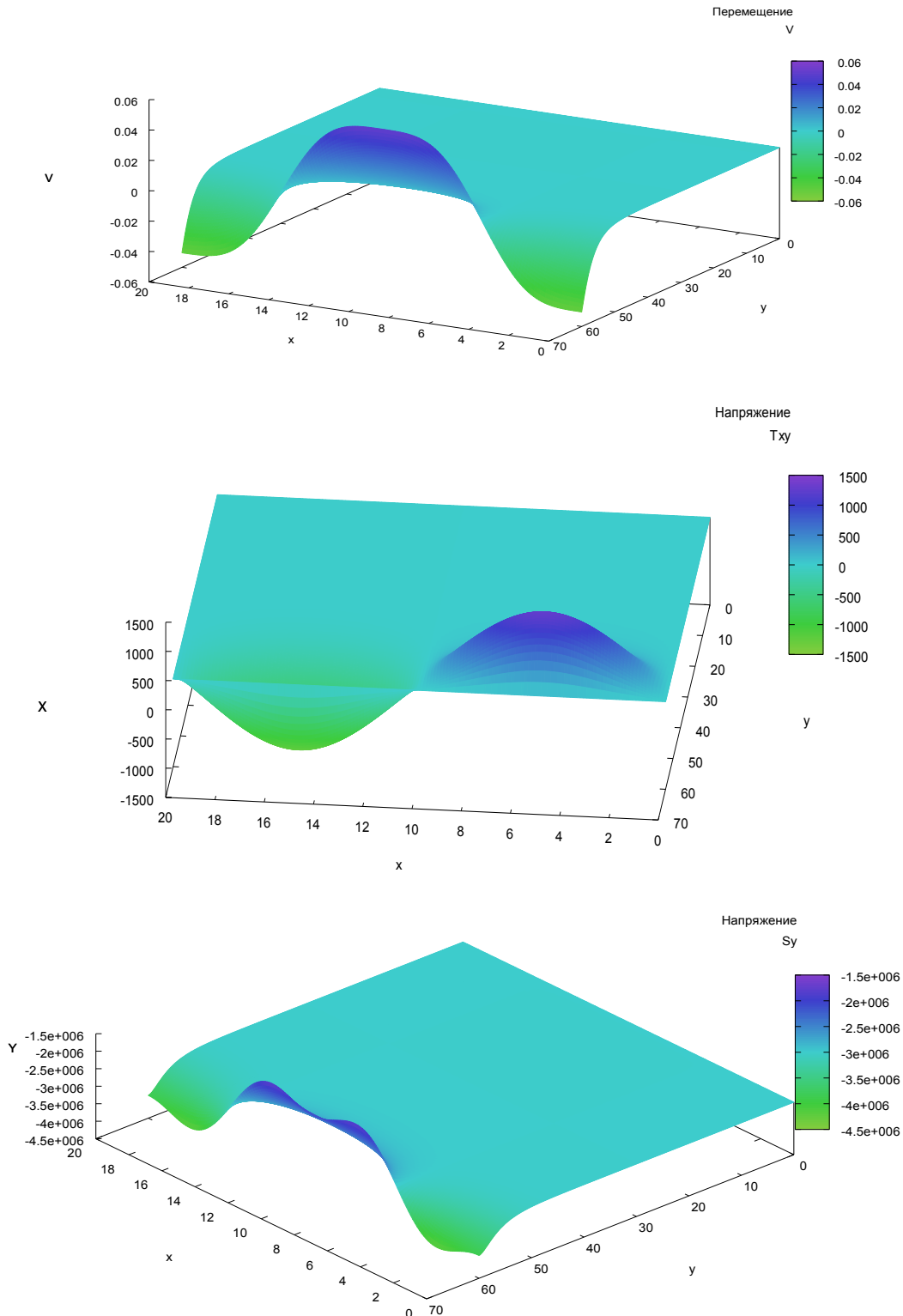


Рис. 4. Графики перемещений и напряжений для двух членов рядов-разложений

Толщина на графиках рис. 4 откладывается по оси  $OY$ . Длина откладывается по оси  $OX$ . По оси  $OZ$  откладываются значения перемещений в  $u$  для первого графика и  $v$  – второго. Первый слой значения по оси  $OY$  от 0 до 30 м, второй от 30 м до 60 м соответственно. В первом слое на графиках отсутствуют перемещения, это связано с граничными условиями задачи (отсутствие горизонтальных перемещений  $u$ , равномерно распределенная нагрузка  $p(x)$  по  $x$  от 0 до  $a$ ). Второй