

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Стреляев Ю. М., старший преподаватель

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

strelkiny@gmail.ru

Предложен алгоритм численного решения квазистатической пространственной контактной задачи о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учетом кулонова трения. Алгоритм основан на упрощении традиционной постановки контактной задачи, в результате чего удается свести эту задачу на каждом шаге нагружения к решению операторного уравнения второго рода со сжимающим оператором в правой части. Такое свойство полученного уравнения позволяет обосновать сходимость метода последовательных приближений, применяемого для решения дискретного аналога этого уравнения, и способствует получению численного решения рассматриваемой контактной задачи с достаточной точностью. Анализ полученных численных результатов для задачи о вдавливании упругого шара в упругое полупространство свидетельствует о том, что принятое упрощение в постановке контактной задачи практически не влияет на точность полученного приближенного решения.

Ключевые слова: контактная задача, упругое тело, трение Кулона, операторное уравнение, итерационный метод.

РОЗВ'ЯЗАННЯ КВАЗИСТАТИЧНОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ

Стреляев Ю. М., старший викладач

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

strelkiny@gmail.ru

Запропоновано алгоритм чисельного розв'язання квазистатичної просторової контактною задачі про взаємодію двох лінійно-пружних тіл з урахуванням тертя Кулона. Алгоритм заснований на спрощенні традиційної постановки контактною задачі, у результаті чого вдається звести цю задачу на кожному кроці навантаження, до розв'язання операторного рівняння другого роду зі стискаючим оператором у правій частині. Така властивість отриманого рівняння дозволяє обґрунтувати збіжність методу послідовних наближень, застосовуваного для розв'язання дискретного аналогу цього рівняння, і сприяє отриманню чисельного розв'язку розглянутої контактною задачі з достатньою точністю. Аналіз отриманих чисельних результатів для задачі про вдавлення пружної кулі в пружний півпростір свідчить про те, що прийняте спрощення в постановці контактною задачі практично не впливає на точність отриманого наближеного розв'язку.

Ключові слова: контактна задача, пружне тіло, тертя Кулона, операторне рівняння, ітераційний метод.

SOLUTION OF THE QUASISTATIC CONTACT PROBLEM OF ELASTICITY WITH FRICTION

Streliaiev Y. M., senior teacher

*Zaporizhzhue National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

strelkiny@gmail.ru

The three dimensional contact problem of two linear elastic bodies when the Coulomb friction force and the history of external load taken into account is considered. Modern analytical and numerical methods for solving this type of contact problems are usually based on the variational statement of the problem or on the use of various operator equations. When implementing variational methods for solving complex contact problems, there are difficulties, associated with non-convexity of minimized energy function of the system of interacting bodies and non-differentiability of this function at the desired point of its minimum. These difficulties do not allow to use gradient methods and convex analysis methods to minimize the energy function, therefore, numerical procedures for finding minimum points of such functions are cumbersome in program implementation and sometimes make it impossible to obtain the contact problem

solution with sufficient accuracy. Non-variational methods, based on using nonlinear operator equations, have no such difficulties during its implementation. Applying these equations allows to use modern achievements of nonlinear functional analysis, fixed-point theory of continuous mappings, theory of iterative methods for solving operator equations for both proving theorems of existence of solutions to contact problems, and developing effective iterative procedures for approximate solutions. Nonlinear boundary integral equations, used in this paper to simulate the contact interaction of elastic bodies, allow (unlike other similar equations) to take into account both the linkage and partial slip on the contact surface of bodies, and loading history of these bodies. Based on these equations, simple and efficient iterative procedures for approximate solutions to the contact problems are developed. But nonlinear boundary integral equations method has a weak point concerning to difficulties with regularization of nonlinear equations and proving convergence of used iterative processes. In the work the spatial contact problem of two linear elastic bodies when the Coulomb friction force and the history of external load are taken into account is considered in a quasistatic statement. A modification of nonlinear boundary integral equations method for solution this problem is proposed. A special feature of this method is that it the contact problem is reduced to a consecutive solution of several systems of nonlinear boundary integral equations of the second kind which correspond to different stages of load. Delay factor for normal load force in Coulomb friction law is introduced. This modification of Coulomb friction law allowed simplifying structure of boundary conditions of bodies contact interaction. The contact surface of bodies is approximated by the system of boundary elements and discrete second kind operator with contractive operator in right part analogue of nonlinear integral equations system is proposed. Simple iteration method for solution of discrete analogue of nonlinear integral equations system is applied. Delay factor hypothesis allowed to satisfy the conditions of contraction mapping principle and guaranteed the convergence of iterative process. The problem studying a contact between an elastic sphere and an elastic half-space when a compressive force applied to the sphere is considered to verify the correctness proposed algorithm. Numerical solutions of this problem which correspond to different number of loading steps are obtained and compared with the known problem solutions. From the analysis of numerical outcomes following conclusions are received. The procedure for obtaining the numerical solution of contact problems of this class is significantly simplified. Numerical solutions of the problem do not differ from the known solutions of this problem. Increasing the number of steps of loading resulted in a marked reduction of the relative error of the results obtained in relation to known solutions. Introduced distortion of the boundary conditions of the contact problem has increased computing expenses for solving this problem with sufficient accuracy. This algorithm is correct and it can be effectively used for obtaining approximate solutions of contact problems of this class with sufficient accuracy.

