

2. Gorshkov, A.G., Starovoytov, E.I. and Talakovskiy, D.V. (2002), *Teoriya uprugosti i plastichnosti* [Theory of resiliency and plasticity], Fizmatlit, Moskow, Russia.
3. Poljanin, A.D. (2001), *Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziky* [Manual on simple equations of mathematical physics], Fizmatlit, Moskow, Russia.
4. Galan, E.E., Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2008), "Use of system Maple at realisation of a method of Vlasov's initial functions", *Journal of Zaporozhya national university. Physical and Mathematical sciences*, no. 1, pp. 16-26.
5. Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2008), "Use of system of computer mathematics Maple for the proof of the law of orthogonalities matrixes of the direct and inverse transformations made by Vlasov V.Z.", *Journal "Radio electronics. Informatics. Administration"*, no. 1, pp. 78-85.
6. Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2008), "Modelling of the scheme of a solution of a three-dimensional problem of the theory of elasticity in system Maple", *Hydroacoustic journal*, no. 3, pp. 88-97.
7. Ovsky, A.G. and Tolok, V.A. (2014), "Preprocessor solutions of static two-dimensional and three-dimensional problems of the theory of elasticity", *Journal modeling and control information technology*, no. 1(85), pp. 47-58.

УДК 534

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ПРУЖНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З НЕЛІНІЙНИМ ВІБРОГАСНИКОМ В ОКОЛІ РЕЗОНАНСУ**

Плаксій К. Ю., аспірант, Міхлін Ю. В., д. ф.-м. н., професор

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,  
вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна*

plaksiyYA@rambler.ru, muv@kpi.kharkov.ua

Розглядається задача дослідження резонансної поведінки пружної коливальної системи з нелінійним віброгасником під впливом зовнішнього гармонічного збурення. Застосована методика зведення до редукованої системи відносно змінних енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків. Аналіз рівнянь редукованої системи дозволяє оцінити стійкість форм коливань, виявити локалізацію енергії на координатах і появу біфуркацій в околі резонансів. Зокрема, для розглянутої коливальної системи методика дозволяє виявити так звані перехідні форми коливань. Результати чисельних експериментів підтверджують успішність запропонованої методики.

*Ключові слова: стійкість, локалізація, редукована система, перехідна нелінійна нормальна форма.*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ВИБРОГАСИТЕЛЕМ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА**

Плаксий Е. Ю., аспирант, Михлин Ю. В., д. ф.-м. н., профессор

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,  
ул. Фрунзе, 21, Харьков, 61002, Украина*

plaksiyYA@rambler.ru, muv@kpi.kharkov.ua

Рассматривается задача исследования резонансного поведения упругой колебательной системы с нелинейным виброгасителем под воздействием внешнего гармонического возмущения. Применена методика сведения к редуцированной системе относительно переменных энергии, арктангенса отношения амплитуд и разности фаз решений. Анализ уравнений редуцированной системы позволяет оценить устойчивость форм колебаний, выявить локализацию энергии на координатах и появление бифуркаций в окрестности резонансов. В частности, для рассмотренной колебательной системы методика позволяет выявить так называемые переходные формы колебаний. Результаты численных экспериментов подтверждают успешность предложенной методики.

*Ключевые слова: устойчивость, локализация, редуцированная система, переходная нелинейная нормальная форма.*

## RESEARCH OF BEHAVIOR OF ELASTIC OSCILLATORY SYSTEM WITH A NONLINEAR VIBRATION ABSORBER IN RESONANCE VICINITY

Plaksy K. Yu., graduate student, Mikhlin Yu. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

*National technical university «Kharkiv polytechnic institute»,  
21 Frunze str., Kharkiv, Ukraine*

plaksyYA@rambler.ru, muv@kpi.kharkov.ua

Dynamics of dissipative elastic system with a nonlinear vibration absorber under external harmonic excitation is considered in the vicinity of external resonance on some fundamental frequency. The Kauderer-Rosenberg concept of the nonlinear normal modes, which is based on determination of trajectories in the system configuration space, is used. Vibration modes in dissipative systems are not the classical Kauderer-Rosenberg vibration modes, and such regimes contain an exponential decrease of vibration amplitudes. Besides, so-called transient nonlinear normal modes, which exist only for some value of the system energy, that is, for some instant of time, can be observed in resonance vicinity for systems under external excitation. Other motions of the dissipative system can approach to these modes when the system energy is close to some specific energy value.

Transformation to the reduced system which is stated with respect to the system energy, an arctangent of the amplitudes ratio and a difference of phases of solutions is applied. An analysis of the reduced system's equations allows to estimate the vibration mode stability, to reveal the energy localization on coordinates and the appearance of new motions in resonance regime. In particular, for the considered system the technique allows to estimate bifurcation conditions in vicinities of resonances and to reveal the transient vibration modes. For a case of resonance on the first fundamental frequency it was obtained that the mode of energy localization on the first main coordinate is steady and we can see a transfer of other motions to this vibration mode. Respectively for a resonance case on the second fundamental frequency the mode of energy localization on the second main coordinate is steady and attracting. In both cases an appearance of the transient nonlinear normal modes of coupled vibrations is observed.