слой деформируется на нижнем краю между столбами по длине  $a$ . Этот процесс фиксируется на графиках вблизи точки 60 м на оси  $OY$ .

Для трех членов рядов, см. рис. 5.



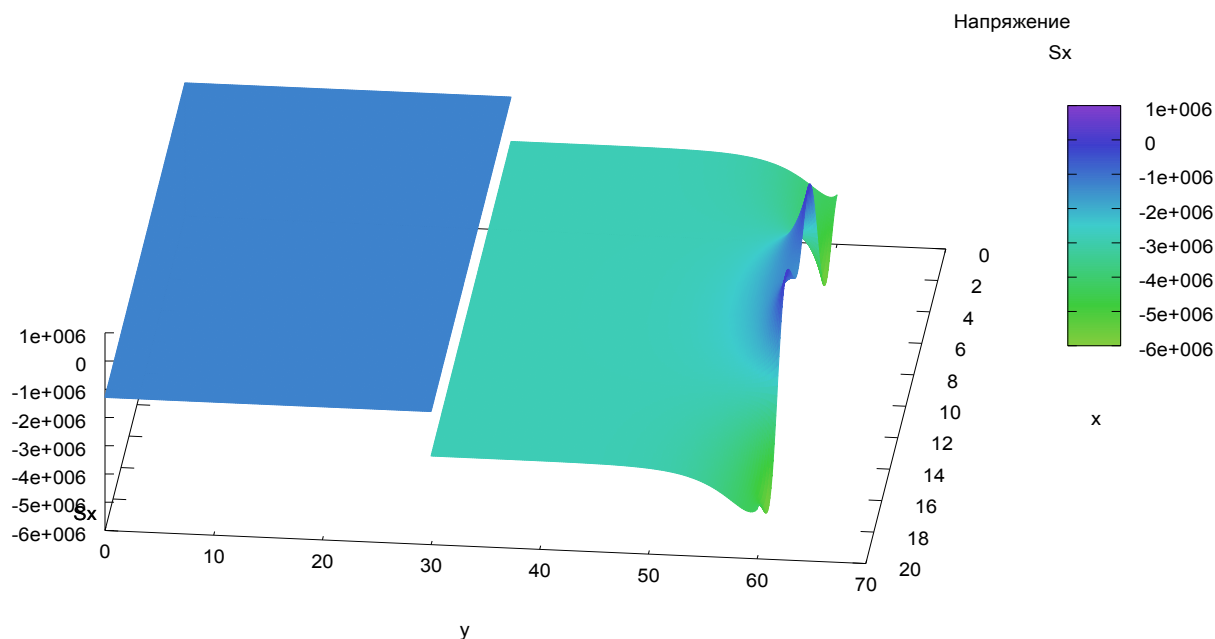


Рис. 5. Графики перемещений и напряжений для трех членов рядов-разложений

Во втором примере предполагается, что плоскость контакта идеально гладкая, в результате чего на этой плоскости касательные напряжения  $U_3 = 0$  равны нулю, а перемещение  $U_1 = Gu$  терпит разрыв непрерывности. При этом перемещение  $U_2 = Gv$  и нормальные напряжения  $U_4 = \sigma_y$  изменяются непрерывно.