Key words: contact problem, elastic body, Coulomb friction, operator equation, iterative method.

ВВЕДЕНИЕ

Современные аналитические и численные методы решения контактных задач о взаимодействии упругих тел с учетом трения обычно основаны на вариационной постановке задачи [1, 2] или на использовании различных операторных уравнений [3-10, 12]. Использование таких уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел позволяет избавиться от основной трудности реализации вариационных методов, заключающейся в необходимости рассматривать очень сложные задачи нелинейного программирования [1]. Применение операторных уравнений также открывает возможность применять современные достижения нелинейного анализа и теории операторов как для доказательства теорем существования, так и для разработки эффективных итерационных процедур [4, 9] нахождения решений контактных задач. В то же время при использовании операторных уравнений в контактной механике трудно обосновать сходимость итерационных методов [3-7, 9, 10, 12], которые часто применяются для получения решений этих уравнений. С целью устранения указанных трудностей в данной статье предлагается ввести определенные упрощения в постановку рассматриваемой контактной задачи. Эти упрощения, состоящие в модификации закона трения Кулона, позволяют свести контактную задачу к последовательному решению операторных уравнений второго рода, для дискретных аналогов которых возможно обосновать сходимость итерационных процессов, используемых для определения неизвестных контактных напряжений.

1. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим пространственную контактную задачу о взаимодействии двух линейно упругих тел при наличии кулонова трения между ними. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ тела касаются друг друга в одной точке и их геометрические поверхности являются гладкими. Пусть опора [12] нижнего тела остается неподвижной, а опора верхнего (рис. 1) тела совершает жесткое перемещение, определяемое вектор-функцией $\gamma(t)$,

зависящей от времени t . Будем считать, что вектор-функция $\gamma(t)$ медленно изменяется с возрастанием t от 0 до фиксированного значения $T > 0$ и пренебрегать инерционными и волновыми эффектами. Будем считать, что размеры зоны контакта малы по сравнению с линейными размерами тел и минимальными радиусами кривизны их поверхностей. Последние предположения позволяют считать, что заранее неизвестная область контакта является плоской и лежит в общей для двух тел касательной плоскости Π , проходящей через точку их начального касания. Обозначим через Ω ограниченную область плоскости Π , содержащую в себе неизвестную область контакта тел. Предположим, что процесс сжатия тел сопровождается поверхностным трением, подчиняющимся закону Кулона [16]. Введем прямоугольную систему координат zxy с началом в точке первоначального касания тел и осью z , направленной внутрь верхнего тела перпендикулярно плоскости Π (рис. 1).

