

УДК 519.6

МОДЕЛЬ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА

Алатемнех Х. Х., аспірант, Аль-Атемнех Б. Г. М., аспірант, Аль-Омарі М. А. В., аспірант,
Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

s.choporoff@znu.edu.ua

У роботі розглянута модель напружено-деформованого стану зубчастого колеса. Проведено аналіз циліндричних зубчастих коліс у двох статичних випадках: 1) навантаження полюса зубця; 2) навантаження верхівки зубця. На базі теорії R-функцій розроблено функціональну модель зубчастого колеса. Для аналізу напружено-деформованого стану зубчастого колеса використано метод скінченних елементів.

Ключові слова: зубчасте колесо, R-функція, метод скінченних елементів, напружено-деформований стан.

МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА

Алатемнех Х. Х., аспірант, Аль-Атемнех Б. Г. М., аспірант, Аль-Омарі М. А. В., аспірант,
Чопоров С. В., к. т. н., доцент

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

s.choporoff@znu.edu.ua

В работе рассмотрена модель напряженно-деформированного состояния зубчатого колеса. Проведен анализ цилиндрических зубчатых колес в двух статических случаях: 1) нагрузка полюса зуба; 2) нагрузка вершины зуба. На базе теории R-функций разработана функциональная модель зубчатого колеса. Для анализа напряженно-деформированного состояния использован метод конечных элементов.

Ключевые слова: зубчатое колесо, R-функция, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

STRESS-STRAIN MODEL FOR GEARS

Alatamneh H. K. M., postgraduate student, Al-Atamneh B. G. M., postgraduate student,
Al-Omari M. A. W., postgraduate student,
Choporov S. V., Ph. D. in Engineering, Associate Professor

*Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine*

s.choporoff@znu.edu.ua

This paper describes stress-strain model for gears in three dimensions. We use functional approach and V.L. Rvachev's theory of R-functions for geometrical modeling of gears. The finite element method is used in stress-strain modeling. Used FEM-meshes are unstructured hexahedral element meshes. Gears are meshed by superposition method with an isomorphism technique. Examples are given that demonstrate the quality of models.

The paper consists six sections. The first section is introduction. The introduction describes urgency of the study. The second section contains literature review. In the third section, we derive geometrical model of a gear. The fourth section describes superposition method with isomorphism technique for implicit defined solids. In the fifth section, we describe the finite element model and numerical examples. In this section, we study gear of helicopter's engine in two static cases: 1) force in pole of the tooth; 2) force in top of the tooth. Displacements and stresses are compared for different temperature modes. The last section is conclusion.

A geometric object is an abstract object. It provides necessary information about a shape of a solid. There are several ways to define a geometric object. These ways are methods and approaches for modeling of geometric objects. These methods and approaches also called representation schemes following Requicha. Constructive solid geometry, boundary representation and functional approach are most common used representation schemes.

A very general method for defining a set of points is to specify some predicate that can be evaluated for any point of space. In other words, the set of points is defined implicitly. The simplest form of such predicate is the condition on the

sign of a real-value function. Assume that a set of points of some simple solid (e.g. sphere, box, etc.) defined implicitly. Functions that are more complex can be employed to define constructively more complex geometric shapes. V.L. Rvachev proposed implicit functions, which are equivalent to standard set operations (union, intersection, negation). These functions are called R-functions. In this paper, we consider R-functions based geometrical model for gear. Number of teeth and reference diameter or the module of gear are parameters of the geometrical model.

Triangles, quadrilaterals and hexagons are most popular finite elements in planar tasks of contact mechanics. Tetrahedrals and hexahedrals are most popular finite elements in three-dimensional space. Finite element grids separated on structured, block-structured and unstructured grids. Quadrilateral and hexahedral element meshes are the meshes of choice for many applications. These types of meshes have greater numerical quality respectively to triangular and tetrahedral meshes. Block-decomposition, superposition and the spatial twist continuum methods are common used for generation of hexahedral element meshes.

Superposition method starts with initial mesh that can be easy obtained for arbitrary solid. There are five steps to obtain unstructured hexahedral mesh: 1) generate initial mesh; 2) get normals for nodes on the surface of the initial mesh; 3) find isomorphic points on the solid's boundary; 4) cover all characteristic vertices; 5) generation of hexahedral elements in the boundary region. Note, implicit representation of a solid have form of real-value function. This function is greater than zero in inner points, less than zero in outer points and equal to zero in border points. Thus, we can start with uniform mesh and use cells, which have only inner points. Secondly, we obtain isomorphic points on the border of the solid sing binary search method. Meshes that we can obtain in this manner are close to uniform, but we can use quad-tree method to obtain nonuniform initial meshes.

Key words: gear, R-function, implicit function, the finite element method, stress-strain state.

1. ВСТУП

Дослідження міцності та довговічності є важливою складовою проектування інженерних конструкцій та об'єктів сучасної техніки. Сьогодні в цьому напрямку широко застосовується комп'ютерне моделювання, яке дозволяє замінити тривале і вартісне дослідження зразка продукції вивченням властивостей відповідних математичних моделей.

У сучасній техніці одним з найбільш поширених видів зубчастої передачі є зачеплення евольвентою. Використання зубчастих коліс поширене в різних трансмісійних механізмах та двигунах. Отже, моделювання зносу таких зачеплень (особливо в умовах підвищених навантажень) є важливою частиною моделювання механізму загалом.

2. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У результаті поширення зубчастих коліс представлено досить велику кількість наукових робіт, присвячених їх дослідженню. Роботи в напрямку трибомеханіки [1-4] вивчають питання довговічності механізмів в умовах динамічної експлуатації. Чисельному дослідженню динамічної та/або контактної взаємодії присвячені роботи [5-9]. Необхідно відзначити, що в практиці чисельного аналізу зубчастих коліс найбільш поширеним є метод скінченних елементів. Тому актуальною є розробка методів геометричного моделювання та дискретизації для подальшого чисельного визначення запасу міцності зубчастих коліс.