Вводится начальная функция нижнего слоя плиты в виде разложения в ряд

$$U_1^{0'}(x) = \sum_{n=2,4,6}^{\infty} u_{1n}^{0'} \sin \alpha_n x. \quad (15)$$

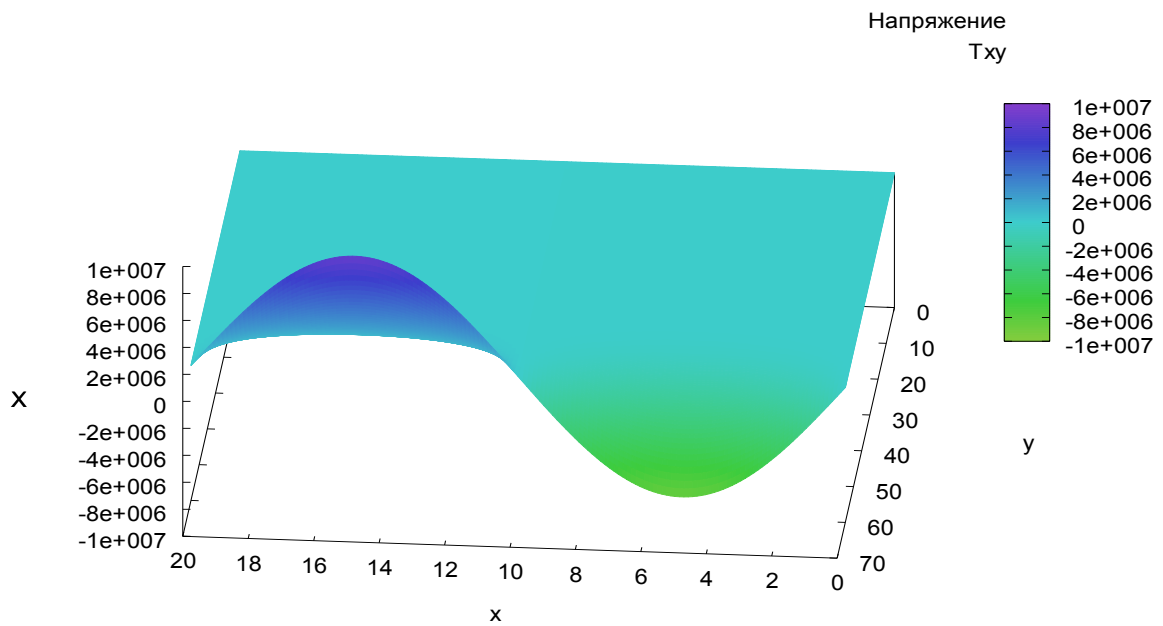
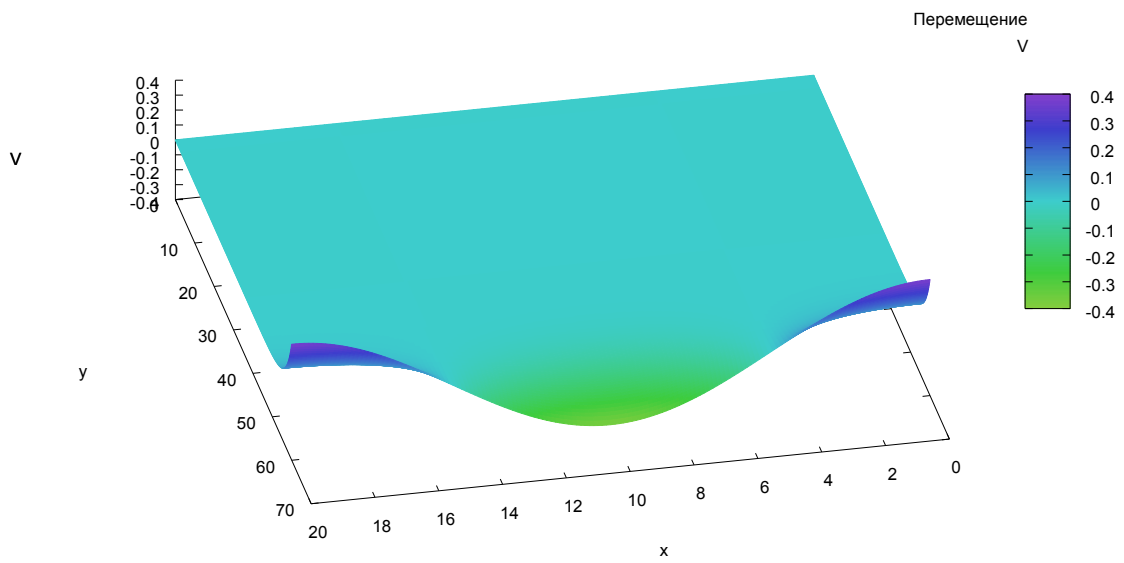
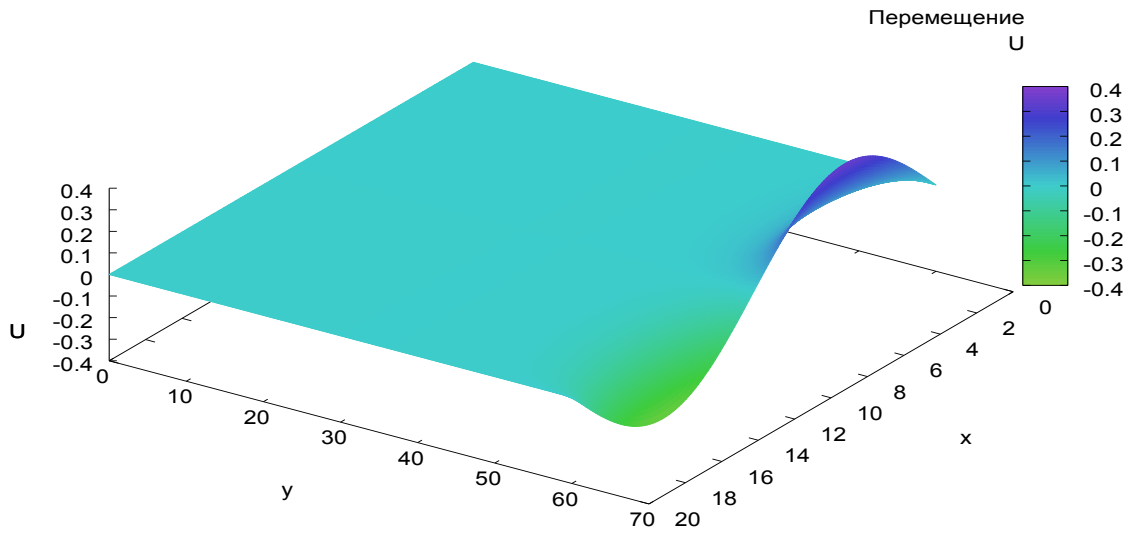
В обозначениях препроцессору  $U_1^{0'} \rightarrow U_{1onm1}$ . Для определения неизвестных коэффициентов разложений  $u_{1n}^0$ ,  $u_{2n}^0$ ,  $u_{1n}^{0'}$  начальных функций  $U_1^0$ ,  $U_2^0$ ,  $U_1^{0'}$  задаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} T_{31}^{(n)}(v_1, G_1, h_1)u_{1n}^0 + T_{32}^{(n)}(v_1, G_1, h_1)u_{2n}^0 &= 0, \\ T_{41}^{(n)*}(v_1, G_1, h_1)u_{1n}^0 + T_{42}^{(n)*}(v_1, G_1, h_1)u_{2n}^0 + T_{41}^{(n)}(v_1, G_2, h_2)u_{1n}^{0'} &= -\frac{2p}{c\alpha_n} \sin \alpha_n c, \\ T_{31}^{(n)*}(v_1, G_1, h_1)u_{1n}^0 + T_{32}^{(n)*}(v_1, G_1, h_1)u_{2n}^0 + T_{31}^{(n)}(v_1, G_2, h_2)u_{1n}^{0'} &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где коэффициенты  $T_{ij}^{(n)*}$  и  $T_{ij}^{(n)}$  – числовая форма операторов  $L_{ij}^*$  и  $L_{ij}$ .

