3. Romanuke V. V. Gaining with approach of assuredly minimized absolute deviations in solving the general nonstrict problem of elimination of single-parameter four-model uncertainty, Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physico-mathematical sciences, 2012, N. 2, pp. 70 — 90.

4. Romanuke V. V. Unique solution in general strict problem of convergence in single-parameter three-model uncertainty with principle of assuredly minimal absolute deviations, Bulletin of Donetsk National University. Series A. Natural Sciences, 2013, N. 2, pp. 176 — 182.

5. Romanuke V. V. Selection of quasiequiprobable distribution from continuum of optimal strategies to the generalized strictly formulated problem of removing single-parameter four-model uncertainty within assuredly minimized deviation approach, Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physico-mathematical sciences, 2013, N. 1, pp. 93 — 110.

6. Romanuke V. V. Preference of the principle of assuredly minimized absolute deviations and maximal contraction of optimal strategies continuum in a problem of removing single-parameter four-model $\{2\sigma, 3\sigma, 4\sigma\}$-uncertainty, Bulletin of Khmelnitskiy National University. Technical Sciences, 2012, N. 4, pp. 30 — 39.

7. Gorodetskiy V. V., Nagnibida N. I., Nastasiyev P. P. Methods of solving tasks of functional analysis, Kyiv, Vyshcha shkola, 1990, 479 p.

8. Kutateladze S. S. Fundamentals of functional analysis, Novosibirsk, Inst. of mathematics, 2000, 336 p.

9. Chew-Seng Chee, Yong Wang. Minimum quadratic distance density estimation using nonparametric mixtures, Computational Statistics & Data Analysis, 2013, Volume 57, Issue 1, pp. 1 — 16.

10. Carvalho F., Tenório C. P. Fuzzy K-means clustering algorithms for interval-valued data based on adaptive quadratic distances, Fuzzy Sets and Systems, 2010, Volume 161, Issue 23, pp. 2978 — 2999.

УДК: 536.21:536.21

ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНА МОДЕЛЬ ТОПОЛОГІЧНИХ ПЕРЕХОДІВ У МЕТАЛАХ

Самар Г. В., асистент

Національний технічний університет України «КПІ»,
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна

zettarok@gmail.com

У статті розглянуто фазові переходи Ліфшиця 2,5 роду в металах, пов'язані зі зміною топології поверхні Фермі. Розглянуто теорію Бар'яхтара-Макарова, згідно з якою електронно-топологічний перехід до надпровідного стану в деяких металах має місце при порівняно невеликих зовнішніх тисках.

Описано метод побудови якісних та кількісних властивостей переходу Ліфшиця 2,5 роду на основі точно розв'язуваної моделі однозонного сепарабельного потенціалу Ламе. Отримані точні аналітичні вирази для функції густини електронних станів у металах та її першої похідної.

Проведено порівняння результатів розрахунків з експериментальними даними по фазовому переходу Ліфшиця 2,5 роду в перехідних металах (сплав $\mathrm{Mo-Re}$). Продемонстровано можливість використання методу для точного розрахунку тонкої структури електронного спектру.

Ключові слова: скінченно-зонні потенціали Ламе, точно розв'язувана модель, електронно-топологічний перехід Ліфшиця 2,5 роду, енергія Фермі, поверхня Фермі.

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ В МЕТАЛЛАХ

Самар А. В., ассистент

Национальный технический университет Украины «КПИ»,
просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина

zettarok@gmail.com

В статье рассмотрены фазовые переходы Лифшица 2,5 рода в металлах, связанные с изменением топологии поверхности Ферми. Рассмотрена теория Барьяхтара-Макарова, согласно которой электронно-топологический переход в сверхпроводящее состояние в некоторых металлах происходит при сравнительно небольших давлениях.

Описан метод построения качественных и количественных свойств перехода Лифшица 2,5 рода на основе точно решаемой модели однозонного сепарабельного потенциала Ламе. Получены точные аналитические выражения для функции плотности электронных состояний в металлах и ее первой производной.

Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными при исследовании переходных металлов (сплав $\mathrm{Mo-Re}$). Продемонстрирована возможность использования метода для точного расчета тонкой структуры электронного спектра.

Ключевые слова: конечно-зонные потенциалы Ламе, точно решаемая модель, электронно-топологические переходы Лифшица 2,5 рода, энергия Ферми, поверхность Ферми.