Геометричний об'єкт – абстракція, яка надає всю необхідну інформацію про форму деякого тіла. Прикладами геометричних об'єктів слугують і такі прості об'єкти, як балки та гайки, і такі складні, як двигуни та оболонки ракетноносіїв. Існує багато підходів і методів для моделювання геометричних об'єктів у системах автоматизованого проектування. За класифікацією, запропонованою А.Г. Реквичою (A.G. Requicha) [10], такі підходи і методи називаються схемами подання. Сьогодні найбільш поширеними є граничне подання, твердотільне моделювання та функціональний підхід.

Граничне подання (boundary representation) є одним з історично перших комп'ютерних підходів [11], яке розглядає геометричний об'єкт як набір його границь (обмежуючих поверхонь). Таке подання найбільш поширене у комп'ютерній графіці та стало основою графічного ядра ROMULUS і системи Parasolid. Проте практичне визначення границь тіла нестандартної форми є досить складною задачею.

Твердотільне моделювання (або конструктивна блокова геометрія – CSG, constructive solid geometry) засноване на використанні моделей базових примітивів та логічних операцій над ними. Процес моделювання базується на побудові CSG-дерева – графа примітивів і операцій над ними. Можна зазначити, що приблизно 63% деталей інженерних об'єктів може моделювати CSG-система, заснована на використанні тільки паралелепіпедних і

циліндричних примітивів [12]. Проте моделювання нестандартних об'єктів та пошук границь у таких системах є досить складними задачами.

В основу функціонального підходу покладено ідею використання апарату математичних функцій і перетворень для подання геометричного об'єкту. Найбільш поширеним тут є використання неявних функцій. Для логічного конструювання на практиці застосовуються операції заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції, визначені для дійсних функцій – R-функції академіка В.Л. Рвачова [13-17]. Проте практичне використання потребує розробки апарату функцій для моделювання нових геометричних об'єктів (розширення бази примітивів) і розробки способів побудови дискретних моделей для використання чисельних методів.

Одним з найбільш поширених чисельних методів для дослідження напружено-деформованого стану є метод скінченних елементів (МСЕ). МСЕ базується на апроксимації шуканої функції сумою кусково-неперервних функцій, визначених на елементарних областях – скінченних елементах певної форми. Найбільш поширеними формами елементів є трикутники і чотирикутники (2D), тетраедри і шестигранники (3D). Практичною перевагою чотирикутників і шестигранників відносно симплексів є нелінійність функцій форми. Тому в роботі використані шестигранні елементи. Для генерації сіток скінченних елементів найбільш поширені такі методи [18]: метод блокової декомпозиції, фронтальні (прямі та непрямі) методи, метод суперпозиції тощо. Їх аналіз [19] показує, що при функціональному підході найбільш перспективним є розвиток способів дискретизації на базі методу суперпозиції.

3. МОДЕЛЬ ГЕОМЕТРИЧНОГО ОБ'ЄКТА

Однією з проблем, що виникають при моделюванні профілю зуба на базі функціонального підходу, є складність знаходження неявного представлення функції профілю зуба. Можливим вирішенням цієї проблеми є використання апроксимації дугами кіл. Основні константи, які визначають профіль зубчастого колеса, можна подати формулами

$$d = m \cdot z, \quad d_a = m \cdot (z + 2), \quad d_f = m \cdot (z - 2,5),$$

$$s = \frac{\pi}{2} m, \quad r = \frac{d}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{9}, \quad r_b = r \cos(\alpha),$$

$$N_x = -r_b \sin(\alpha), \quad N_y = r_b \cos(\alpha), \quad N_p = r \sin(\alpha),$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{z},$$

де m – модуль зубчастого колеса; z – кількість зубців; d – ділильний діаметр; d_a – діаметр вершин; d_f – діаметр впадин зуба; s – товщина зуба; r – радіус початкової окружності; r_b – радіус основної окружності; N_x і N_y – зміщення центрів кіл, для апроксимації евольвенти; N_p – радіус окружностей, що апроксимують евольвенту; φ – кут повороту зуба.

Функція, що моделює профіль зубчастого колеса, матиме вигляд:

$$t(x, y) = F_{disk} \left(x, y, N_p, N_x, N_y \right) \wedge F_{disk} \left(r_x \left(x, y, \frac{r}{s} \right), r_y \left(x, y, \frac{r}{s} \right), N_p, -N_x, N_y \right),$$

$$g(x, y) = F_{disk} \left(x, y, \frac{d_f}{2}, 0, 0 \right) \vee t \left(r_x(x, y, 0), r_y(x, y, 0) \right) \vee$$

$$\vee t \left(r_x(x, y, \varphi), r_y(x, y, \varphi) \right) \vee t \left(r_x(x, y, 2\varphi), r_y(x, y, 2\varphi) \right) \vee \dots \vee$$

$$\vee t \left(r_x(x, y, 2\pi - \varphi), r_y(x, y, 2\pi - \varphi) \right),$$

$$gear(x, y) = g(x, y) \wedge F_{disk}\left(x, y, \frac{d_a}{2}, 0, 0\right),$$

де $x \wedge y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ – R-кон'юнкція [1-5]; $x \wedge y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ – R-диз'юнкція [13-17]; $F_{disk}(x, y, r, x_0, y_0) \equiv r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$ – функція, яка відповідає колу радіуса r з центром у точці $(x_0; y_0)$; $gear(x, y)$ – R-функція, яка визначає профіль зубчастого колеса (приклад картини ліній рівня на рис. 1).