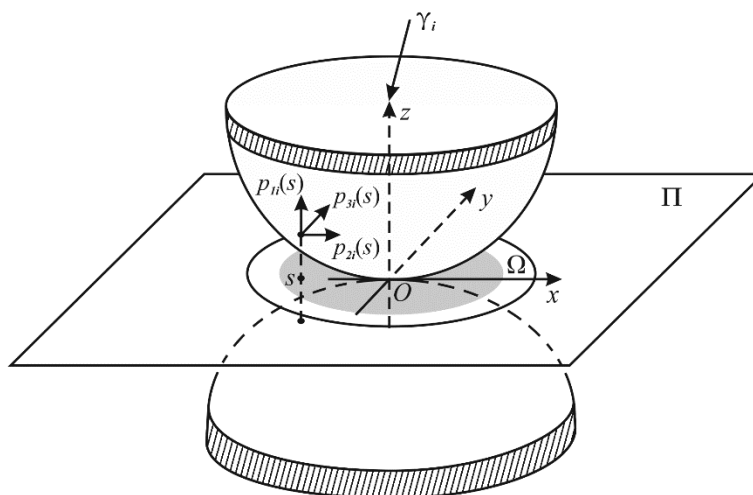


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия упругих тел

Будем рассматривать процесс нагружения тел лишь в фиксированные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ такие, что $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Будем также предполагать, что при каждом значении $t = t_i$ для системы контактирующих тел устанавливается равновесие. Таким образом, процесс нагружения тел происходит пошагово и состоит из последовательности состояний равновесия, то есть, является квазистатическим. Пусть индекс i определяет номер шага нагружения. Тогда вектор-функция $\gamma(t)$ будет принимать на каждом шаге нагружения значение $\gamma_i = (\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i})$. Граничные условия контактного взаимодействия тел на i -ом шаге нагружения будем выражать с помощью двух вектор-функций $p_i(s) = (p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s))$, $v_i(s) = (v_{1i}(s), v_{2i}(s), v_{3i}(s))$, где s – произвольная точка области Ω , а зависимость компонент этих вектор-функций от времени выражается лишь в дискретном изменении их значений при переходе к следующему шагу нагружения. Вектор-функция $p_i(s)$ определяет распределение удельной контактной нагрузки, передаваемой от нижнего тела к верхнему телу через точки области Ω на i -ом шаге нагружения. Вектор-функция $v_i(s)$ задает перемещения точек поверхности верхнего тела относительно противоположащих точек поверхности нижнего тела на i -ом шаге нагружения. Противоположащими здесь названы точки поверхностей верхнего и нижнего тел, расположенные на прямой, проведенной через точку $s \in \Omega$ перпендикулярно плоскости Π (рис.1). Отметим, что значения 1, 2, 3 индексов соответствуют направлениям координатных осей z , x , y . С учетом принятых предположений, граничные условия контактного взаимодействия тел можно выразить следующей системой неравенств и уравнений [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; \quad v_{1i}(s) \geq 0; \quad p_{1i}(s) \cdot v_{1i}(s) = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i}(s); \\ \sqrt{[\dot{v}_{2i}(s)]^2 + [\dot{v}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot \dot{v}_{2i}(s) = 0; \\ \sqrt{[\dot{v}_{2i}(s)]^2 + [\dot{v}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot \dot{v}_{3i}(s) = 0; \\ s \in \Omega; \quad i = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где положительная константа μ – коэффициент трения и $\dot{v}_{Ti}(s) = (\dot{v}_{2i}(s), \dot{v}_{3i}(s))$ – скорость относительного проскальзывания тел в точке $s \in \Omega$ на i -ом шаге нагружения. Первое из соотношений (1) выражает знакопостоянство контактного давления, второе означает отсутствие взаимного проникания тел и третье означает отсутствие контактного давления за пределами площадки контакта. Последние три соотношения системы (1) выражают закон трения Кулона. Будем считать, что компоненты p_{ki} , v_{ki} вектор функций $p_i(s)$, $v_i(s)$ принадлежат гильбертову пространству $L_2(\Omega)$ [13], а сами вектор-функции $p_i(s)$, $v_i(s)$ являются элементами трехмерного гильбертова пространства $L_2^3(\Omega)$ [9]. Связь между вектор-функциями $p_i(s)$ и $v_i(s)$ выражается соотношениями [12]

$$v_{ki}(s) = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(p_{ji})_s - f_{ki}(s) \equiv F_k(p_i, \Delta_{ki})_s \quad \forall k = \overline{1, 3}; \quad (2)$$

где $A_{kj}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ – операторы влияния поверхностных нагрузок на поверхностные перемещения, $f_i(s) = (f_{1i}(s), f_{2i}(s), f_{3i}(s)) \in L_2^3(\Omega)$ – вектор-функция, для которой $f_{1i}(s) = -\delta_0(s) - \Delta_{1i}$, $f_{2i}(s) = -\Delta_{2i}$, $f_{3i}(s) = -\Delta_{3i}$, а функция $\delta_0(s) \in L_2(\Omega)$ задает первоначальный зазор между телами, определяемый уравнениями их поверхностей. Выразим компоненты $\dot{v}_{2i}(s)$, $\dot{v}_{3i}(s)$ вектора скорости относительного проскальзывания тел в точке $s \in \Omega$ на i -ом шаге нагружения с помощью конечных разностей

$$\dot{v}_{ki}(s) = \frac{v_{ki}(s) - v_{ki}(s_{i-1})}{h_i} = \frac{1}{h_i} \cdot F_k(p_i, \tilde{\Delta}_{ki})_s, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 2, 3; \quad (3)$$

где $h_i = t_i - t_{i-1}$, $\tilde{\Delta}_{ki}(s) = \Delta_{ki} - F_k(p_{i-1}, \Delta_{k(i-1)})_s$, а $F_k(p_i, \Delta_{ki})_s$ определяется соотношениями (2). Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{1i}(s) \geq 0; \quad F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; \quad p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; \quad i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Таким образом, рассматриваемая контактная задача на i -ом шаге нагружения состоит в определении неизвестных функций $p_{ki}(s) \in L_2(\Omega)$, $k = \overline{1, 3}$ которые почти всюду на Ω удовлетворяют соотношениям (4). Отметим, что для нахождения решения системы (4) при $i = k$ должно быть известно решение этой системы при $i = k - 1$. Это следует из соотношений

(3). Таким образом, необходимо задать начальные условия, в качестве которых примем тождественное равенство нулю всех компонент вектор-функций γ_0 и $p_0(s)$.