Первым и третьим уравнением системы (16) выражается условие отсутствия напряжений  $U_3$  на плоскости контакта слоев и на нижней граничной плоскости плиты. Вторым условием – условие равновесия для напряжения  $U_4$  на нижней плоскости плиты.

На графиках изображены перемещения и напряжения для данного примера. Размеры и упругие характеристики взяты те же, что и в предыдущем примере. Берутся два, а потом три члена числовых рядов. Для двух членов, см. рис. 6.



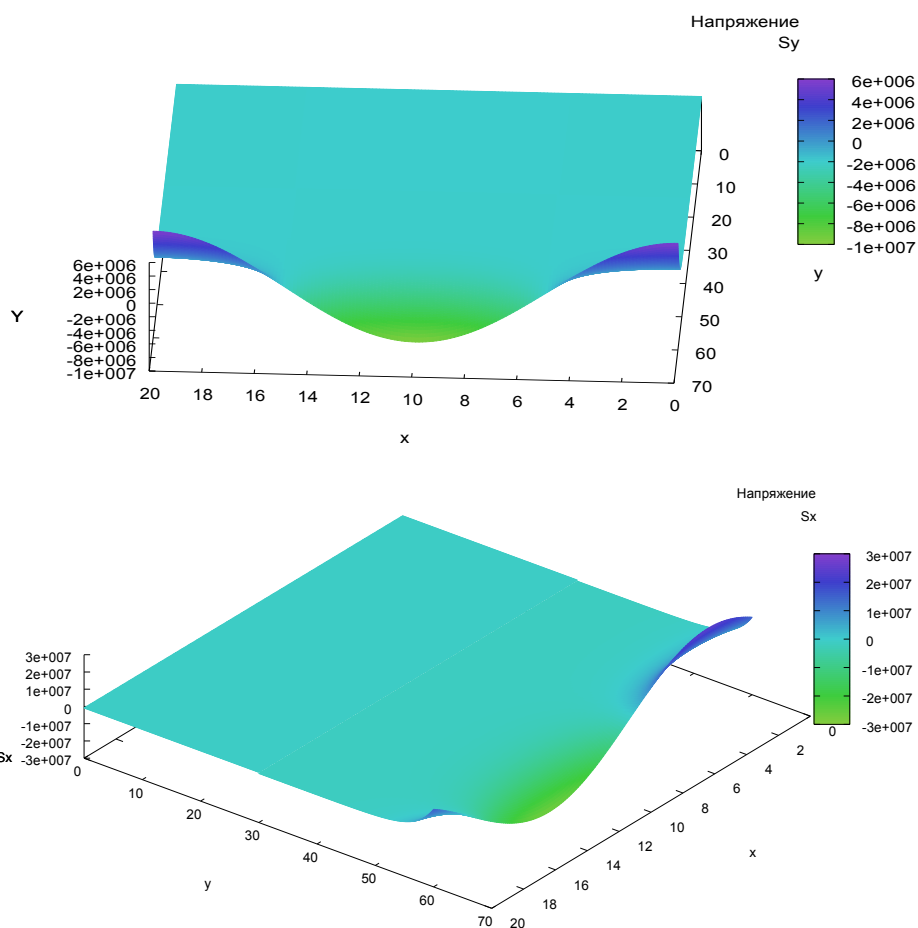
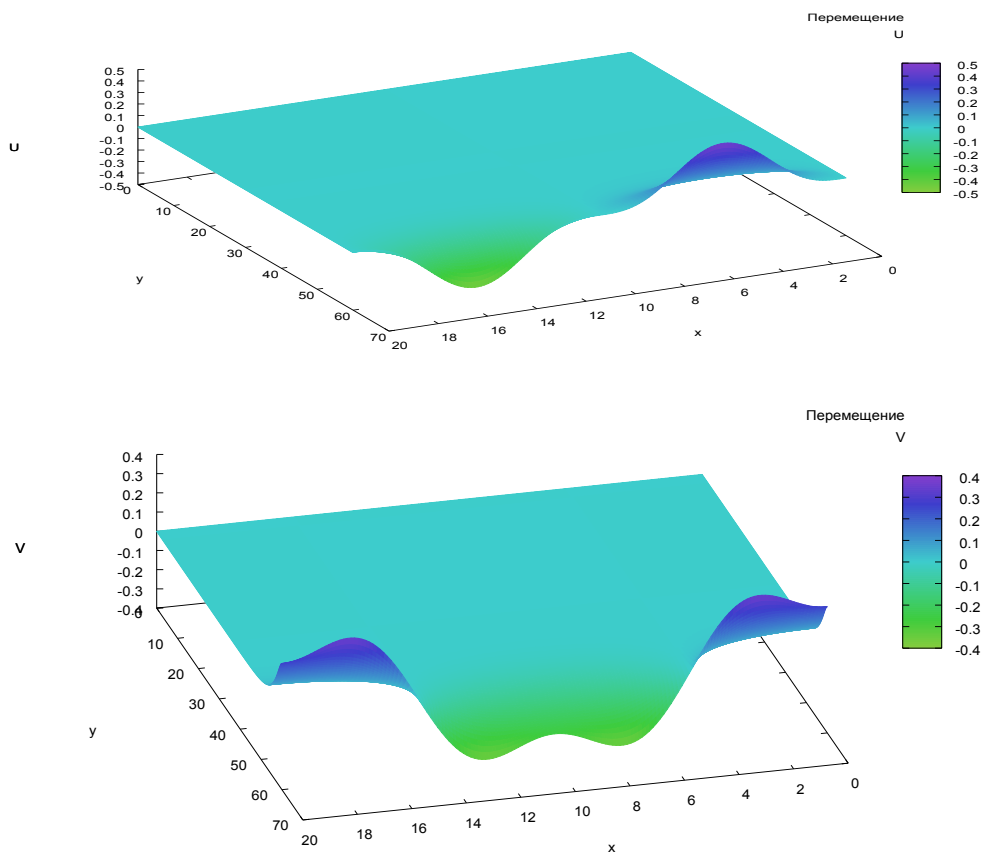