THE EXACTLY SOLVABLE MODEL OF THE TOPOLOGICAL TRANSITIONS IN THE METALS

Samar A. V., assistant

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»,
Victory Avenue, 37, Kiev, 03056, Ukraine

zettarok@gmail.com

The article describes the Lifshitz phase transitions of 2,5 kind in the metals that is associated with changes in the topology of the Fermi surface. The curvature of this surface changes the density of the allowed electron states close to the surface, and therefore changes the thermodynamic and kinetic properties of metals.

Considered the Baryakhtar-Makarov theory. In accordance to it the electron-topological transition to the superconducting state in some of the metals occurs at relatively low external pressures. This is due to the existence near the Fermi level of the critical energies corresponding to the fine structure of the electron spectrum. If the Fermi level, changing under the influence of external factors, crosses these points there is a change in topology of the Fermi surface.

In this paper, to study the singularities of the electronic component of thermodynamic properties of metals is used exactly solvable model of an electron in the crystal. As an external potential in this model is choosen separable finite-zone Lame potentials that is proportional to the elliptic Weierstrass functions. The main characteristics of the transition in this case are set by analytical functions that contain the parameters of the potential only. The model parameters have a simple physical meaning and associated with the width of the cracks at the edges of the Brillouin zone.

The method of constructing qualitative and quantitative properties of the Lifshitz phase transition of 2,5 kind on the basis of an exactly solvable model of one-separable potential Lame is described. The exact analytical expressions for the electronic states density function in metals and its first derivative are obtained.

The density of conduction electrons and its derivative for topological transition with the formation of new electronic cavity are theoretically calculated. The comparison of the calculation results with the experimental data on the Lifshitz phase transition of 2,5 kind in transition metals (the $\mathrm{Mo-Re}$ alloy) is performed. The possibility of using the method for exact calculation of the fine structure of the electron spectrum and the calculation of the energy gap between the Fermi energy and the critical energy is demonstrated.

Key words: finite-zone potentials, separable finite-zone Lame potentials, electron-topological Lifshitz phase transition of 2,5 kind, Fermi surface, exactly solvable model, elliptic Weierstrass functions.

ВСТУП

Основні властивості металів, такі як електропровідність або теплопровідність, визначаються формою поверхні Фермі та довжиною вільного пробігу електронів на цій поверхні. Викривлення цієї поверхні змінює густину дозволених електронних станів поблизу неї, внаслідок чого змінюються термодинамічні та кінетичні властивості металів.

Зміни топології поверхонь Фермі не супроводжуються змінами кристалічної гратки або її симетрії, тому не відносяться до фазових переходів 2 роду. Такі фазові переходи були

передбачені І. М. Ліфшицем та названі ним електронно-топологічними переходами (ЕТП) 2,5 роду [1]. У своїй роботі І.М. Ліфшиць вказав на зміну таких властивостей металу при його фазовому переході: парамагнітна сприйнятливість, електронна теплоємність, коефіцієнт стисливості, термічний коефіцієнт тиску, аномалії електроопору в сильному магнітному полі.

ЕТП, пов'язані зі зміною топології поверхні Фермі, вперше спостерігалися по надпровідних характеристиках металів в області великих тисків та низьких температур [2]. Пізніше ЕТП спостерігалися в металах у нормальному стані. Нові дослідження в області ЕТП пов'язані з розробкою нових матеріалів з високотемпературними надпровідними властивостями, зміною магнітного впорядкування в металах при пружних деформаціях та ін. З розвитком технологій виникає потреба в новій елементній базі електронної техніки, побудованої на основі надпровідників. Тому виникає необхідність у збільшенні точності кількісних прогнозів фізичних властивостей сплавів різноманітних перехідних металів.