Для упрощения постановки контактной задачи рассмотрим следующую модификацию соотношений, выражающих закон трения Кулона в системе (4). Вначале, запишем эту систему в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} p_{li}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{li})_s \geq 0; p_{li}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{li})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot (p_{li-1}(s) + \varepsilon_i(s)); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot (p_{li-1}(s) + \varepsilon_i(s)) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot (p_{li-1}(s) + \varepsilon_i(s)) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\varepsilon_i(s) = p_{li}(s) - p_{li-1}(s)$. Затем, будем предполагать, что при достаточно большом числе шагов нагружения n разности $p_{li}(s) - p_{li-1}(s)$ малы по сравнению с величинами контактных давлений $p_{li}(s)$ на каждом i -ом шаге нагружения. Наконец, учитывая последнее предположение, отбросим в системе (5) все приращения $\varepsilon_i(s)$. Тогда система (5) примет следующий модифицированный вид:

$$\begin{cases} p_{li}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{li})_s \geq 0; p_{li}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{li})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{li-1}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{li-1}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{li-1}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

При использовании указанной модификации закона трения Кулона рассматриваемая контактная задача на i -ом шаге нагружения сводится к определению неизвестных функций $p_{li}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$, которые почти всюду на Ω удовлетворяют соотношениям (6). Принятую модификацию закона трения Кулона, выраженную последними тремя соотношениями системы (6), можно истолковать как наличие запаздывания в выражениях $\mu \cdot p_{li}(s)$, входящих в последние три соотношения системы (6) и ограничивающих модуль удельной контактной нагрузки. При этом, очевидно, что на i -ом шаге нагружения ограничивающее контактное давление $p_{li-1}(s)$ является известным, что существенно упрощает граничные условия контактной задачи.

Если система (6) решена для i -го шага нагружения, то конфигурацию области контакта можно определить следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} \Omega_0^{(i)} &= \{s \in \Omega \mid F_1(p_i, \Delta_{li})_s = 0\}, \\ \Omega_C^{(i)} &= \{s \in \Omega_0^{(i)} \mid F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0\}, \\ \Omega_{\Pi}^{(i)} &= \{s \in \Omega_0^{(i)} \mid F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s > 0\}, \end{aligned}$$

где $\Omega_0^{(i)}$ – область контакта, $\Omega_C^{(i)}$ – зона сцепления, $\Omega_{\Pi}^{(i)}$ – зона проскальзывания. Окончательным решением рассматриваемой квазистатической задачи условимся считать

функции $p_{kn}(s)$, $k = \overline{1,3}$ и области $\Omega_0^{(n)}$, $\Omega_C^{(n)}$, $\Omega_{II}^{(n)}$, найденные на последнем шаге нагружения n .

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Для сведения системы соотношений (6) к нелинейному операторному уравнению рассмотрим непрерывный нелинейный оператор $G_{\mu p_1}: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$, задаваемый равенствами

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); y = G_{\mu p_1}(x), \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu p_1(s)), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu p_1(s)), \quad s \in \Omega, \end{cases}$$

в которых $p_1(s) \in L_2(\Omega)$ есть заданная, почти всюду на Ω неотрицательная функция, а функции $h(x)$ и $q(x, y, z)$ определяются соотношениями:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

С помощью введенного оператора $G_{\mu p_1}$, систему соотношений (6) можно записать в виде операторного уравнения

$$p_i = G_{\mu p_{i-1}}(p_i - E \cdot (A(p_i) - \tilde{f}_i)), \quad (7)$$

в котором $\tilde{f}_i = (-\delta_0(s) - \Delta_{1i}, -\tilde{\Delta}_{2i}(s), -\tilde{\Delta}_{3i}(s))$, E – произвольная положительная константа, а неотрицательная функция $\mu \cdot p_{i-1}(s)$ является известной. Линейный ограниченный оператор $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ задается системой равенств

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = A(x), y_k = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(x_j) \quad \forall k = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (8)$$

Будем считать, что операторы влияния $A_{kj}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, входящие в соотношения (8), допускают интегральное представление

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1,3}).$$

Таким образом, при фиксированном i операторное уравнение (7) эквивалентно системе трех нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p_{1i}(s)$, $p_{2i}(s)$, $p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$. Для приближенного решения подобных систем в работах [9, 10, 12] был предложен численный алгоритм, основанный на использовании итерационных процессов. Согласно этому алгоритму, осуществляется разбиение области Ω на граничные элементы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ с последующим численным решением дискретного аналога соответствующего операторного уравнения. В нашей задаче в качестве области Ω можно выбрать открытый