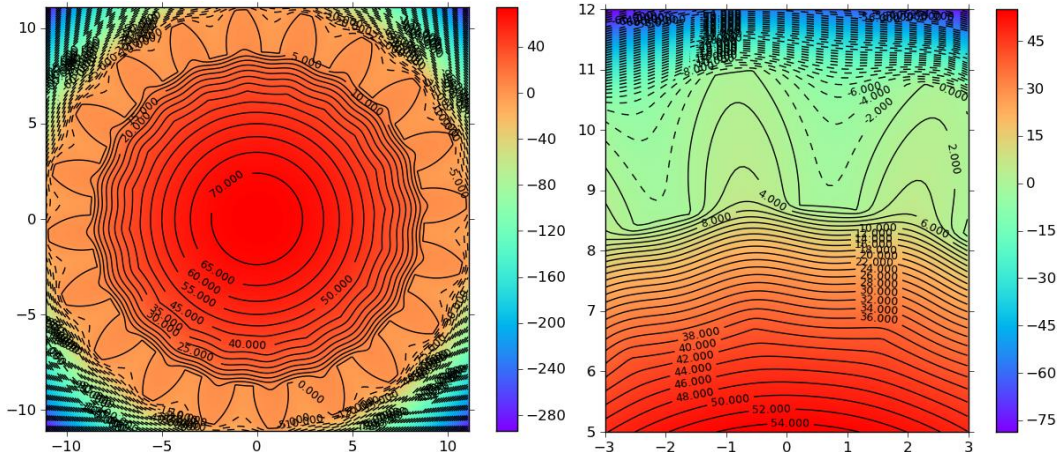


Рис. 1. Приклад картини ліній рівня профілю зубчастого колеса

4. СПОСІБ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ТІЛ, ПОДАНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО

Нехай тіло Ω представлено неявно: геометричне місце точок простору, які належать до тіла, визначене нерівністю $F(x, y, z) \geq 0$. При цьому $F(x, y, z) > 0$ у внутрішніх точках, $F(x, y, z) = 0$ у граничних і $F(x, y, z) < 0$ у зовнішніх точках. Функція $F(x, y, z)$ може бути отримана і як результат розв'язку зворотної задачі аналітичної геометрії, і як результат побудови деякої геометричної моделі (наприклад, результат інтерполяції деякого масиву точок або результат агрегування більш простих функцій методом R-функцій).

Використання методу R-функцій при неявному поданні тіла Ω вимагає урахування особливостей такого подання при розробці способів одержання дискретних моделей. Неявне подання дає правило для перевірки приналежності точки до Ω , однак не дає правило генерації системи точок і топології елементів, що утворюють Ω . Отже, метод суперпозиції разом із сітковим методом і технікою ізоморфізму [20-21] на кроці адаптації прикордонного шару елементів є більш прийнятним як базовий відносно до інших методів генерації сіток шестигранних елементів. Тоді загальна послідовність дій, необхідних для одержання дискретного подання тіла, заданого неявною функцією, така: 1) формування початкової сітки; 2) визначення нормалей до граничних вузлів; 3) пошук точок на границі; 4) врахування характерних точок; 5) формування елементів.

1. Формування початкової сітки. На першому кроці для формування початкової сітки достатньо покрити область рівномірною сіткою із кроком h і визначити значення R-функції у вузлах сітки. Потім послідовно відсівати елементи, у вузлах яких є зовнішні точки, або які не відповідають критерію близькості до границі області (на відстані $\Delta = 0,5h$ є зовнішні точки).

Розмір комірки h може бути обраний довільно, але повинен бути меншим від мінімальної геометричної особливості об'єкта Ω [18].

Нехай $S = (V, E)$ – вихідна сітка, де $V = \{v_i = (x_i, y_i, z_i)\}$ – множина вузлів (упорядкованих трійок координат), $E = \{e_j = (i_{j0}, i_{j1}, i_{j2}, i_{j3}, i_{j4}, i_{j5}, i_{j6}, i_{j7})\}$ – множина впорядкованих послідовностей номерів вузлів, які формують комірки. Тоді початкову сітку M визначимо формулою

$$M = I(S),$$

де I – оператор, який повертає вузли внутрішніх елементів і самі внутрішні елементи. При цьому вузол буде вважатися внутрішнім, якщо на відстані $0,5h$ немає зовнішніх або граничних точок:

$$i_{vertex}(v) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \forall \delta \in (0; 0,5] \quad F(v \pm \delta h) > 0, \\ 0, & \text{якщо } \exists \delta \in (0; 0,5]: \quad F(v \pm \delta h) \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

де v – вузол вихідної сітки.

Відповідно, комірка e_j вихідної сітки буде вважатися внутрішньою (належати початковій сітці), якщо всі її вузли внутрішні:

$$i_{cell}(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \forall i_{jk} \in e_j \quad i_{vertex}(v_{i_{jk}}) = 1, \\ 0, & \text{якщо } \exists i_{jk} \in e_j: \quad i_{vertex}(v_{i_{jk}}) = 0. \end{cases}$$

Тоді оператор $I(S)$ можна подати у вигляді:

$$I(S) = \{v_i \text{ якщо } \exists e_j \supset v_i: i_{cell}(e_j) = 1; e_k \text{ якщо } i_{cell}(e_k) = 1\}.$$

Границя отриманої в такий спосіб початкової сітки є багатогранником (багатокутником у плоскій постановці), кожна грань якого є чотирикутником (відрізком). Отже, її можна розглядати як неструктуровану сітку чотирикутних елементів Q для якої може бути отримана ізоморфна сітка Q' на границі тіла. Для одержання ізоморфної сітки необхідно для кожного вузла $v \in Q$ визначити вузол на границі тіла $v' \in Q'$, і, відповідно, для кожного ребра $(v, w) \in Q$ – ребро $(v', w') \in Q'$. Отже, кожному чотирикутнику $q \in Q$ буде відповідати грань на границі тіла $q' \in Q'$, які спільно визначають шестигранний елемент.