Simultaneously an investigation of stability and bifurcation of vibration modes, their interaction and the energy transfer from one mode to another one are considered. Conditions of energy localization on a vibration absorber are received. Results of numerical simulation confirm an accuracy of the proposed analytical approach.

*Key words: stability, localization, reduced system, transient nonlinear normal mode.*

### ВСТУП

Дослідження динаміки нелінійних коливальних систем в околі резонансу є важливим етапом розв'язання багатьох прикладних задач механіки, зокрема задачі віброгасіння пружних коливань. Наявність резонансу може призводити до втрати стійкості періодичного режиму і виникнення (біфуркації) нового режиму коливань системи. На особливу увагу заслуговує питання локалізації основної частини енергії системи в одній з підсистем [1, 2]. Така локалізація може бути як корисною для віброгасіння коливань, так і шкідливою для міцності самої конструкції.

Слід зазначити, що успіх аналітичного дослідження нелінійних систем переважно визначається вибором розв'язків, які можна обрати за нульове наближення для побудови більш складних рухів. За такі розв'язки в багатьох випадках можна вибрати саме нормальні коливання. Вперше побудова нормальних коливань нелінійних систем була проведена Каудерером [3] для консервативної системи з двома степенями свободи. Концепція нелінійних нормальних форм коливань запропонована Розенбергом [4, 5]. Подальший розвиток теорії нелінійних нормальних коливань можна знайти в [1, 2]. Хоча нормальні форми коливань Каудереа-Розенберга визначено для консервативних систем, у випадку дисипації енергії можна розглядати подібні рухи з урахуванням експоненційного згасання амплітуд.

У нашій роботі запропонована *методика зведення до редукованої системи* відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків в околі резонансу [6], за допомогою якої можна дослідити взаємодію, стійкість та біфуркації нелінійних нормальних форм в околі резонансу.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається пружна коливальна система з нелінійним віброгасником під впливом зовнішнього гармонічного збурення, що зображена на рис. 1. У системі має місце дисипація енергії за рахунок тертя, пропорційного до швидкостей.

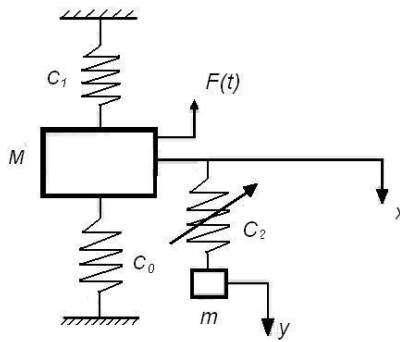


Рис. 1. Пружна коливальна система з нелінійним віброгасником

Рівняння коливань пружної системи мають вигляд:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx + c_2(x-y) + \gamma(x-y)^3 = r \sin \Omega t, \\ m\ddot{y} + \beta\dot{y} - c_2(x-y) - \gamma(x-y)^3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де жорсткість  $c = c_0 + c_1$ , а збурююча сила змінюється за гармонічним законом  $F(t) = r \sin \Omega t$ .

Позначимо  $\omega_x^2 = \frac{c+c_2}{M}$ ,  $2\eta_x = \frac{\beta}{M}$ ,  $\gamma_x = \frac{\gamma}{M}$ ,  $k = \frac{r}{M}$ ,  $q = \frac{c_2}{M}$ ,  $\omega_y^2 = \frac{c_2}{m}$ ,  $2\eta_y = \frac{\beta}{m}$ ,  $\gamma_y = \frac{\gamma}{m}$ .

Здійснимо перехід до головних координат  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = z_1 + z_2, \\ y = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2, \end{cases}$  де  $\alpha_{1,2} = 1$

та  $\beta_{1,2} = \frac{(\omega_x^2 - \omega_y^2) \pm \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2 + 4\omega_y^2 q}}{2q}$  або (що рівнозначно)

$\beta_{1,2} = \frac{2\omega_y^2}{(\omega_y^2 - \omega_x^2) \pm \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2 + 4\omega_y^2 q}}$ . Отримаємо систему рівнянь у нових змінних:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = \frac{\varepsilon \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left( -2\eta_x (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) - \gamma_x (z_1 + z_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2)^3 + k \sin \Omega t \right) - \\ \quad - \frac{\varepsilon}{\beta_2 - \beta_1} \left( -2\eta_y (\beta_1 \dot{z}_1 + \beta_2 \dot{z}_2) + \gamma_y (z_1 + z_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2)^3 \right), \\ \ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 = \frac{\varepsilon}{\beta_2 - \beta_1} \left( -2\eta_y (\beta_1 \dot{z}_1 + \beta_2 \dot{z}_2) + \gamma_y (z_1 + z_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2)^3 \right) - \\ \quad - \frac{\varepsilon \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \left( -2\eta_x (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) - \gamma_x (z_1 + z_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2)^3 + k \sin \Omega t \right), \end{cases} \quad (2)$$

де власні частоти  $\omega_{1,2}^2 = \frac{(\omega_x^2 + \omega_y^2) \mp \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2 + 4\omega_y^2 q}}{2}$ .