Рис. 6. Графики перемещений и напряжений для двух членов рядов-разложений  
 Для трех членов ряда графики следующие, см. рис. 7.



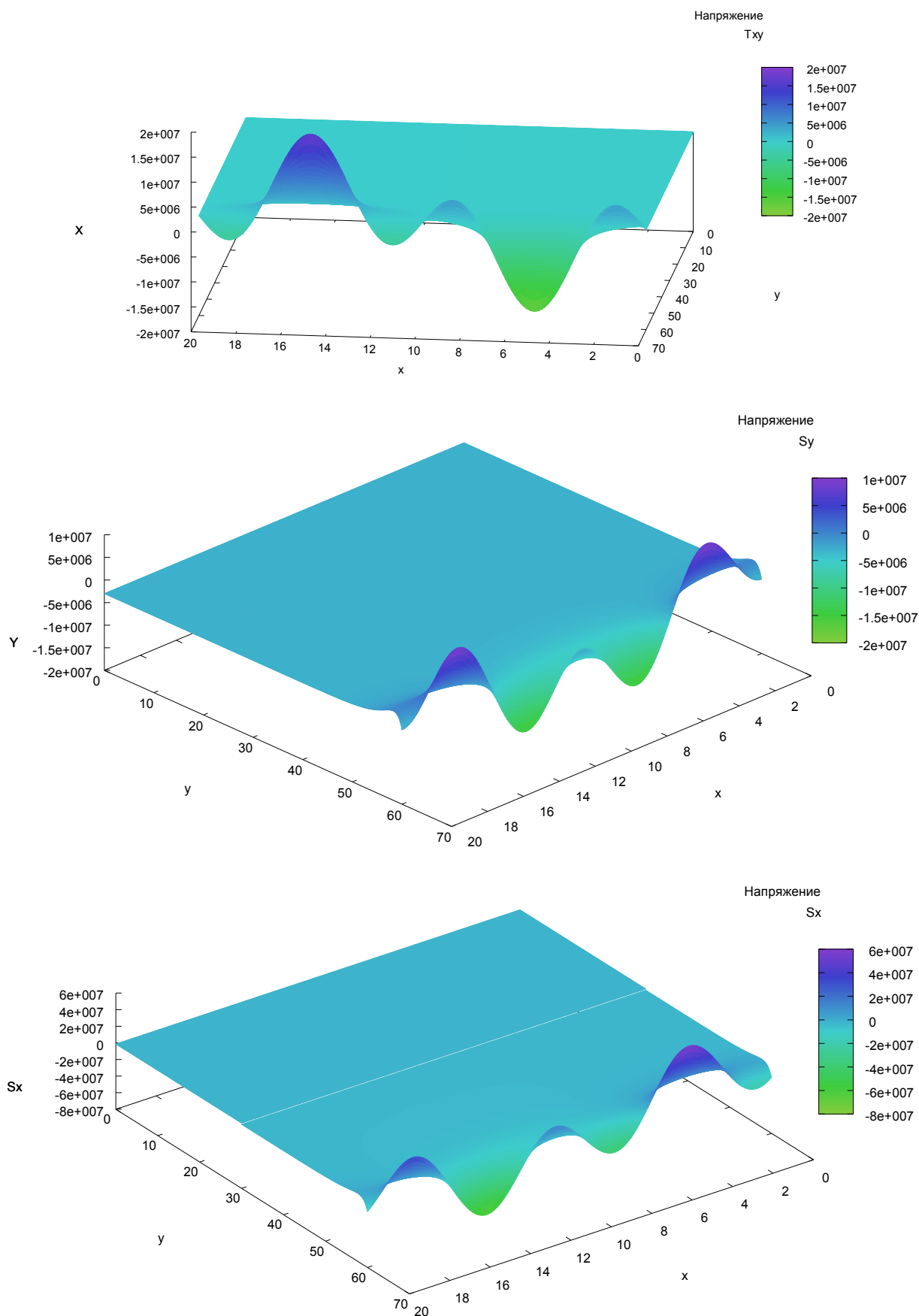


Рис. 7. Графики перемещений для трех членов рядов-разложений

Из рис. 4-7 можно сделать вывод о небольших изменениях значений перемещений и напряжений в зависимости от количества членов в рядах разложений (11). С ростом числа

рядов в разложениях (11) результат изменяется незначительно и колеблется вдоль предельного значения, которое изображено на графиках. Поэтому рост числа членов в разложениях рядов влияет лишь на скорость вычислений, но результат будет изменяться в незначительной степени.

В примерах задач описаны принципы работы препроцессора инструментальной системы. Возможности применения разработанного автором инструмента этим не исчерпываются. Инструментальная система также может осуществлять вывод и расчет более сложных конструкций в двумерной и трехмерной постановках для многослойных тел, упругого основания, полуплоскости.

### ВЫВОДЫ

В работе охарактеризован препроцессор инструментальной системы расчета многослойных задач статической теории упругости в двумерной и трехмерной постановках. С его помощью производится автоматизация вывода аналитического решения на ЭВМ задач теории упругости. Далее дифференциальное символическое решение переводится в формульную форму в зависимости от выбранного класса задачи (однородное или многослойное упругие тела, упругое основание, полуплоскость) и визуализируется средствами системы компьютерной математики *Mathima* или *Maple*. Автором разработаны две программные реализации инструментальной системы в виде пакетов подпрограмм для СКМ. Подключив пакет к *Maple* или *Mathima* пользователь может получить аналитическое