2. Визначення нормалей до граничних вузлів. На другому кроці до кожного граничного вузла початкової сітки визначається нормаль як середнє арифметичне нормалей до суміжних у вузлі граней:

$$N(v) = \frac{1}{k} \sum_{f_i \supset v} n_{f_i}, \quad (2)$$

де k – кількість граней суміжних у вузлі v ; n_{f_i} – нормаль до i -ї грані, що містить v .

На цьому етапі можуть виявитися конфігурації початкової сітки, при яких нормалі будуть мати нульову довжину або їх напрямок буде приводити до одержання вироджених елементів. Уникнути таких ситуацій можна підбором кроку h . Проте, оскільки при формуванні початкової сітки були виключені з розгляду елементи, що перебувають на відстані ближче $0,5h$ до границі тіла, то для автоматизації процесу усунення небажаних конфігурацій можна скористатися подвійним згущенням початкової сітки (рис. 2).

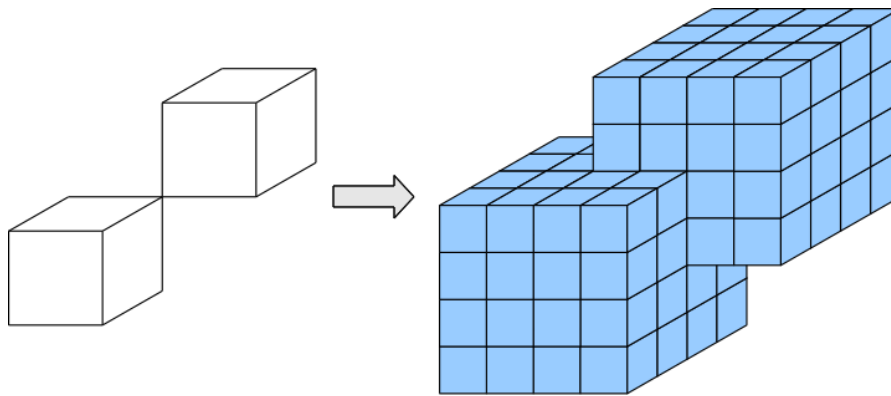


Рис. 2. Схема усунення ситуації, що приводить до нульової нормалі

3. Пошук точок на границі. За допомогою отриманих нормалей на третьому кроці на границі об'єкта Ω визначаються відповідні ізоморфні вузли, як перетинання променя, що виходить уздовж нормалі із граничного вузла початкової сітки, із границею Ω . Необхідно відзначити, що R -функція, що описує Ω , додатна усередині, обертається в нуль на границі й від'ємна поза Ω , що робить зручним для реалізації й використання бінарний пошук.

4. Врахування характерних точок. На четвертому кроці відбувається врахування характерних точок (геометричних особливостей, концентраторів напружень тощо), тому що їх втрата може призводити до значної втрати точності при використанні отриманої дискретної вистави чисельними методами. При цьому характерні точки можуть бути враховані як за допомогою техніки переміщення необхідного граничного вузла, так і за допомогою корекції напрямку нормалі відповідного вузла початкової сітки й наступної рероекції.

5. Формування елементів. На останньому кроці алгоритму за допомогою техніки ізоморфізму формуються елементи: шляхом з'єднання вузлів багатогранника з відповідними вузлами на границі об'єкта Ω отримуються шестигранники, що розбивають граничний шар області Ω (рис. 3).

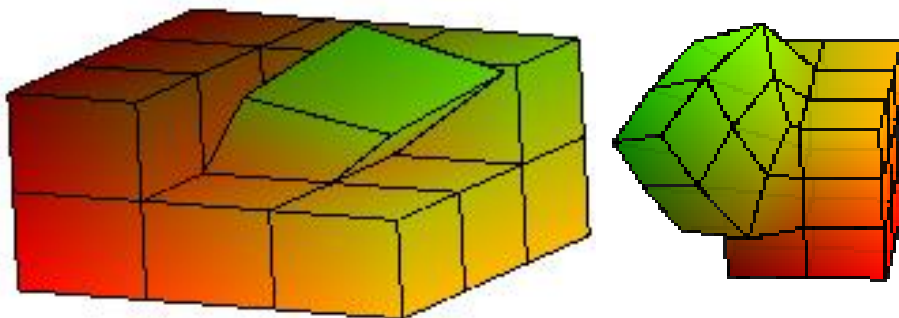


Рис. 3. Побудова шестигранного елемента граничного шару

Слід зазначити, що в результаті застосування описаного підходу генеруються елементи приблизно однакового розміру. Однак у результаті виконання вимоги щодо співвідношення розміру комірки початкової сітки й найменшої геометричної особливості тіла отримана сітка може бути надміру густою. Поширеним способом вирішення цієї проблеми є побудова адаптивної початкової сітки.

Необхідно відзначити, що описаний підхід до побудови дискретного подання шестигранними елементами може бути використаний і в двовимірній постановці для одержання дискретного подання чотирикутними елементами. У цьому випадку границею початкової сітки буде багатокутник (рис. 4), вузли якого з'єднуються з ізоморфними на границі області.