У системі (2) за умови відсутності дисипації і зовнішнього впливу існують дві нелінійні нормальні локалізовані у першому наближенні форми коливань [1, 2]: форма локалізації енергії на першій координаті –  $z_1 = z_1(t)$ ,  $z_2 \equiv 0$  та форма локалізації енергії на другій координаті –  $z_1 \equiv 0$ ,  $z_2 = z_2(t)$ . При цьому нелінійні нормальні форми початкової системи (1)

$x = z_1$ ,  $y = \beta_1 z_1$  ( $x = z_2$ ,  $y = \beta_2 z_2$ ) можуть бути як нелокалізованими зв'язаними коливаннями, так і локалізованими за рахунок параметрів  $\beta_{1,2}$ : при  $\beta_1 = O(\varepsilon)$  ( $\beta_2 = O(\varepsilon)$ ) чи  $\beta_1 = O(\varepsilon^{-1})$  ( $\beta_2 = O(\varepsilon^{-1})$ ) матимемо локалізацію на координаті  $x$  чи на координаті  $y$  відповідно. Умова  $\beta_1 = O(\varepsilon)$  ( $\beta_2 = O(\varepsilon)$ ) забезпечується за рахунок малості власної частоти  $\omega_y^2$ , а умова  $\beta_1 = O(\varepsilon^{-1})$  ( $\beta_2 = O(\varepsilon^{-1})$ ) – за рахунок малості параметра  $q$ .

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ В ОКОЛІ ЗОВНІШНЬОГО РЕЗОНАНСУ З ПЕРШОЮ ВЛАСНОЮ ЧАСТОТОЮ

Щоб дослідити зовнішній резонанс по координаті  $z_1$ , введемо в систему (5) розлад між власною частотою  $\omega_1$  та частотою зовнішнього впливу  $\Omega$  у вигляді  $\Omega^2 = \omega_1^2 + \varepsilon\Delta$ . Застосуємо до системи (5) метод багатьох масштабів [7] при розкладенні координат у асимптотичні ряди  $z_1 = z_{10} + \varepsilon z_{11}$ ,  $z_2 = z_{20} + \varepsilon z_{21}$ , вводючи масштаби часу  $T_n = \varepsilon^n t$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Отримаємо системи диференціальних рівнянь для першого та другого наближень розв'язків в околі резонансу з першою власною частотою, розв'язання яких приводить до умови виключення вікових членів у вигляді системи рівнянь відносно амплітуд та фаз шуканих розв'язків в околі резонансу:

$$\begin{cases} a_1' = \frac{L}{2\Omega} a_1 - \frac{N}{2\Omega} \cos b_1, \\ b_1' = -\frac{\Delta}{2\Omega} + \frac{M}{2\Omega} a_1^2 + \frac{P}{2\Omega} a_2^2 + \frac{N}{2\Omega a_1} \sin b_1, \\ a_2' = \frac{S}{2\omega_2} a_2, \\ b_2' = -\frac{R}{2\omega_2} a_2^2 - \frac{T}{2\omega_2} a_1^2, \end{cases} \quad (3)$$

де позначено  $L = \frac{2\Omega}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \eta_y - \beta_2 \eta_x)$ ,  $M = \frac{3(1 - \beta_1)^3}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_2 \gamma_x + \gamma_y)$ ,  $N = \frac{k\beta_2}{2(\beta_2 - \beta_1)}$ ,  
 $S = \frac{2\omega_2}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \eta_x - \beta_2 \eta_y)$ ,  $T = \frac{6(1 - \beta_2)(1 - \beta_1)^2}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \gamma_x + \gamma_y)$ ,  $R = \frac{3(1 - \beta_2)^3}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \gamma_x + \gamma_y)$ ,  
 $P = \frac{6(1 - \beta_1)(1 - \beta_2)^2}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_2 \gamma_x + \gamma_y)$ .

У системі (3) введемо заміну змінних  $a_1 = K \sin \psi$ ,  $a_2 = K \cos \psi$ , яка дозволяє перейти до редукованої системи відносно повної енергії редукованої системи  $K$ , арктангенса відношення амплітуд розв'язків  $\psi$  та фаз розв'язків  $b_1, b_2$ :

$$\begin{cases} K' = \frac{L}{2\Omega} K \sin^2 \psi + \frac{S}{2\omega_2} K \cos^2 \psi - \frac{N}{2\Omega} \cos b_1 \sin \psi, \\ \psi' = \left( \frac{L}{2\Omega} - \frac{S}{2\omega_2} \right) \sin \psi \cos \psi - \frac{N}{2\Omega K} \cos \psi \cos b_1, \\ b_1' = -\frac{\Delta}{2\Omega} + \frac{M}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi + \frac{P}{2\Omega} K^2 \cos^2 \psi + \frac{N}{2\Omega K \sin \psi} \sin b_1, \\ b_2' = -\frac{R}{2\omega_2} K^2 \cos^2 \psi - \frac{T}{2\omega_2} K^2 \sin^2 \psi. \end{cases} \quad (4)$$