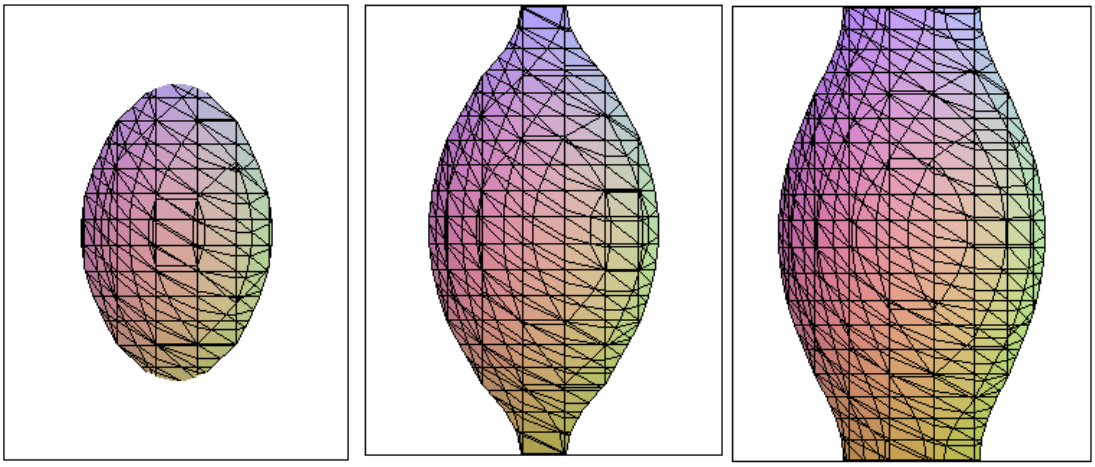
У статті описується метод побудови якісних та кількісних властивостей переходу Ліфшиця на основі точно розв'язуваної моделі однозонного сепарабельного потенціалу Ламе. Розглянута модель дозволяє, використовуючи прості параметри, описати весь процес переходу за допомогою точних аналітичних функцій.

ЕТП 2,5 РОДУ

І. М. Ліфшиць показав [1], що під дією зовнішнього тиску в монокристалічному металі може відбутися електронний фазовий перехід. При цьому переході змінюється топологія поверхні Фермі (ТПФ). Наприклад, від закритої поверхні Фермі можливий перехід до відкритої поверхні Фермі або навпаки, (див. рис.1). Значення енергії Фермі, при якому ізоенергетична поверхня торкається грані зони Бріллюена, називається критичним значенням енергії Фермі.

Якщо $\varepsilon_c > \varepsilon_F$, то поверхня Фермі закрита (А).

Якщо $\varepsilon_c < \varepsilon_F$, то поверхня Фермі відкрита (Б, В).



А Б В

Рис.1. Перехід від закритої (А) поверхні Фермі до відкритої (Б, В) при зміні енергії Фермі для кристала з тетрагональною симетрією в точно розв'язуваній моделі електрона в металі [3]

Ні сама гратка, ні її симетрія при такому переході не змінюється, а в електронних властивостях при нульовій температурі має місце фазовий перехід, коли третя похідна термодинамічного потенціалу прямує в нескінченність. Точніше, особливість має 2,5 похідна термодинамічного потенціалу. Скінченна температура «розмиває» особливість і третя похідна термодинамічного потенціалу стає скінченною при $T \neq 0$ (див. рис. 4). Вплив скінченної температури було вперше враховано в точно розв'язуваній моделі електрона в кристалі [3].

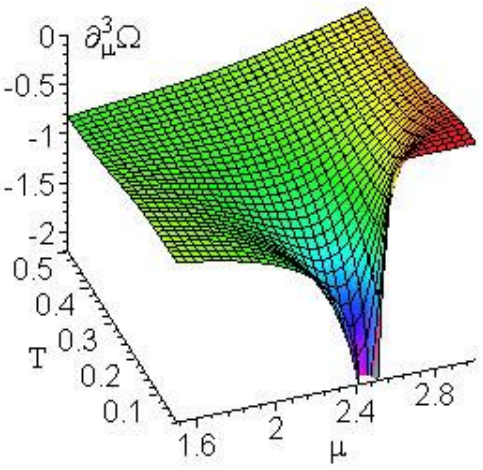


Рис. 2. Третя похідна термодинамічного потенціалу $\partial^3{}_\mu\Omega$ залежно від температури та енергії Фермі. Розрахунок проведено в точно розв'язуваній моделі електрона в металі [3]

Оцінки, запропоновані Ліфшицем, вказували на можливість ЕТП під тиском кількох десятків тисяч атмосфер, оскільки критичне значення енергії, за якої змінюється топологія поверхні Фермі порядка самої енергії Фермі для стандартних металів. Для більшості надпровідників, окрім талія та ренія, були отримані лінійні залежності температури надпровідного переходу від тиску. Нелінійна залежність температури надпровідного переходу для талія в області малих тисків не мала пояснення до роботи [4].