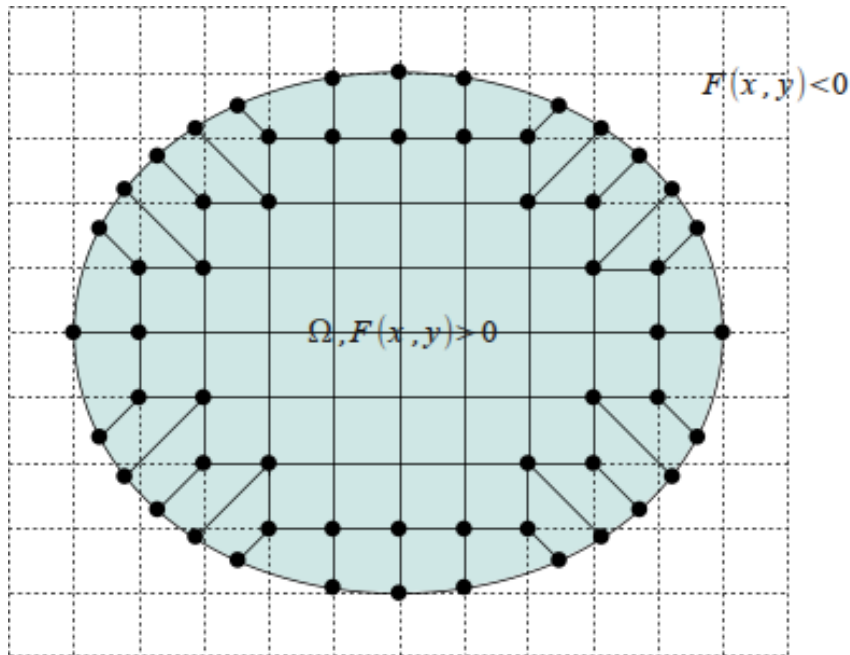


Рис. 4. Дискретизація приграничного шару плоского об'єкта

5. СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНА МОДЕЛЬ

Основна ідея метода скінченних елементів базується на тому, що шукану неперервну величину (наприклад, температуру, переміщення тощо) можна апроксимувати кусково-неперервними функціями, які визначені на елементарних областях – скінченних елементах, що не перетинаються та утворюють дискретну модель області. Для визначення значень шуканої неперервної величини у вузлах дискретної моделі будується система лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця якої називається глобальною матрицею жорсткості.

Процес побудови глобальної матриці жорсткості називається ансамблюванням і є сумою локальних матриць жорсткості, що підпорядкована особливим правилам, – результатів інтегрування диференціального рівняння в матричній формі. Розмір глобальної матриці жорсткості дорівнює добутку кількості вузлів моделі на кількість степенів свободи.

Формула для обчислення локальної матриці жорсткості тривимірного тіла для дискретних моделей на базі шестигранних скінченних елементів при дослідженні напружено-деформованого стану матиме вигляд

$$[K^e] = \iiint_{V^e} B^T D B dx dy dz, \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & \dots & H_8 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_1 & \dots & H_8 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & H_1 & \dots & H_8 \end{bmatrix},$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix},$$

де H_i , ($i = \overline{1,8}$) – функції форми скінченного елемента; E – модуль пружності (модуль Юнга); ν – коефіцієнт Пуасона.

Отримана за запропонованою схемою дискретизації модель є неструктурованою, а елементи мають у загальному випадку довільну шестигранну форму (опуклість шестигранників гарантується способом дискретизації). Тому для інтегрування формули (3) на практиці застосовується ізопараметричне перетворення та квадратури Гауса.

Аналіз міцності зубчастого зчеплення можна виконати на основі дослідження напружено-деформованого стану зубця в двох випадках [22]: статичне навантаження полюса зубця та екстремальний випадок – статичне навантаження верхівки зубця в момент виходу зі зачеплення. Як параметри моделі вважатимемо модуль зубчастого колеса $m = 3$, кількість зубців $z = 33$, товщину колеса $w = 20$ мм, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0,27$. Припустимо, що вздовж лінії зчеплення діє рівномірний тиск 10 кгс/мм².

1. Навантаження полюса зубця. Характер розподілу переміщень для випадку навантаження полюса зубчастого колеса наведено на рис. 5. Відповідні до властивостей матеріалу екстремальні значення переміщень вузлів наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Екстремальні значення переміщень (навантаження полюса)

T, C°	E, кгс/мм ²	x, мм		y, мм		z, мм	
		Min	max	min	max	min	max
20	19000	-0,00666143	0,000969658	-0,0013947	0,00134418	-0,000347715	0,000347715
250	17500	-0,00723241	0,00105277	-0,00151425	0,0014594	-0,000377519	0,000377519
300	16800	-0,00753376	0,00109664	-0,00157734	0,0015202	-0,000393249	0,000393249
350	16200	-0,00781279	0,00113725	-0,00163576	0,00157651	-0,000407813	0,000407813

Значення інтенсивності напружень змінюється від $3,08194 \cdot 10^{-5}$ кгс/мм² до $11,827$ кгс/мм² (рис. 6). Розподіл значень компонент тензора напружень наведено в табл. 2. Використовуючи лінійну екстраполяцію, отримаємо, що значенню інтенсивності напружень границі текучості відповідатиме навантаження на полюс зубця, яке дорівнює $97,2351$ кгс/мм².