Рівняння відносно різниці фаз розв'язків  $\varphi = b_1 - b_2$  можна отримати у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi' = & -\frac{\Delta}{2\Omega} + \frac{M}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi + \frac{P}{2\Omega} K^2 \cos^2 \psi + \frac{N}{2\Omega K \sin \psi} \sin b_1 + \\ & + \frac{R}{2\omega_2} K^2 \cos^2 \psi + \frac{T}{2\omega_2} K^2 \sin^2 \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Дослідимо друге рівняння системи (4) та рівняння (5) на їхні рівноважні розв'язки. Саме такі розв'язки представляють коливання системи в унісон і є нелінійними нормальними формами Каудерера-Розенберга [4] за визначенням.

Локалізованим формам системи (2) відповідають  $\sin \psi = 0$  при локалізації енергії на координаті  $z_2$  та  $\cos \psi = 0$  при локалізації енергії на координаті  $z_1$ .

При  $\sin \psi = 0$  існування рівноважного розв'язку другого рівняння системи (4) вимагає  $\cos b_1 = 0$ . Це положення рівноваги редукованої системи знаходиться на прямій  $\psi = 0$ , і йому

відповідає рівняння енергії  $K' = \frac{S}{2\omega_2} K$ . Оскільки  $S < 0$  для будь-яких параметрів системи,

то енергія цього положення є спадаючою. Отже, положення не є таким, що притягує, а значить, відповідає нестійким коливанням системи (2).

При  $\cos \psi = 0$  друге рівняння системи (4) обертається на тотожність. Це положення рівноваги знаходиться на прямій  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , і йому відповідає рівняння енергії

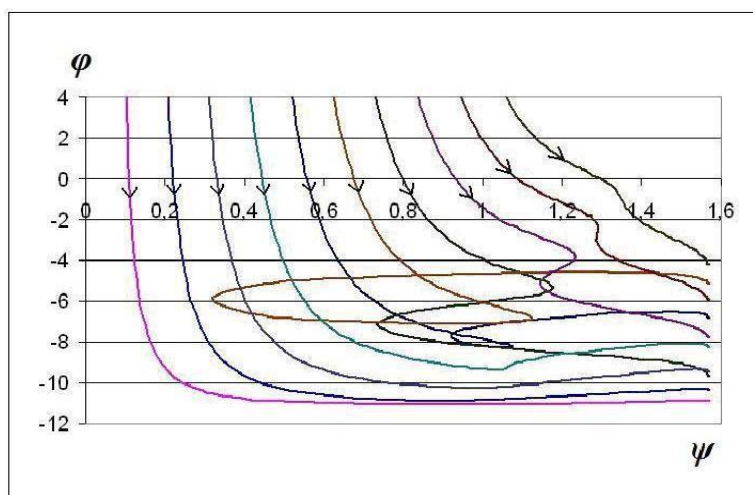
$K' = \frac{L}{2\Omega} K \pm \frac{N}{2\Omega} \cos b_1$ , яке не дозволяє зробити однозначний висновок щодо зміни енергії цього положення рівноваги через присутність у правій частині функції  $b_1(K)$ .

У випадку, коли і  $\sin \psi \neq 0$ , і  $\cos \psi \neq 0$  положення рівноваги другого рівняння (4) вимагає  $\sin \psi = \frac{N\omega_2}{K(L\omega_2 - S\Omega)} \cos b_1$ . Це положення рівноваги існує лише для значення енергії, що

вдовольняє рівнянню  $\left| \frac{N\omega_2}{K(L\omega_2 - S\Omega)} \right| = 1$ . З рівняння (5) можна відшукати відповідні

значення фази  $b_1$ . У цьому випадку  $\psi$  та  $\varphi$  залежать від  $K$ , і таке положення рівноваги не буде стаціонарним, тобто коливання системи, що відповідають такому положенню, не будуть нелінійною нормальною формою Каудерера-Розенберга. Форма зв'язаних коливань з'являється лише при такому значенні часу, коли досягається відповідне значення енергії, тобто є *перехідною формою коливань*. В околі цього значення енергії рух системи (2) є близький до такої форми коливань. Якщо значення енергії, що вдовольняє умові існування зв'язаних коливань, не досягається, біфуркація не відбуватиметься.