квадрат со сторонами, параллельными осям x , y , который заведомо содержит в себе область возможного контакта, а в качестве граничных элементов ω_i – одинаковые открытые квадраты со сторонами, параллельными сторонам квадрата Ω . Будем предполагать, что при каждом фиксированном значении i на каждом граничном элементе ω_k неизвестные функции $p_{1i}(s)$, $p_{2i}(s)$, $p_{3i}(s)$ принимают постоянные значения x_{3k-2i} , x_{3k-1i} , x_{3ki} . Тогда, для уравнения (7), можно получить его дискретный аналог в виде системы $3l$ нелинейных уравнений с $3l$ неизвестными $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{3li}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3k-2i} = h \left(x_{3k-2i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} \cdot x_{ji} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i} = q \left(x_{3k-1i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i} \right), x_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), \alpha_k \right); \\ x_{3ki} = q \left(x_{3ki} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} \cdot x_{ji} - b_{3ki} \right), x_{3k-1i} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} \cdot x_{ji} - b_{3k-1i} \right), \alpha_k \right); \\ k = \overline{1, l}. \end{array} \right. \quad (9)$$

В этой системе числовые параметры a_{kj} и b_{ki} можно определить из известных соотношений [9, 13]:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{3k-j \ 3k-j} = \int_{\omega_k} K_{3-j \ 3-j}(s_k, s) ds; \\ a_{3k-2 \ 3k-1} = a_{3k-2 \ 3k} = a_{3k-1 \ 3k-2} = a_{3k-1 \ 3k} = a_{3k \ 3k-2} = a_{3k \ 3k-1} = 0; \\ a_{3k-m \ 3j-g} = mes(\omega_j) \cdot K_{3-m \ 3-g}(s_k, s_j); \\ b_{3k-2i} = -\delta_0(s_k) - \Delta_{1i}, \quad b_{3k-1i} = -\tilde{\Delta}_{2i}(s_k), \quad b_{3ki} = -\tilde{\Delta}_{3i}(s_k) \\ \forall k = \overline{1, l}; \quad \forall j, m, g = \overline{0, 2}. \end{array} \right. \quad (10)$$

где s_k – центр квадрата ω_k , $mes(\omega_k)$ – площадь квадрата ω_k . В уравнениях (9) неотрицательные постоянные α_k задаются равенствами $\alpha_k = \mu \cdot x_{3k-2i-1}$, в которых μ – коэффициент трения, а значения $x_{3k-2i-1}$ контактных давлений на $(i-1)$ -ом шаге нагружения считаются известными. В случае аппроксимации взаимодействующих тел упругими полупространствами соотношения (10) гарантируют симметричность и положительную определённость матрицы $A_0 = \{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, 3l}$. Это обстоятельство позволяет для приближенного решения системы уравнений (9) использовать следующий итерационный процесс, основанный на методе простой итерации:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)}) \in R^{3l}, \quad k = \overline{1, l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ x_{3k-2i}^{(m+1)} = h \left(x_{3k-2i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-2j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-2i} \right) \right); \\ x_{3k-1i}^{(m+1)} = q \left(x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), \alpha_k \right); \\ x_{3ki}^{(m+1)} = q \left(x_{3ki}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3kj} x_{ji}^{(m)} - b_{3ki} \right), x_{3k-1i}^{(m)} - E \cdot \left(\sum_{j=1}^{3l} a_{3k-1j} x_{ji}^{(m)} - b_{3k-1i} \right), \alpha_k \right). \end{array} \right. \quad (11)$$

Сходимость итерационного процесса (11) будет иметь место независимо от выбора начального приближения $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)})$ в $3l$ -мерном евклидовом пространстве R^{3l} [13] при условии, что матрица A_0 является симметрической и положительно определенной, а входящая в соотношения (11) константа E удовлетворяет неравенству

$$0 < E < \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq 3l} \left(\sum_{j=1}^{3l} |a_{ij}| \right)}. \quad (12)$$

Этот факт можно доказать с помощью принципа сжимающих отображений [13].

Теорема. Если квадратная числовая матрица $A_0 = \{a_{ij}\}_{i,j=1, \overline{3l}}$ является симметрической и положительно определённой, то для любого вектора $b = (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{3li}) \in R^{3l}$ и для любых неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ система уравнений (9) имеет в пространстве R^{3l} единственное решение, причём итерационный процесс (11) при выполнении неравенств (12) сходится к этому решению независимо от выбора начального вектора $(x_{1i}^{(0)}, x_{2i}^{(0)}, \dots, x_{3li}^{(0)})$ в R^{3l} .

Доказательство. Введя обозначения $x = (x_1, x_2, \dots, x_{3l})$, $b = (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{3li})$, запишем систему уравнений (9) в матрично-векторной форме

$$x = F(x - E \cdot (A_0 \cdot x - b)), \quad (13)$$

где нелинейный оператор $F: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$ задан соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{3l}), \quad \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{3l}) \in R^{3l}; \\ \tilde{y} = F(\tilde{x}); \\ \tilde{y}_{3k-2} = h(\tilde{x}_{3k-2}), \quad \tilde{y}_{3k-1} = q(\tilde{x}_{3k-1}, \tilde{x}_{3k}, \alpha_k), \\ \tilde{y}_{3k} = q(\tilde{x}_{3k}, \tilde{x}_{3k-1}, \alpha_k) \quad \forall k = \overline{1, l}. \end{cases} \quad (14)$$

Будем полагать, что константа E в уравнении (13) удовлетворяет неравенствам (12).