Бар'яхтар В.Г. та Макаров В.І. у роботі [4] зробили припущення про існування поблизу рівня Фермі критичних енергій, що відповідають тонкій структурі електронного спектра. Якщо рівень Фермі, змінюючись під дією зовнішніх чинників, перетинає ці точки, відбувається зміна топології поверхні Фермі. У цьому випадку ЕТП має місце при порівняно невеликих зовнішніх тисках.

Виявилося, що на положення рівня Фермі відносно критичного, можна впливати декількома параметрами – домішками різних валентностей і тиском. Ця обставина дала можливість створювати умови для досить точних експериментів з вивчення електронних переходів. Домішка більшої валентності збільшує енергію Фермі металу. Домішка меншої валентності зменшує енергію Фермі металу. Тиск, як і домішки більшої валентності, збільшують рівень Фермі, оскільки при стисненні металу щільність електронів у ньому збільшується. Це дозволило, комбінуючи параметри домішки і тиску, підганяти рівень Фермі ближче до критичної точки домішкою, а потім, більш плавно змінюючи рівень Фермі тиском, спостерігати фазовий перехід Ліфшиця за особливостями термодинамічних характеристик металу в нормальному або надпровідному стані [5].

Ця теорія добре описує експеримент і дає можливість отримувати кількісні параметри електронних переходів і визначати тонку структуру електронного спектра – енергетичний зазор між енергією Фермі і критичною енергією Фермі. Важливим результатом як експериментальним, так і теоретичним [5-9], було спостереження екстремуму в похідній залежності. Це дозволило надалі такі дослідження застосовувати як метод визначення критичних значень ізоенергетичних поверхонь електронів у металі.

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ЕТП У МОДЕЛІ СКІНЧЕННО-ЗОННИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ЛАМЕ

В.Г. Бар'яхтар, Є.Д. Білоколос, А.М. Коростиль для застосування до фізичних задач запропонували розглядати рівняння Шредінгера з тривимірним сепарабельним потенціалом у вигляді суми трьох одновимірних скінченно-зонних потенціалів вздовж ортогональних напрямків (орторомбічний кристал) [10]. Рівняння Шредінгера з такими потенціалами має точні розв'язки, хвильові функції і спектр задаються аналітичними функціями. Параметри

моделі мають просте фізичне значення, вони пов'язані з шириною щілин на краях зони Бріллюена.

Сепарабельні скінченно-зонні потенціали Ламе визначаються за допомогою функцій Вейерштрасса:

$$U_n(x) = -n(n+1)\wp(ix+\omega;\omega,\omega').$$

Еліптична функція Вейерштрасса має два незалежні параметри – півперіоди потенціалу ω, ω'. Зафіксувавши період потенціалу $2|\omega'|$, за допомогою параметра ω можна підібрати ширину щілин вздовж відповідного напрямку оберненої гратки. У цій моделі хвильові функції електрона, енергія, хвильовий вектор, число станів електронів провідності повністю визначено [10].

Як уже відзначалося, аномалії термодинамічних та кінетичних характеристик металів за низьких температур та високого тиску пов'язані з особливостями енергетичного спектру електронів провідності. Густина електронних станів, як функція E, має певні особливості (сингулярності Ван Хова) поблизу критичної точки E_c, де групова швидкість електронів наближається до нуля

$$\nu(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int\limits_{E(\mathbf{k})=E}\frac{dS}{|\nabla E(\mathbf{k})|}.$$

У моделі однозонного потенціалу Ламе рівняння Шредінгера має вигляд:

$$-\mathbf{\Delta}\Psi + W(x,y,z)\Psi = E\Psi,$$

$$W(x,y,z) = -2\wp(ix+\tilde{\omega}|\ \tilde{\omega},\tilde{\omega}') - 2\wp(iy+\tilde{\omega}|\ \tilde{\omega},\tilde{\omega}') - 2\wp(iz+\omega|\ \omega,\omega') + e_3 + 2\tilde{e}_1.$$

Напівперіоди потенціалу та енергію Фермі необхідно підібрати так, щоб у першій зоні поверхня Фермі мала вигляд гофрованого циліндра, витягнутого вздовж осі k_z, (див. рис. 1,Б). Тоді потенціал можна розкласти в ряд Тейлора по змінним x, y і обмежитись нульовим наближенням [11].