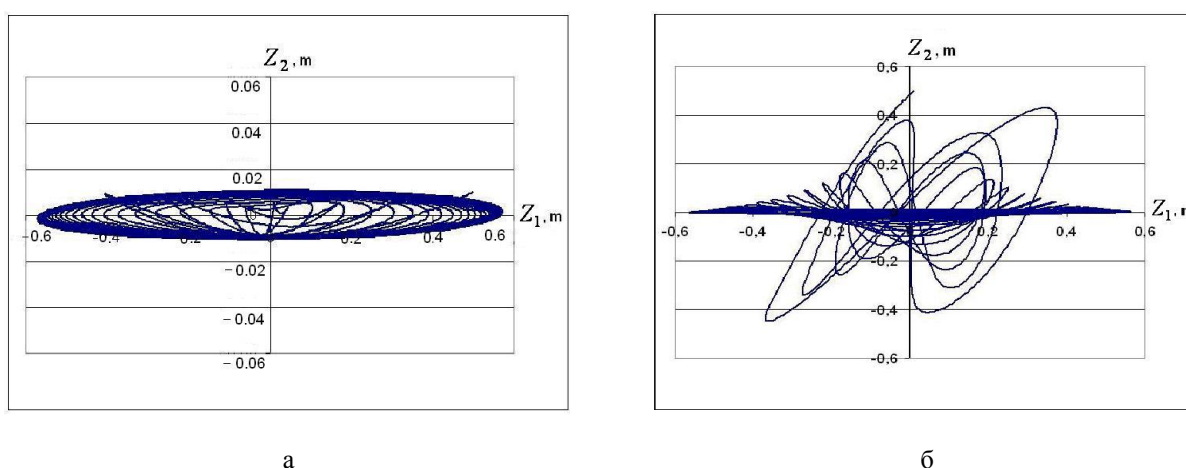
Проінтегруємо систему (4) чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком  $h = 0,01$  с, змінюючи початкові умови на інтервалі  $0 \leq \psi(0) \leq \pi/2$  та при  $K(0) = 0,5$ ,  $c_0 = 0,3$  Н/м,  $c_1 = 0,1$  Н/м,  $c_2 = 0,2$  Н/м,  $M = 1,9$  кг,  $m = 0,4$  кг,  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,3$  Н/м,  $r = 0,01$  і  $\Delta = 0,1$ . На рис. 2 зображена залежність  $\varphi(\psi)$ .

Рис. 2. Залежність  $\varphi(\psi)$ 

Проаналізуємо траєкторії у просторі  $\varphi(\psi)$ . Траєкторії на рис. 2 не залишаються поблизу прямої  $\psi = 0$ , а з часом наближуються до прямої  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , тобто локалізовані по  $z_1$  коливання можна вважати стійкими в околі резонансу, тоді як локалізовані по  $z_2$  коливання втрачають стійкість. Деякі траєкторії наближаються до положення рівноваги, яке відповідає перехідній формі зв'язаних коливань, та залишаються біля нього, доки це положення існує. На рис. 2 цій ситуації відповідають петлі траєкторій, що роблять виток навколо положення рівноваги, яке відповідає перехідним зв'язаним коливанням. З плином часу зв'язані коливання перестають існувати, і рух системи наближується до стійкої локалізованої форми.

Продемонструємо поведінку системи (2) в околі резонансу, проінтегрувавши її чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі  $t \in [0; 500]$  с з кроком  $h = 0,001$  с при  $\Omega = 0,3996$ ,  $c_0 = 0,3$  Н/м,  $c_1 = 0,1$  Н/м,  $c_2 = 0,2$  Н/м,  $M = 1,9$  кг,  $m = 0,4$  кг,  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,2$  Н/м,  $r = 0,15$  м,  $\varepsilon = 0,1$  і  $\Delta = -0,01$  та при  $z_1(0) = 0,5$ ,  $z_1'(0) = 0$ ,  $z_2(0) = 0,01$ ,  $z_2'(0) = 0$  для форми локалізації енергії по координаті  $z_1$  та при  $z_1(0) = 0,01$ ,  $z_1'(0) = 0$ ,  $z_2(0) = 0,5$ ,  $z_2'(0) = 0$  для форми локалізації енергії по координаті  $z_2$ .

На рис. 3, а, б представлені залежності у конфігураційному просторі для форми локалізації енергії на координаті  $z_1$  при малих відхиленнях по координаті  $z_2$  та форми локалізації енергії на координаті  $z_2$  при малих відхиленнях по координаті  $z_1$  відповідно.

Рис. 3. Залежність  $z_2(z_1)$ : а – форма локалізації на координаті  $z_1$ ; б – форма локалізації на координаті  $z_2$

Аналіз графіків показує, що форма локалізації по координаті  $z_1$  залишається стійкою в околі резонансу, оскільки відхилення по координаті  $z_2$  нехтовно менші за амплітуди по координаті  $z_1$ , а форма локалізації по координаті  $z_2$  втрачає стійкість, оскільки відхилення по координаті  $z_1$  стають одного порядку з амплітудами по координаті  $z_2$ . Також на рис. 3, б траєкторії певний час близькі до форми зв'язаних коливань. З плином часу відбувається перехід до стійкої в околі резонансу форми локалізації енергії на координаті  $z_1$ : траєкторії на рис. 3, б згущуються вздовж осі  $Oz_1$ .