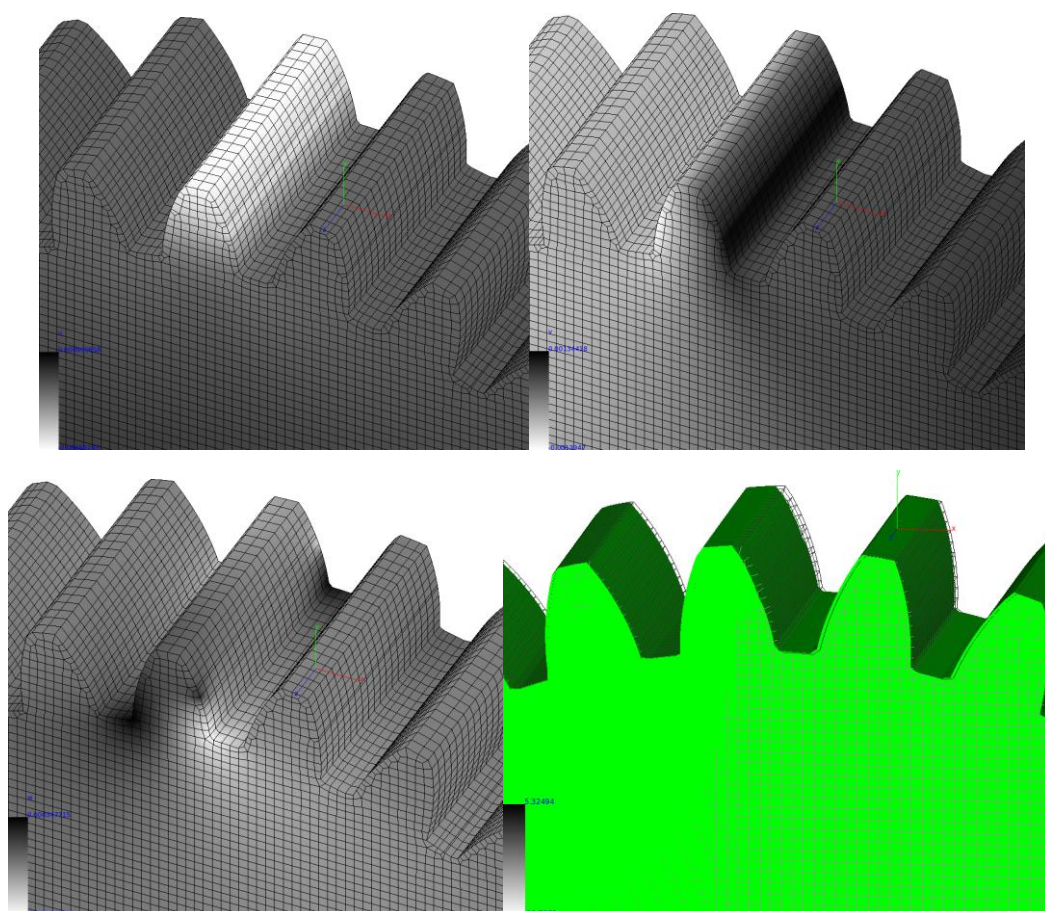


Рис. 5. Розподіл переміщень (навантаження полюса зубця)

Таблиця 2 – Розподіл значень компонент тензору напружень (навантаження полюса)

Компонента	min, кгс/мм ²	max, кгс/мм ²
σ_{xx}	-12,7932	5,32494
σ_{yy}	-7,18692	5,97741
σ_{zz}	-3,97735	2,78298
τ_{xy}	-4,56899	3,00157
τ_{yz}	-0,839652	0,839652
τ_{zx}	-0,386087	0,386087

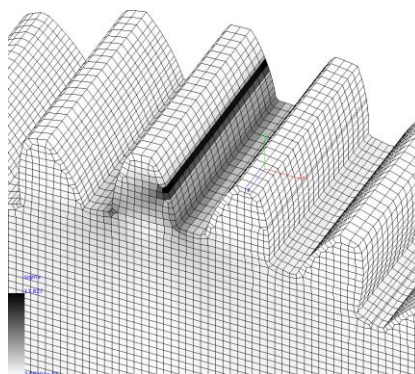


Рис. 6. Розподіл інтенсивності напружень (навантаження полюса зубця)

2. Навантаження верхівки зубця. Характер розподілу переміщень для випадку навантаження верхівки зубчастого колеса наведено на рис. 7. Відповідні до властивостей матеріалу екстремальні значення переміщень вузлів наведено в табл. 3.

Таблиця 3 – Екстремальні значення переміщень (навантаження верхівки)

T, C°	E, кгс/мм ²	x, мм		y, мм		z, мм	
		min	max	min	max	min	max
20	19000	-0,0131389	0,00103889	-0,00294565	0,00234295	-0,00068397	0,00068397
250	17500	-0,0142651	0,00112794	-0,00319814	0,00254377	-0,000742596	0,000742596
300	16800	-0,0148595	0,00117494	-0,00333139	0,00264976	-0,000773538	0,000773538
350	16200	-0,0154098	0,00121845	-0,00345478	0,0027479	-0,000802188	0,000802188