Из очевидных неравенств [14]

$$\begin{cases} (h(y_1) - h(y_2))^2 \leq (y_1 - y_2)^2, \\ (q(y_1, z_1, \gamma) - q(y_2, z_2, \gamma))^2 + (q(z_1, y_1, \gamma) - q(z_2, y_2, \gamma))^2 \leq \\ \leq (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \end{cases} \quad (15)$$

справедливых для любых действительных чисел y_1, y_2, z_1, z_2 и для любого неотрицательного числа γ , следует нерастягиваемость оператора $F: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$ вида (14). Действительно, для любых векторов $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{3l})$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{3l})$ пространства R^{3l} справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|F(\tilde{x}) - F(\tilde{y})\|^2 &= \sum_{k=1}^l \left[(h(\tilde{x}_{3k-2}) - h(\tilde{y}_{3k-2}))^2 + (q(\tilde{x}_{3k-1}, \tilde{x}_{3k}, \alpha_k) - q(\tilde{y}_{3k-1}, \tilde{y}_{3k}, \alpha_k))^2 + \right. \\ &+ \left. (q(\tilde{x}_{3k}, \tilde{x}_{3k-1}, \alpha_k) - q(\tilde{y}_{3k}, \tilde{y}_{3k-1}, \alpha_k))^2 \right] \leq \sum_{k=1}^l \left[(\tilde{x}_{3k-2} - \tilde{y}_{3k-2})^2 + (\tilde{x}_{3k-1} - \tilde{y}_{3k-1})^2 + (\tilde{x}_{3k} - \tilde{y}_{3k})^2 \right] = \\ &= \sum_{j=1}^{3l} (\tilde{x}_j - \tilde{y}_j)^2 = \|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2, \end{aligned}$$

означающие нерастягиваемость оператора $F: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$ вида (14). В этих оценках, полученных с учетом неравенств (15), символом $\|x\|$ обозначена евклидова норма вектора $x \in R^{3l}$.

Для оператора $\tilde{F}: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$, стоящего в правой части уравнения (13), и для любых произвольных элементов $x, y \in R^{3l}$ теперь можно получить оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\| &= \|F(x - E \cdot (A_0 \cdot x - b)) - F(y - E \cdot (A_0 \cdot y - b))\| \leq \\ &\leq \|x - E \cdot (A_0 \cdot x - b) - y + E \cdot (A_0 \cdot y - b)\| = \\ &= \|(x - y) - E \cdot A_0 \cdot (x - y)\| = \|(I - E \cdot A_0) \cdot (x - y)\| \leq \|I - E \cdot A_0\|_* \cdot \|x - y\|, \end{aligned}$$

в которых I – есть диагональная квадратная числовая матрица $3l$ -го порядка с единицами на главной диагонали, а символ $\|B\|_*$ обозначает спектральную норму [15] матрицы B (матричную норму, согласованную с евклидовой векторной нормой). Таким образом, доказано неравенство:

$$\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\| \leq \|I - E \cdot A_0\|_* \cdot \|x - y\| \quad \forall x, y \in R^{3l}. \quad (16)$$

Из симметричности и положительной определенности матрицы A_0 вытекает очевидное неравенство [15]:

$$(A_0 \cdot x, x) \geq \alpha \cdot (x, x) \quad \forall x \in R^{3l}, \quad (17)$$

в котором α есть наименьшее собственное значение матрицы A_0 , а символ (x, y) обозначает скалярное произведение векторов $x, y \in R^{3l}$. Кроме того, из очевидной оценки [15]

$$\|A_0\|_* \leq \max_{1 \leq i \leq 3l} \left(\sum_{j=1}^{3l} |a_{ij}| \right)$$

и неравенств (12) следует, что симметрическая матрица $(I - E \cdot A_0)$ является неотрицательно определённой [15]. Оценивая спектральную норму такой матрицы с учетом условий (17), получим соотношения [14]:

$$\begin{aligned} \|I - E \cdot A_0\|_* &= \sup_{\|z\|=1} (z - E \cdot A_0 \cdot z, z) = \sup_{\|z\|=1} [(z, z) - E \cdot (A_0 \cdot z, z)] = \\ &= \sup_{\|z\|=1} (1 - E \cdot (A_0 \cdot z, z)) \leq \sup_{\|z\|=1} (1 - E \cdot \alpha) = 1 - E \cdot \alpha < 1. \end{aligned}$$

Из этих соотношений и неравенства (16) вытекает неравенство

$$\|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\| \leq (1 - E \cdot \alpha) \cdot \|x - y\|,$$

которое можно доказать для любых векторов x, y пространства R^{3l} . Таким образом, оператор $\tilde{F}: R^{3l} \rightarrow R^{3l}$, стоящий в правой части уравнения (13), является оператором сжатия. Тогда, согласно принципу сжимающих отображений [13], уравнение (13), а, следовательно, и система уравнений (9), имеет в пространстве R^{3l} единственное решение и итерационный процесс (11) сходится к этому решению независимо от выбора начального вектора, если входящая в (11) константа E удовлетворяет неравенствам (12).