Спектр рівняння Шредінгера

$$-\mathbf{\Delta}\Psi + U(x,y,z)\Psi = \varepsilon\Psi,$$

$$U(x,y,z) = -e_3 - \wp(iz+\omega|\ \omega,\omega')$$

має вигляд

$$\begin{cases} E(k_x,k_y,h_z) = k_x^2 + k_y^2 - e_3 + \wp(h_z), \\ k_z = \zeta(h_z) - \dfrac{\eta'}{\omega'}h_z. \end{cases}$$

Функція $\varepsilon(k_x,k_y,k_z)$ у першій зоні має дві критичні точки: мінімум і сідлову точку, в другій зоні вона має одну критичну точку – мінімум. Нижче будемо розглядати тільки першу зону.

Позначимо $E_c = -e_3 + e_2$ значення енергії, при якому поверхня Фермі відкривається на границі зони Бріллюена, ортогональній осі k_z. Введемо параметр t_0.

1. При $0 \le \varepsilon < \varepsilon_c$ покладемо

$$\varepsilon + e_3 = \wp(t_0+\omega'), \text{ тоді } \frac{dt_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{\wp'(t_0+\omega')}.$$

2. При $\varepsilon > \varepsilon_c$ покладемо $t_0 = \omega$.

Використовуючи параметр t_0, знайдемо вираз для числа станів

$$N(\varepsilon) = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int dk_x dk_y dk_z = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int \left(k_x^2 + k_y^2\right) dk_z =$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\int_0^{t_0}\left[\varepsilon + e_3 - \wp(t+\omega')\right]\left(-\wp(t+\omega') - \frac{\eta'}{\omega'}\right) dt .$$

Після розрахунків отримаємо вирази

$$N(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3}\left[\left(\frac{g_2}{12} - \frac{\eta'}{\omega'}(\varepsilon + e_3)\right)t_0 + \left(\zeta(t_0+\omega') - \eta'\right)\left(\varepsilon + e_3 - \frac{\eta'}{\omega'}\right) + \frac{1}{6}\wp'(t_0+\omega')\right],$$

$$\nu(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{V}{2\pi^2}\left(\zeta(t_0+\omega') - \frac{\eta'}{\omega'}(t_0+\omega')\right).$$

Безпосередньо з означення параметру t_0 випливає

$$\nu(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{V}{2\pi^2}\left|\mathbf{k}(\varepsilon)\right|, & \varepsilon < \varepsilon_c, \\ \dfrac{V}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{2|\omega'|}, & \varepsilon > \varepsilon_c. \end{cases}$$

Цей вираз залишається справедливим і у випадку ℓ-зонного потенціалу Ламе.

Знайдемо похідну від густини станів.

1. При $0 \le \varepsilon < \varepsilon_c$ отримуємо

$$\frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -\frac{V}{4\pi^2}\cdot\frac{(\eta'/\omega') + e_3 + \varepsilon}{\varepsilon^{1/2}(e_1 - e_3 - \varepsilon)^{1/2}}\cdot\frac{1}{(\varepsilon_c - \varepsilon)^{1/2}} .$$

2. При $\varepsilon > \varepsilon_c$ отримуємо $\dfrac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0$.

Сингулярність у точці $\varepsilon = e_1 - e_3$ відповідає виникненню поверхні Фермі в другій зоні. Сингулярність у точці $\varepsilon = 0$ відповідає мінімуму ε (зародження поверхні Фермі в центрі зони Бріллюена). Сингулярність у точці $\varepsilon = \varepsilon_c$ відповідає сідловій точці (відкриття поверхні Фермі на границі зони Бріллюена).