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ В ОКОЛІ ЗОВНІШНЬОГО РЕЗОНАНСУ З ДРУГОЮ ВЛАСНОЮ ЧАСТОТОЮ

Щоб дослідити зовнішній резонанс по координаті  $z_2$ , введемо в систему (2) розлад між власною частотою  $\omega_2$  та частотою зовнішнього впливу  $\Omega$  у вигляді  $\Omega^2 = \omega_2^2 + \varepsilon\Delta$  та повторимо викладену вище методику. Отримаємо редуковану систему відносно енергії  $K$  та арктангенса відношення амплітуд розв'язків  $\psi$  та фаз розв'язків  $b_1, b_2$ :

$$\begin{cases} K' = \frac{\tilde{L}}{2\omega_1} K \sin^2 \psi + \frac{\tilde{S}}{2\Omega} K \cos^2 \psi + \frac{N}{2\Omega} \cos b_2 \cos \psi, \\ \psi' = \left( \frac{\tilde{L}}{2\omega_1} - \frac{\tilde{S}}{2\Omega} \right) \sin \psi \cos \psi - \frac{N}{2\Omega K} \sin \psi \cos b_2, \\ b_1' = \frac{M}{2\omega_1} K^2 \sin^2 \psi + \frac{P}{2\omega_1} K^2 \cos^2 \psi, \\ b_2' = -\frac{\Delta}{2\Omega} - \frac{R}{2\Omega} K^2 \cos^2 \psi - \frac{T}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi - \frac{N}{2\Omega K \cos \psi} \sin b_2, \end{cases} \quad (6)$$

де позначено  $\tilde{L} = \frac{2\omega_1}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \eta_y - \beta_2 \eta_x)$ ,  $M = \frac{3(1-\beta_1)^3}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_2 \gamma_x + \gamma_y)$ ,  $N = \frac{k\beta_2}{2(\beta_2 - \beta_1)}$ ,

$$P = \frac{6(1-\beta_1)(1-\beta_2)^2}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_2 \gamma_x + \gamma_y), \quad \tilde{S} = \frac{2\Omega}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \eta_x - \beta_2 \eta_y), \quad T = \frac{6(1-\beta_2)(1-\beta_1)^2}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \gamma_x + \gamma_y),$$

$$R = \frac{3(1-\beta_2)^3}{\beta_2 - \beta_1} (\beta_1 \gamma_x + \gamma_y).$$

Рівняння відносно різниці фаз розв'язків  $\varphi = b_1 - b_2$  запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi' = & \frac{M}{2\omega_1} K^2 \sin^2 \psi + \frac{P}{2\omega_1} K^2 \cos^2 \psi + \frac{\Delta}{2\Omega} + \frac{R}{2\Omega} K^2 \cos^2 \psi + \\ & + \frac{T}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi + \frac{N}{2\Omega K \cos \psi} \sin b_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Друге рівняння системи (6) та рівняння (7) розглянемо сукупно.

При  $\sin \psi = 0$  друге рівняння системи (6) обертається на тотожність. Це положення рівноваги редукованої системи ( $\sin \psi = 0$ ) знаходиться на прямій  $\psi = 0$ , йому відповідає рівняння

енергії  $K' = \frac{\tilde{S}}{2\Omega} K \pm \frac{N}{2\Omega} \cos b_2$ . За цим рівнянням не можна зробити однозначного висновку

щодо енергії цього положення через присутність у правій частині функції  $b_2(K)$ .

При  $\cos\psi = 0$  існування рівноважного розв'язку другого рівняння системи (6) вимагає  $\cos b_2 = 0$ . Це положення рівноваги редукованої системи ( $\cos\psi = 0$ ,  $\cos b_2 = 0$ ) знаходиться на прямій  $\psi = \frac{\pi}{2}$  і йому відповідає рівняння енергії  $K' = \frac{\tilde{L}}{2\omega_2} K$ . Енергія цього положення є

спадаючою, оскільки  $\tilde{L} < 0$  для будь-яких параметрів системи, тобто воно не є таким, що притягує, а значить, відповідає нестійким коливанням пружної підсистеми.

У випадку, коли і  $\sin\psi \neq 0$ , і  $\cos\psi \neq 0$  положення рівноваги другого рівняння (6) вимагає  $\cos\psi = \frac{N\omega_1}{K(\tilde{L}\Omega - \tilde{S}\omega_1)} \cos b_2$ . Таке положення існує лише для значення енергії, що вдовольняє

рівнянню  $\left| \frac{N\omega_1}{K(L\Omega - S\omega_1)} \right| = 1$ . З (7) можна отримати рівняння для знаходження фази  $b_1$  для

розв'язків системи (2), що відповідають таким коливанням. У цьому випадку  $\psi$  та  $\varphi$  залежать від  $K$ , і це положення рівноваги не буде стаціонарним. Воно відповідає *перехідній формі зв'язаних коливань*, яка з'являється лише в той момент часу, коли досягається вказане вище значення енергії.

Проінтегруємо систему (6) чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком  $h = 0,01$  с, змінюючи початкові умови на інтервалі  $0 \leq \psi(0) \leq \pi/2$  та при  $K(0) = 0,5$ ,  $c_0 = 0,3$  Н/м,  $c_1 = 0,1$  Н/м,  $c_2 = 0,2$  Н/м,  $M = 1,9$  кг,  $m = 0,4$  кг,  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,3$  Н/м,  $r = 0,01$  м і  $\Delta = 0,1$ . На рис. 4 зображена залежність  $\varphi(\psi)$ .