Теорема доказана.

4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для проверки корректности предложенного алгоритма была рассмотрена задача о вдавливании упругого шара в упругое полупространство. Были выбраны следующие исходные данные: $E_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_2 = 10^5 \text{ МПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$, $\mu = 0,12375$, $R = 0,3 \text{ м}$, где E_1 , E_2 – модули Юнга шара и полупространства, ν_1 , ν_2 – коэффициенты Пуассона, μ – коэффициент трения, R – радиус шара. Процесс нагружения тел был осуществлён за n шагов в соответствии со следующим характером изменения относительных жёстких смещений Δ_{1i} , Δ_{2i} , Δ_{3i} этих тел, выраженных в метрах:

$$\Delta_{1i} = -\frac{0,00007}{n} \cdot i, \Delta_{2i} = \Delta_{3i} = 0, i = \overline{1, n}.$$

Для дискретизации области возможного контакта была использована квадратная сетка, состоящая из $41 \times 41 = 1681$ равных граничных элементов.

В результате численного расчета, с использованием итерационного процесса (11), были получены распределения нормальных и касательных напряжений по граничным элементам сетки. Полученные результаты сопоставлялись с решениями данной контактной задачи, полученными в работах [12, 16]. В таблице 1 показана зависимость безразмерной величины $\frac{\tau_{zx}}{\beta \cdot p_{\max}}$ от безразмерного параметра $\frac{x}{a}$, где τ_{zx} – касательные напряжения, соответствующие узловым точкам сетки, лежащим на оси x , β – безразмерный параметр [16], равный 0,1875, p_{\max} – максимальное значение контактного давления, a – радиус площадки контакта. Первая строка таблицы соответствует решению [16], вторая строка – решению [12], третья строка – численному решению, полученному с использованием итерационного процесса (11) при $n = 20$, четвертая строка – численному решению, полученному с использованием того же итерационного процесса при $n = 60$.

Таблица 1 – Зависимость касательных напряжений от расстояния

x/a	0,00	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99
1	0,00	0,18	0,29	0,37	0,43	0,47	0,48	0,43	0,33	0,09
2	0,00	0,21	0,30	0,39	0,45	0,49	0,48	0,41	0,31	0,09
3	0,00	0,13	0,24	0,35	0,42	0,46	0,46	0,39	0,27	0,04
4	0,00	0,16	0,29	0,38	0,44	0,49	0,48	0,41	0,3	0,06

Данные, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что полученное численное решение рассматриваемой задачи несущественно отличается от известных её решений [12, 16], одно из которых [12] найдено при использовании не модифицированной точной постановки этой задачи. Таким образом, введение принятых упрощений в постановку контактной задачи не оказало значительного влияния на результат её решения. Кроме того, увеличение количества шагов нагружения с двадцати до шестидесяти привело к заметному уменьшению относительной погрешности полученных результатов по отношению к известным решениям [12, 16]. При двадцати шагах нагружения эта погрешность составила приблизительно 10%, а при шестидесяти шагах – 6%. Как и следовало ожидать, введенное искажение граничных условий контактной задачи не могло не повлиять на объем вычислительных затрат для получения решения этой задачи с достаточной точностью. Так решение [12], полученное при двадцати шагах нагружения для точной постановки задачи (см. вторую строку таблицы), имеет такое же отклонение от решения [16], как и решение задачи в модифицированной постановке при шестидесяти шагах нагружения (см. четвертую строку таблицы).