Введемо позначення

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{V}{4\pi^2}\cdot\frac{|\eta'/\omega' + e_2|}{(e_2 - e_3)^{1/2}(e_1 - e_2)^{1/2}} ,$$

$$A = \frac{V}{2\pi^2}\cdot\left(\frac{g_2}{12}\omega + \frac{\pi}{2|\omega'|}e_3 - \frac{\eta\eta'}{\omega'}\right),$$

$$B = \frac{V}{2\pi}\cdot\frac{1}{2|\omega'|},$$

$$C=-\frac{V}{2\pi^2}\cdot\left[\frac{e_2^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2|\omega'|}+e_2\left(\frac{g_2}{12}\omega-\frac{\eta'}{\omega'}\eta\right)+\frac{3}{40}g_2\eta-\omega\left(\frac{\eta'}{\omega'}\cdot\frac{g_2}{12}+\frac{1}{20}g_3\right)\right].$$

Розкладемо $\frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon}$, $\nu(\varepsilon)$ в ряд за степенями $(\varepsilon_c-\varepsilon)^{1/2}$, отримаємо

$$\frac{d\nu(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\begin{cases}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{(\varepsilon_c-\varepsilon)^{1/2}}+O\left((\varepsilon_c-\varepsilon)^{1/2}\right), & \varepsilon<\varepsilon_c,\\ 0, & \varepsilon>\varepsilon_c,\end{cases}$$

$$\nu(\varepsilon)=\begin{cases}B-\alpha(\varepsilon_c-\varepsilon)^{1/2}+O\left((\varepsilon_c-\varepsilon)^{3/2}\right), & \varepsilon<\varepsilon_c,\\ B, & \varepsilon>\varepsilon_c.\end{cases}$$

Експериментально спостережені особливості температури надпровідного переходу під тиском у чистому металі пов'язані зі зміною топології поверхні Фермі при наближенні її до критичного значення енергії. Залежність $T_C(P,c)$ відображає особливості густини електронних станів $T_C(P,c)\approx\nu(\varepsilon)$, а екстремум залежно $\frac{1}{T_c}\frac{\partial T_C}{\partial P}$ відповідає появі нової електронної порожнини поверхні Фермі.

$$\frac{\partial T_C}{\partial P}=\frac{\partial T_C}{\partial\varepsilon_f}\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial P}\approx\frac{\partial\nu(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_f}\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial P},$$

де додатній знак $\frac{\partial\nu(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_f}$ відповідає електронній порожнині, а від'ємний – дірковій. Теоретичний розрахунок густини електронів провідності та її похідної для топологічного переходу з утворенням нової електронної порожнини наведені на рис. 3, де лініями показано теоретичну залежність $\frac{\partial\nu(\varepsilon)}{\partial\varepsilon_f}$ та $\nu(\varepsilon)$, точками – експериментальні дані щодо похідної $\frac{1}{T_c}\frac{\partial T_C}{\partial P}$ та T_c як функції електронної концентрації n. Для порівняння використані експериментальні дані про систему $\mathrm{Mo-Re}$, отримані в роботі [12].