Траєкторії на рис. 4 на початку процесу віддаляються від прямої  $\psi = 0$  та, наближуючись до положення рівноваги, що відповідає зв'язаним коливанням системи, роблять виток навколо нього. Це положення рухається в просторі  $\varphi(\psi)$ . З часом воно перестає існувати, траєкторії віддаляються від нього та наближуються до прямої  $\psi = 0$ . Тобто локалізовані по координаті  $z_2$  коливання спочатку втрачають стійкість в околі резонансу, і з'являються зв'язані коливання. Далі вони перестають існувати, а локалізовані по  $z_2$  коливання набувають стійкості. Траєкторії на рис. 4 не залишаються біля прямої  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , тому це положення відповідає нестійким локалізованим по координаті  $z_1$  коливанням системи (2).

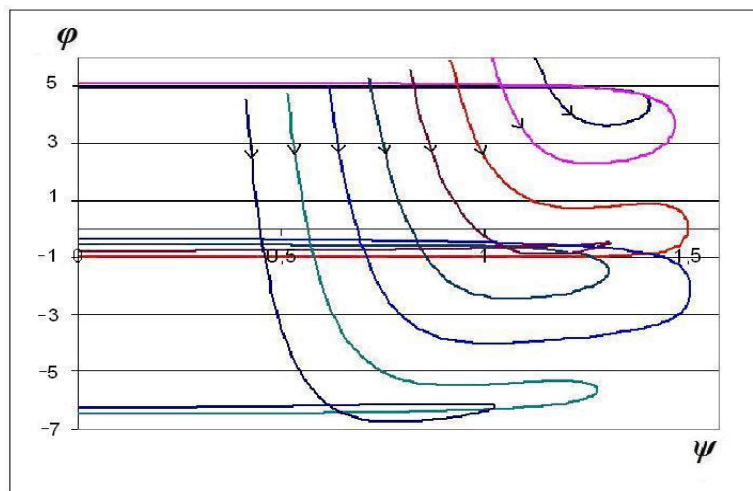


Рис. 4. Залежність  $\varphi(\psi)$



Поведінку системи (2) в околі резонансу продемонструємо за допомогою чисельного інтегрування методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі  $t \in [0; 500]$  с з кроком  $h = 0,001$  с при  $\Omega = 0,80877$ ,  $c_0 = 0,3$  Н/м,  $c_1 = 0,1$  Н/м,  $c_2 = 0,2$  Н/м,  $M = 1,9$  кг,  $m = 0,4$  кг,  $\beta = 0,2$ ,  $\gamma = 0,2$  Н/м,  $r = 0,15$  м,  $\varepsilon = 0,1$  і  $\Delta = -0,01$  та при  $z_1(0) = 0,5$ ,  $z_1'(0) = 0$ ,  $z_2(0) = 0,01$ ,  $z_2'(0) = 0$  для форми локалізації енергії на координаті  $z_1$  і  $z_1(0) = 0,01$ ,  $z_1'(0) = 0$ ,  $z_2(0) = 0,5$ ,  $z_2'(0) = 0$  для форми локалізації енергії по координаті  $z_2$ . На рис. 5, а, б представлені залежності у конфігураційному просторі.

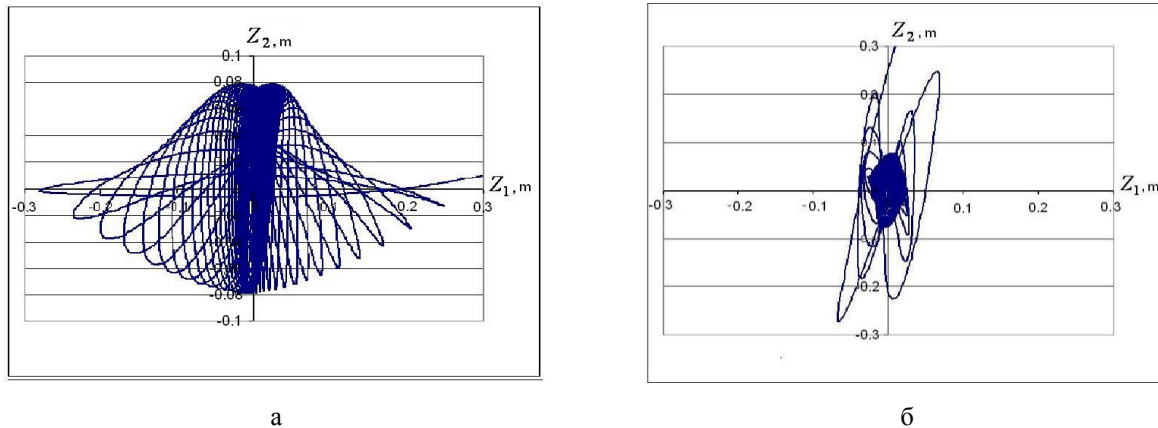


Рис. 5. Залежність  $z_2(z_1)$ : а – форма локалізації на координаті  $z_1$ ; б – форма локалізації на координаті  $z_2$