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о корректности разработанного алгоритма и его применимости к решению контактных задач указанного класса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм приближенного решения трехмерных квазистатических контактных задач теории упругости с учетом трения. Данный алгоритм позволяет существенно упростить процедуру получения численного решения контактных задач указанного класса за счет использования эффективного итерационного процесса, сходящегося к этому решению. Численная реализация этого алгоритма свидетельствует о его корректности и возможности получения с его помощью результатов достаточной точности.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития / А. С. Кравчук // Прикл. математ. и механика. — 2009. — Вып. 73, № 3. — С. 492-502.
2. Reina S. A quadratic programming formulation for the solution of layered elastic contact problems: Example applications and experimental validation / S. Reina, D. Dini, D. A. Hills, Y. Lida // European Journal of Mechanics – A/Solids. — 2011. — Vol. 30, Issue 3. — P. 236-247.
3. Галанов Б. А. О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел / Б. А. Галанов // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1981. — №5. — С. 61-67.
4. Галанов Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б. А. Галанов // Прикл. математ. и механика. — 1985. — Т. 49, Вып. 5. — С. 827-835.
5. Александров В. М. Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта / В. М. Александров, J. J. Kalker, Д. А. Пожарский // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. — 1999. — №4. — С. 51-55.
6. Александров В. М. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Прикл. математ. и механика. — 2004. — Т. 68, Вып. 3. — С. 516-527.
7. Чебаков М. И. Трёхмерная контактная задача для слоя с учётом сил трения в области контакта / М. И. Чебаков // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. — 2002. — №6. — С. 59-68.
8. Sundaram Naravan Mechanics of advancing pin-loaded contact with friction / Naravan Sundaram, T. N. Farris // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2010. — Vol. 58, Issue 11. — P. 1819-1833.
9. Александров А. И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними / А. И. Александров // Математичні методи і фізико-механічні поля. — 2013. — Т. 56, №3. — С. 29-42.
10. Александров А. И. Решение задач о контакте упругих тел с использованием нелинейных интегральных уравнений / А. И. Александров // Доп. Національної академії наук України. — 2012. — №11. — С. 47-52.
11. Kalker J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies / J. J. Kalker // ZAMM. — 1977. — В. 57, Н. 5. — P. T3-T17.
12. Александров А. И. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости / А. И. Александров, Ю.М. Стреляев // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2014. — №3(7). — С. 36-40.
13. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1984. — 752 с.
14. Александров А. И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений / А. И. Александров. —

Днепропетровск, 1989. — 74 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т технической механики ; 89-2).

15. Ланкастер П. Теория матриц / П. Ланкастер. — М. : Наука, 1978. — 280 с.
16. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора ; под ред. Р. В. Гольдштейна. — М. : Мир, 1989. — 510 с.

REFERENCES

1. Kravchuk, A.S. (2009), “Variational method in contact problems. State of problem, directions of development”, *Prikladnaia matematika i mekhanika*, issue 73, no. 3, pp. 492-502.
2. Reina, S., Dini, D., Hills, D.A. and Lida, Y. (2011), “A quadratic programming formulation for the solution of layered elastic contact problems: Example applications and experimental validation”, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 30, issue 3, pp. 236-247.
3. Galanov, B.A. (1981), “On an approximate solution of some problems for two bodies elastic contact”, *Izvestiya AN USSR, Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 5, pp. 61-67.
4. Galanov, B.A. (1985), “Method of boundary equations of Hammerstein kind for contact problems of linear elasticity in case unknown contact areas”, *Prikladnaia matematika i mekhanika*, vol. 49, issue 5, pp. 827-835.
5. Aleksandrov, V.M., Kalker, J.J. and Pozharskii, D.A. (1999), “Three-dimensional contact problem for a two-layered elastic base with an unknown contact area”, *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 4, pp. 51-55.
6. Aleksandrov, V.M. and Pozharskii, D.A. (2004), “Three-dimensional contact problems with friction and non-linear roughness taken into account”, *Prikladnaia matematika i mekhanika*, vol. 68, issue 3, pp. 516-527.
7. Chebakov, M.I. (2002), “Three-dimensional contact problem for a layer with allowance for friction in a contact area”, *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 6, pp. 59-68.
8. Sundaram, N. and Farris, T.N. (2010), “Mechanics of advancing pin-loaded contacts with friction”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 58, issue 11, pp. 1819-1833.
9. Alexandrov, A.I. (2013), “Method of the solution for three-dimensional contact problem of interaction two elastic bodies in presence of friction”, *Mathematical Methods and Physicomechanical Fields*, vol. 56, no. 3, pp. 29-42.
10. Alexandrov, A.I. (2012), “Solution of problems for contact of elastic bodies by use non-linear integral equations”, *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, no. 11, pp. 47-52.
11. Kalker, J.J. (1977), “A survey of the mechanics of contact between solid bodies”, *ZAMM*, band 57, heft 5, pp. 3-17.
12. Alexandrov, A.I. and Streliaiev, Y.M. (2014), “Nonlinear boundary integral equation’s method for elastic contact problems”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 3(7), pp. 36-40.
13. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1984), *Funktsionalnyi analiz* [Functional analysis], Nauka, Moscow.
14. Alexandrov, A.I. (1989), *Reshenie zadach kontaktного взаимодействия упругих тел s ispol'zovaniem nelineinykh operatornykh uravnenii* [Solution of elastic contact problems by use non-linear operator equations], The Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Technical Mechanics, Dnepropetrovsk.
15. Lancaster, P. (1978), *Teoriya matrits* [The theory of matrices], Nauka, Moscow.
16. Johnson, K. (1989), *Mekhanika kontaktного взаимодействия* [Contact Mechanics], Translated by Naumov and Spektor, Mir, Moscow.