решение поставленной задачи теории упругости и продолжить работу с ним как в дифференциальном так и в формульном виде. В качестве примеров работы выбраны две плоские многослойные задачи теории упругости. Постановки задач можно изменять. Главная задача препроцессора инструментальной системы – вывод дифференциального точного решения для каждого слоя. Дифференциальное решение считается предварительным. Далее пользователь выбирает форму начальных функций и управляет процессом перевода дифференциального решения в формульный вид.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. Власов, Н. Леонтьев. — М. : ФИЗМАТГИЗ, 1960. — 491 с.
2. Горшков А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Талаковский ; Учеб. для вузов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 416 с.
3. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.
4. Галан Е. Е. Использование системы *Maple* при реализации метода начальных функций Власова / Е. Е. Галан, А. Г. Овский, В. А. Толоч // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : ЗНУ. — 2008. — №1. — С. 16-26.
5. Овский А. Г. Использование системы компьютерной математики *Maple* для доказательства закона ортогональности матриц прямого и обратного преобразований, составленных Власовым В.З. / А. Г. Овский, В. А. Толоч // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. — Запоріжжя : ЗНТУ, 2008. — №1. — С. 78-85.
6. Овский А. Г. Моделирование схемы решения трехмерной задачи теории упругости в системе *Maple* / А. Г. Овский, В. А. Толоч // Гідроакустичний журнал. — 2008. — №3. — С. 88-97.
7. Овский А. Г. Препроцессор решения статических двумерных и трехмерных задач теории упругости / А. Г. Овский, В. А. Толоч // Інформаційні технології моделювання і управління. — 2014. — №1(85). — С. 47-58.