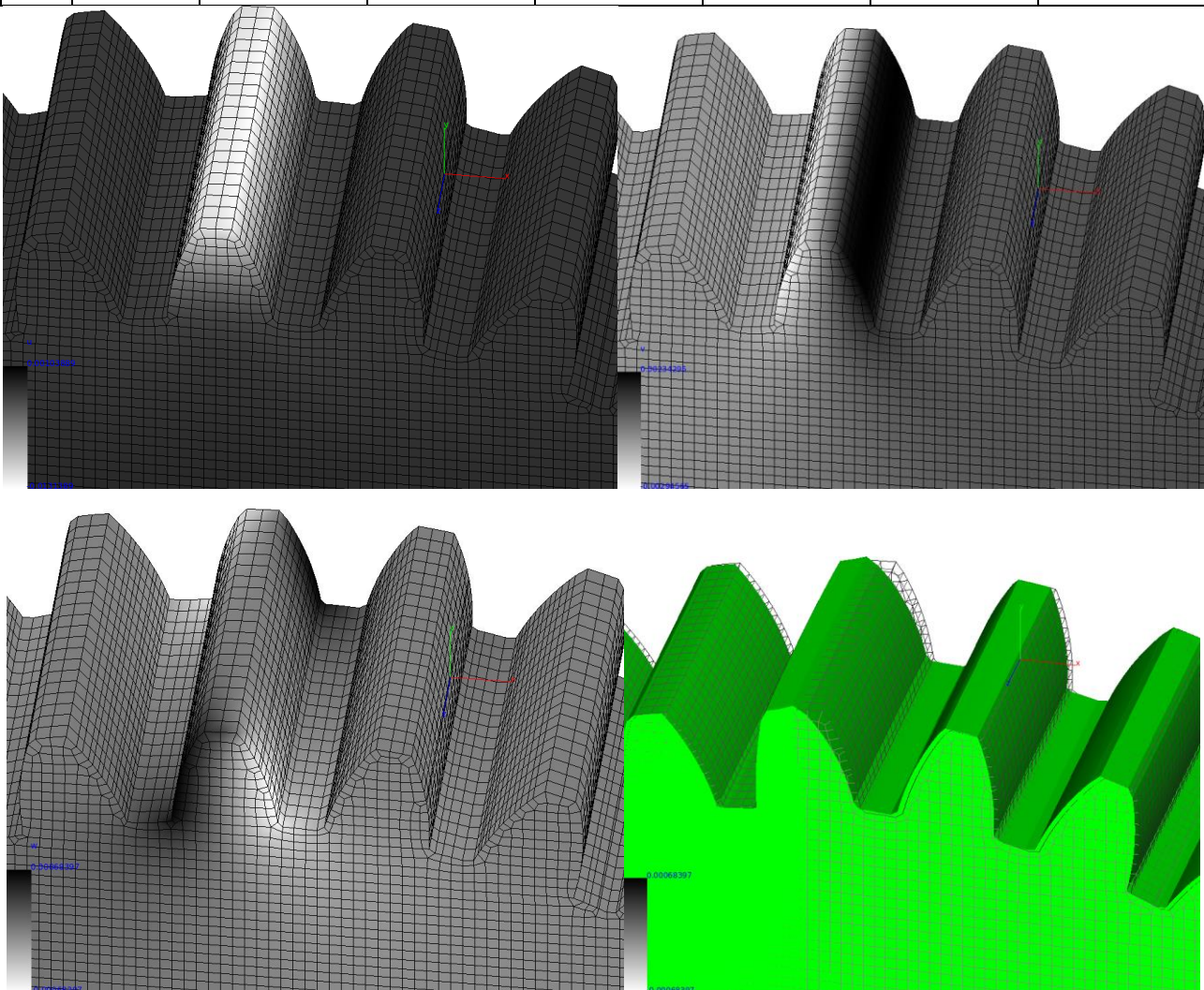


Рис. 7. Розподіл переміщень (навантаження верхівки зубця)

Значення інтенсивності напружень змінюється від $3,25885 \cdot 10^{-5}$ кгс/мм² до 13,1583 кгс/мм² (рис. 8). Розподіл значень компонента тензора напружень наведено в табл. 4. Використовуючи лінійну екстраполяцію, отримаємо, що значенню інтенсивності напружень границі текучості відповідатиме навантаження на верхівку зубця, яке дорівнює 87,3973 кгс/мм².

Таблиця 4 – Розподіл значень компонент тензора напружень (навантаження верхівки)

Компонента	min, кгс/мм ²	max, кгс/мм ²
σ_{xx}	-10,6978	7,53163
σ_{yy}	-13,6909	10,7109
σ_{zz}	-4,58761	4,24228
τ_{xy}	-6,5083	1,588
τ_{yz}	-0,653922	0,653922
τ_{zx}	-0,784393	0,784393

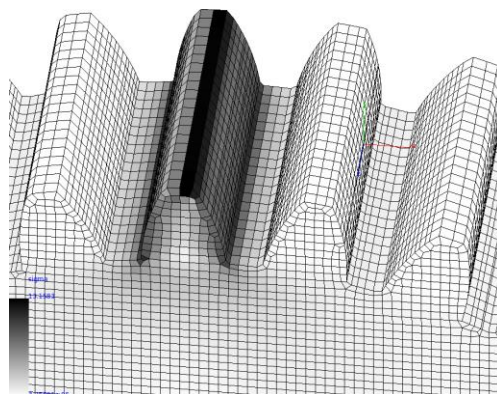


Рис. 8. Розподіл інтенсивності напружень (навантаження верхівки)

6. ВИСНОВКИ

Отже, розроблена модель зубастого колеса дозволяє виконувати скінченно-елементний аналіз напружено-деформованого стану колеса. Використання функціонального підходу дозволяє отримати параметризовану модель, яка може бути використана для побудови більш складних моделей геометричних об'єктів (різних механізмів на базі евольвентного зчеплення, наприклад, головних передач тощо). Запропонований метод генерації неструктурованих дискретних моделей на базі шестигранників дозволяє автоматизувати скінченно-елементний аналіз для розробки програмних засобів (свідectво про реєстрацію авторського права на твір [13]).

У результаті скінченно-елементного аналізу двох випадків навантаження зубця визначено характеристики напружено-деформованого стану зубчастого колеса. На основі результатів можна прогнозувати значення навантаження на зубець, які відповідатимуть границі текучості. З отриманих результатів також витікає, що границя текучості досягається при меншому навантаженні на верхівці зубця колеса ніж на його полюсі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Чернец М. В. Трибомеханика. Триботехника. Триботехнологии : монография в 3-х т. : Т 1 : Механика трибоконтактного взаимодействия при скольжении / М. В. Чернец, Л. П. Клименко, М. И. Пашечко, А. Невчас. — Николаев : НГТУ им. П.Могили, 2006. — 476 с.
2. Баранов А. В. Проблема оценки и износа сопряжений зубчатых колес транспортных колес машин и энергетического оборудования / А. В. Баранов, В. А. Вагнер, С. В. Тарасевич, Ю. А. Баранова, А. Н. Понамарьова // Ползуновский вестник. — 2010. — №1. — С. 99-105.