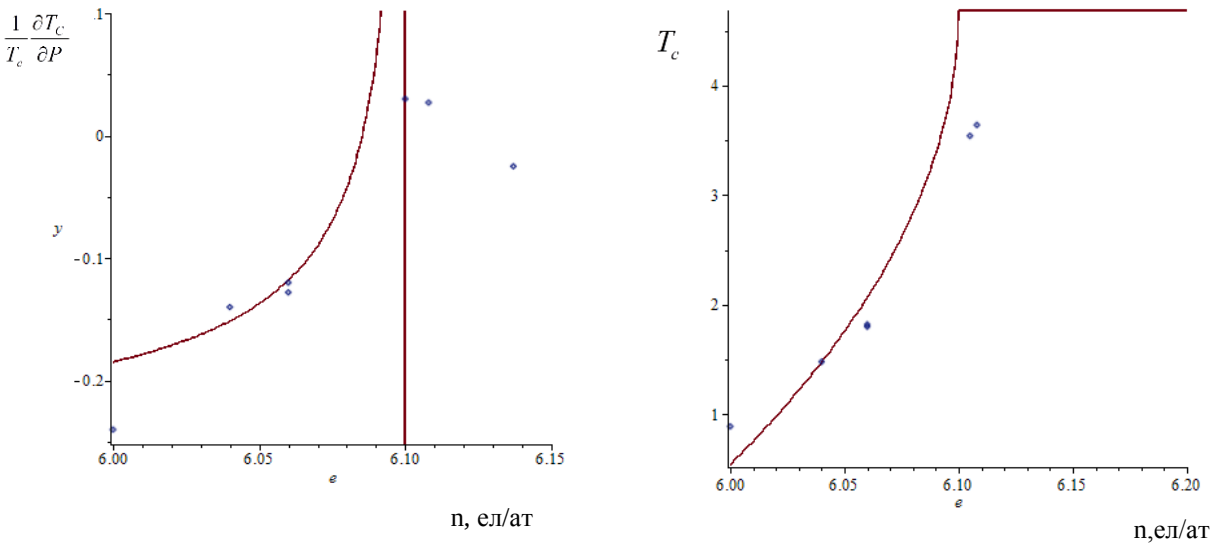


Рис. 3. Залежність $\frac{1}{T_c}\frac{\partial T_C}{\partial P}$ та T_c від числа валентних електронів. Теорія (--) та експеримент (•)

З рис. 3. видно, що екстремум похідної $\frac{1}{T_c}\frac{\partial T_C}{\partial P}$ відповідає кореневій особливості для $\frac{\partial \nu(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_f}$, що дозволяє використовувати отримані формули для розрахунку тонкого спектру більшості металів. Для системи $\mathrm{Mo-Re}$ величина енергетичного зазору становить $\varepsilon_c - \varepsilon_f = 0,017eB$ [12].

Для розрахунків обрано такі параметри: періоди потенціалу $\omega = 1$, $\omega' = 1,52i$, параметр $\alpha^2 \approx m^*$ має зміст ефективної маси біля краю зони Бриллюена $m^* = -6,25$ [10]. Підгоночними параметрами є межі енергетичних зон e_1, e_2, e_3.

Для переходу до розмірних величин необхідно ε, ε_f, ε_c домножити на $u_0 = \hbar^2/2am$, де маса електрона, характеристична довжина (параметр гратки ~ 0,314нм), а m^* домножити на $\hbar^2/u_0$.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто ЕТП із застосуванням точно розв'язуваної моделі електрона в кристалі. Основні характеристики переходу задані аналітичними функціями, що містять лише параметри потенціалу.

Проведено порівняння результатів розрахунків з експериментальними даними по фазовому переходу Ліфшиця (перехід 2,5 роду) в нормальних металах.

Практичне значення роботи полягає в збільшенні точності кількісних прогнозів фізичних властивостей сплавів різноманітних перехідних металів. Це дозволить розширити нові технології отримання матеріалів з заданими властивостями для застосування, наприклад, у мікроелектроніці.

Автор щиро дякує В.Г. Бар'яхтару за неоціненну допомогу при обговоренні постановки завдання, критичні зауваження та стимулюючі поради.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лифшиц И. М. Об аномалиях электронных характеристик металла в области больших давлений / И. М. Лифшиц // ЖЭТФ. — 1960. — Т. 38. — Вып. 5. — С. 1569-1576.
2. Лазарев Б. Г. Влияние примесей на зависимость температуры сверхпроводящего перехода таллия от давления / Б. Г. Лазарев, Л. С. Лазарева, В. И. Макаров, Т. А. Игнатьева // ЖЭТФ, 1965. — Т. 48. – Вып. 4. — С. 1065-1070.
3. Бар'яхтар В. Г. До теорії руху електрона в кристалі / В. Г. Бар'яхтар, Є. Д. Білоколос, Г. В. Самар, О. В. Дмитрієв // Наук. Вісті НТУУ КПІ. — 2006. — №4. — С. 7-13.
4. Макаров В. И. Об аномалиях температуры сверхпроводящего перехода под давлением / В. И. Макаров, В. Г. Барьяхтар // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 48. — Вып. 6. — С. 1717-1722.
5. Макаров В. И. Влияние процессов рассеяния на аномалии термодинамических характеристик сверхпроводника под давлением / В. И. Макаров, В. Г. Барьяхтар, В. В. Ганн // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 67. — Вып. 1. — С. 168-177.
6. Барьяхтар В. Г. О проявлении топологических особенностей электронного спектра в сверхпроводящих характеристиках металла / В. Г. Барьяхтар, Б. Г. Лазарев, В. И. Макаров // ФММ. — 1967. — Т. 24. — №5. — С. 829-842.
7. Барьяхтар В. Г. Влияние изменения топологии поверхности Ферми на сверхпроводящие свойства / В. Г. Барьяхтар, В. В. Ганн, В. И. Макаров, Т. А. Игнатьева // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 62. – Вып. 3. — С. 1118-1128.
8. Макаров В. И. О проявлении фазового перехода 2,5 рода коновских особенностей в зависимости температуры сверхпроводящего перехода от давления / В. И. Макаров // ФНТ. — 1977. — Вып. 1. — С. 20-31.