### REFERENCES

1. Vlasov, V.Z. and Leontev, N. (1960), *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams of a plate and a cover on the elastic foundation], *Physmatgiz*, Moscow.

2. Gorshkov, A.G., Starovoytov, E.I. and Talakovskiy, D.V. (2002), *Teoriya uprugosti i plastichnosti* [Theory of resiliency and plasticity], Fizmatlit, Moskow, Russia.
3. Poljanin, A.D. (2001), *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziky* [Manual on simple equations of mathematical physics], Fizmatlit, Moskow, Russia.
4. Galan, E.E., Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2008), "Use of system Maple at realisation of a method of Vlasov's initial functions", *Journal of Zaporozhya national university. Physical and Mathematical sciences*, no. 1, pp. 16-26.
5. Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2008), "Use of system of computer mathematics Maple for the proof of the law of orthogonalities matrixes of the direct and inverse transformations made by Vlasov V.Z.", *Journal "Radio electronics. Informatics. Administration"*, no. 1, pp. 78-85.
6. Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2008), "Modelling of the scheme of a solution of a three-dimensional problem of the theory of elasticity in system Maple", *Hydroacoustic journal*, no. 3, pp. 88-97.
7. Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2014), "Preprocessor solutions of static two-dimensional and three-dimensional problems of the theory of elasticity", *Journal modeling and control information technology*, no. 1(85), pp. 47-58.

УДК 534

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ПРУЖНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНИМ ВІБРОГАСНИКОМ В ОКОЛІ РЕЗОНАНСУ**

Плаксій К. Ю., аспірант, Міхлін Ю. В., д. ф.-м. н., професор

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,  
вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна*

plaksiyYA@rambler.ru, muv@kpi.kharkov.ua

Розглядається задача дослідження резонансної поведінки пружної коливальної системи з нелінійним віброгасником під впливом зовнішнього гармонічного збурення. Застосована методика зведення до редукованої системи відносно змінних енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків. Аналіз рівнянь редукованої системи дозволяє оцінити стійкість форм коливань, виявити локалізацію енергії на координатах і появу біфуркацій в околі резонансів. Зокрема, для розглянутої коливальної системи методика дозволяє виявити так звані перехідні форми коливань. Результати чисельних експериментів підтверджують успішність запропонованої методики.

*Ключові слова: стійкість, локалізація, редукована система, перехідна нелінійна нормальна форма.*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ВИБРОГАСИТЕЛЕМ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА**

Плаксий Е. Ю., аспирант, Михлин Ю. В., д. ф.-м. н., профессор

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,  
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина*

plaksiyYA@rambler.ru, muv@kpi.kharkov.ua

Рассматривается задача исследования резонансного поведения упругой колебательной системы с нелинейным виброгасителем под воздействием внешнего гармонического возмущения. Применена методика сведения к редуцированной системе относительно переменных энергии, арктангенса отношения амплитуд и разности фаз решений. Анализ уравнений редуцированной системы позволяет оценить устойчивость форм колебаний, выявить локализацию энергии на координатах и появление бифуркаций в окрестности резонансов. В частности, для рассмотренной колебательной системы методика позволяет выявить так называемые переходные формы колебаний. Результаты численных экспериментов подтверждают успешность предложенной методики.

*Ключевые слова: устойчивость, локализация, редуцированная система, переходная нелинейная нормальная форма.*