Аналіз графіків дозволяє зробити такі висновки: форма локалізації енергії по координаті  $z_1$  на початку процесу залишається деякий час стійкою, з плином часу відхилення по координаті  $z_2$  зростають та стають значно більші за амплітуди по координаті  $z_1$ , тобто нестійкість цієї форми розвивається повільно. На рис. 5, а бачимо, що відбувається перехід до стійкої в околі резонансу форми локалізації енергії на координаті  $z_2$ : траєкторії з часом згущуються вздовж осі  $Oz_2$ . Форма локалізації енергії по координаті  $z_2$  на початку процесу втрачає стійкість. У цей же час на рис. 5, б траєкторії наближуються до форми зв'язаних коливань, що підтверджує результати аналітичного дослідження за редукованою системою. З плином часу спостерігається стабілізація локалізованої по  $z_2$  форми коливань: рух пружної підсистеми знов набуває стійкості, а траєкторії згущуються вздовж осі  $Oz_2$ .

## ВИСНОВКИ

Запропонована методика зведення до редукованої системи дозволяє успішно дослідити динаміку коливальних систем в околі резонансу та виявити нові *перехідні форми коливань*. Зокрема, для розглянутої пружної системи отримано, що у випадку зовнішнього резонансу з власною частотою  $\omega_1$  поява перехідних зв'язаних коливань системи можлива лише в околі такого значення часу, коли досягається необхідне для біфуркації значення енергії. Протягом іншого часу енергія системи локалізується на координаті  $z_1$ . Для початкової системи (1) будемо мати форму коливань  $x = z_1$ ,  $y = \beta_1 z_1$ , тобто для локалізації енергії на віброгаснику треба збільшувати величину  $\beta_1$ . Цього можна досягти, зменшуючи жорсткість віброгасника  $c_2$ . У випадку зовнішнього резонансу з власною частотою  $\omega_2$  біфуркація аналогічно можлива лише в одиничний момент часу, а протягом всього іншого часу енергія локалізується на координаті  $z_2$ . Для початкової системи (1) будемо мати форму коливань  $x = z_2$ ,  $y = \beta_2 z_2$ , і для локалізації енергії на віброгаснику треба збільшувати величину  $\beta_2$ . Для цього треба зменшувати масу віброгасника  $m$ , що не є сприятливим для віброгасіння, бо призведе до зменшення кінетичної енергії віброгасника.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Vakakis A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems / A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin. — New York : Wiley Interscience, 1996. — 552 p.
2. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. — М.-Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010. — 704 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика / Г. Каудерер. — М. : Иностранная литература, 1961. — 777 с.
4. Rosenberg R. M. On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems / R. M. Rosenberg, C. P. Atkinson // *Journal of Applied Mechanics*. — 1959. — Vol. 26. — P. 377-385.
5. Rosenberg R. M. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom / R. M. Rosenberg // *Advances of Applied Mechanics*. — 1966. — Vol. 9. — P. 156-243.
6. Wang F. Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System / F. Wang, A. Bajaj, K. Kamiya // *Purdue university* – 2005. – 54 p.
7. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ. — М. : Мир, 1973. — 454 с.

## REFERENCES

1. Vakakis, A., Manevitch, L., Mikhlin, Yu., Pilipchuk, V. and Zevin A. (1996), "Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems", Wiley Interscience, New York.
2. Avramov, K.V., Mihlin, Ju.V. (2010), *Nelinejnaja dinamika uprugih sistem* [Nonlinear dynamics of the resilient systems], NIC Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, Moskow-Izhevsk.
3. Kauderer, H. (1961), *Nelinejnaja mehanika* [Nonlinear mechanics], Inostr. liter., Moskow.
4. Rosenberg, R. M. and Atkinson, C.P. (1959), "On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 26, pp. 377-385.
5. Rosenberg, R.M. (1966), "On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom", *Advances of Applied Mechanics*, vol. 9, pp. 156-243.
6. Wang, F., Bajaj, A. and Kamiya, K. (2005), "Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System", *Purdue university*, 54 p.
7. Naife, A.H. (1984), *Metody vozmushcheniy* [Methods of indignations], Mir, Moskow.

УДК 004.3

## МЕТОДОЛОГИЯ ПОВЫШЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ ДО СЕРЕДИНЫ УВЧ ДИАПАЗОНА ПРИ ИХ МОДЕЛИРОВАНИИ

Проскурин Н. П., к. т. н., доцент

*Запорожский национальный технический университет,  
ул. Жуковского, 64, г. Запорожье, 69063, Украина*

nickolay@zntu.edu.ua

Проведен анализ ряда моделей микромошных оптронов для оптоэлектронных переключателей и логических элементов (ОПЛЭ) квазиимпульснопотенциального типа (КИПТ). Повышение частоты модуляции сигнала светодиода достигнуто за счет проектирования новых моделей микромошных оптронов ОВЧ, УВЧ диапазонов с малыми размерами их элементов, режимом модуляции типа «малый сигнал» при снижении мощности