9. Влияние примесей на эффект давления у таллия / Н. Б. Брандт, Н. И. Гинзбург, Т. А. Игнатьева [и др.] // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 49. — Вып. 1. — С. 85-89.

10. Барьяхтар В. Г. Метод сепарабельного конечно-зонного потенциала – новый метод расчета электронной энергетической структуры твердых тел / В. Г. Барьяхтар, Е. Д. Белоколос, А. М. Коростиль // Металлофизика. — 1992. — Т. 14. — №8. — С. 3-11.

11. Сингулярності Ліфшиця електронних термодинамічних величин однозонного металу / В. Г. Бар'яхтар, Є. Д. Білоколос [та ін.] // Вісник Київського університету. — 2007. — №1. — С. 218-225.

12. Игнатьева Т. А. Исследование электронно-топологических переходов в сверхпроводящих сплавах Mo-Re, Mo-Re-Nb / Т. А. Игнатьева, В. В. Ганн, А. Н. Великодный // Физика низких температур. — 1994. — Т. 20. — №11. — С. 1133-1141.

REFERENCES

1. Lyfshyc, Y.M. (1960), "Anomalies of the electronic characteristics of the metal in the region of high pressures", *ZhETF*, vol. 38, issue 5, pp. 1569-1576.

2. Lazarev, B.G., Lazareva, L.S., Makarov, V.Y. and Ygnat'eva, T.A. (1965), "The effect of impurities on the dependence of the superconducting transition temperature of thallium from the pressure", *ZhETF*, vol. 48, issue 4, pp. 1065-1070.

3. Bar'yakhtar, V.H., Bilokolos, Ye.D., Samar, H.V. and Dmytriyev, O.V. (2006), "The theory of the motion of the electron in the crystal", *Nauk. Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 7-13.

4. Makarov, V.Y. and Bar'jahtar, V.G. (1965), "About the anomalies of the superconducting transition temperature under pressure", *ZhETF*, vol. 48, issue 6, pp. 1717-1722.

5. Makarov, V.Y., Bar'jahtar, V.G. and Gann, V.V. (1974), "The effect of scattering processes on the anomalies of the thermodynamic properties of a superconductor under pressure", *ZhETF*, vol. 67, issue 1, pp. 168-177.

6. Bar'jahtar, V.G., Lazarev, B.G. and Makarov, V.Y. (1967), "The manifestation of the topological features of the electron spectrum in a superconducting metal characteristical", *FMM*, vol. 24, no. 5, pp. 829-842.

7. Bar'jahtar, V.G., Gann, V.V., Makarov, V.I. and Ignat'eva, T.A. (1972), "The impact of changes in the topology of the Fermi surface in superconducting properties", *ZhETF*, vol. 62, issue 3, pp. 1118-1128.

8. Makarov, V.I. (1977), "The manifestation of a phase transition 2,5 kind konovsky peculiarities in the dependence of the superconducting transition temperature on pressure", *FNT*, issue 1, pp. 20-31.

9. Brandt, N.B., Ginzburg, N.I., Ignat'eva T.A. and others (1965), "The effect of impurities on the effect of the pressure of thallium" *ZhETF*, vol. 49, issue 1, pp. 85-89.

10. Bar'jahtar, V.G., Belokolos, E.D. and Korostil', A.M. (1992), "Method separable finite-zone potential – a new method of calculating the electronic energy structure of solids", *Metallofizika*, vol. 14, issue 14, pp. 3-11.

11. Bar'yakhtar, V.H., Bilokolos, Ye.D. and others (2007), "Singularity Lifshitz electronic single-zone thermodynamic quantities of metal", *Visnyk Kyyivs'koho universytetu*, no. 1, pp. 3-11.

12. Ignat'eva, T.A., Gann, V.V. and Velikodnyj, A.N. (1994), "The study of electron-topological transition in superconducting alloys Mo-Re, Mo-Re-Nb", *Fizika nizkih temperature*, vol. 20, no. 11, pp. C.1133-1141.