3. Гриб В. В. Решение триботехнических задач численными методами / В. В. Гриб. — М. : Наука, 1982. — 112 с.
4. Дроздов Ю. А. Трение и износ в экстремальных условиях : справочник / Ю. А. Дроздов, В. Г. Павлов. — М. : Машиностроение, 1986. — 224 с.
5. Atanasovska I. The Dynamic Behaviour of Gears with High Transmission Ratio / Ivana Atanasovska, Marija Vukšić Popović, Zorica Starčević // International Journal for Traffic and Transport Engineering. — 2012. — Vol. 2(2). — P. 153-160.
6. Atanasovska I. Finite Element Model for Stress Analysis and Nonlinear Contact Analysis of Helical Gears / Ivana Atanasovska, Vera Nikolić-Stanojlović, Dejan Dimitrijević, Dejan Momčilović // Scientific Technical Review. — 2009. — Vol. LVIX. — No. 1. — P. 61-69.
7. Dimitrijević D. Dynamic analysis of the stress and strain state of the spur gear pair / D. Dimitrijević, V. Nikolić, I. Atanasovska // Scientific Technical Review. — 2007. — Vol. LVII(3-4). — P. 20-25.
8. Nikolić V. Dynamic Model for the Stress and Strain State Analysis of a Spur Gear Transmission / Vera Nikolić, Čemal Dolićanin, Dejan Dimitrijević // Journal of Mechanical Engineering. — 2012. — Vol. 58. — P. 56-67.
9. Kapoor N. Design and Stress Strain Analysis of Composite Differential Gear Box / Nitin Kapoor, Virender Upneja, Ram Bhoor and Puneet Katyal // International Journal of Science, Engineering and Technology Research (IJSETR). — 2014. — Vol. 3, Issue 7. — P. 1881-1895.
10. Requicha A. G. Representation for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems / A. G. Requicha // Computer Surveys. — 1980. — Vol. 12, No. 4. — P. 437-464.
11. Farin G. Handbook of computer-aided geometric design / G. Farin, J. Hoschek, M. S. Kim. — Amsterdam : Elsevier Science B.V., 2002. — 848 p.
12. Agoston M. K. Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms / Max K. Agoston. — London : Springer-Verlag, 2005. — 959 p.
13. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. — К. : Наукова думка, 1982. — 552 с.
14. Рвачев В. Л. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций / В. Л. Рвачев, А. В. Толок, Р. А. Уваров, Т. И. Шейко // Вісник Запорізького державного університету. — 2000. — № 2. — С. 119-130.
15. Рвачев В. Л. Введение в теорию R-функций / В. Л. Рвачев, Т. И. Шейко // Проблемы машиностроения. — 2001. — Т. 4, № 1-2. — С. 46-58.
16. Рвачев В. Л. Математические модели движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам / В. Л. Рвачев, К. В. Максименко-Шейко // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2003. — Т. 46, №2. — С. 81-88.
17. Кравченко В. Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях / В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев. — М. : Физматлит, 2006. — 416 с.
18. Thompson J. F. Hand book of grid generation / Joe F. Thompson, Bharat K. Soni, Nigel P. Weatheril. — New York : CRC Press, 1999. — 1200 p.
19. Снежкова Л. С. Методы и подходы к моделированию геометрических объектов в контактных задачах / Л. С. Снежкова, С. В. Чопоров // Вісник Запорізького національного університету : Фізико-математичні науки. — 2014. — №1. — С. 171-195.
20. Schneiders R. A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders // Engineering with Computers. — 1996. — №12. — P. 168-177.

21. Schneiders R. Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes / R. Schneiders, R. Schindler, F. Weiler // 5th Annual International Meshing Roundtable. — 1996. — P. 205-216.
22. Андросов А. А. Зубчатые передачи с эллиптическим профилем зуба как элемент научно-технического прогресса / А. А. Андросов, Г. П. Гребенюк // САПР и графика. — 2005. — №1,2(8). — С. 94-96.
23. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 53829. Комп'ютерна програма «Система автоматизованого проектування «qMesher» / С. В. Чопоров, С. І. Гоменюк, С. М. Гребенюк, А. О. Лісняк. — Дата реєстрації 24.02.2014.

REFERENCES

1. Chernetc, M.V., Klimenko, L.P., Pashechko, M.I. and Nevchas, A. (2006), *Tribomekhanika. Tribotekhnika. Tribotekhnologii* [Tribomechanics. Tribotechnics. Tribotechnologies], Vol. 1, *Mekhanika tribokontaktного vzaimodeistviia pri skolzhenii* [Mechanics of tribocontact interaction sliding], NGGU im. P.Mogili, Nikolaev, Ukraine.
2. Baranov, A.V., Vagner, V.A., Tarasevich, S.V., Baranova, Iu.A. and Ponamarova, A.N. (2010), “Deterioration of interfaces of cogwheels transport cars and the equipment powers”, *Polzunovskii vestnik*, no. 1, pp. 99-105.
3. Grib, V.V. (1982), *Reshenie tribotekhnicheskikh zadach chislennymi metodami* [Numerical Solution of Tribomechanical Problems], Nauka, Moscow.
4. Drozdov, Iu.A. and Pavlov, V.G. (1986), *Trenie i iznos v ekstremalnykh usloviakh: spravochnik* [Friction and wear in extreme environments: a handbook], Mashinostroenie, Moscow.
5. Atanasovska, I., Popović, M.V. and Starčević Z. (2012), “The Dynamic Behaviour of Gears with High Transmission Ratio”, *International Journal for Traffic and Transport Engineering*, vol. 2(2), pp. 153-160.
6. Atanasovska, I., Nikolić-Stanojlović, V., Dimitrijević, D. and Momčilović, D. (2009), “Finite Element Model for Stress Analysis and Nonlinear Contact Analysis of Helical Gears”, *Scientific Technical Review*, vol. LVIX, no. 1, pp. 61-69.
7. Dimitrijević, D., Nikolić, V. and Atanasovska, I. (2007), “Dynamic analysis of the stress and strain state of the spur gear pair”, *Scientific Technical Review*, vol. LVII(3-4), pp. 20-25.
8. Nikolić, V., Dolićanin, Ć. and Dimitrijević, D. (2012), “Dynamic Model for the Stress and Strain State Analysis of a Spur Gear Transmission”, *Journal of Mechanical Engineering*, vol. 58, pp. 56-67.
9. Kapoor, N., Upneja, V., Bhool, R. and Katyal, P. (2014), “Design and Stress Strain Analysis of Composite Differential Gear Box”, *International Journal of Science, Engineering and Technology Research (IJSETR)*, vol. 3, issue 7, pp. 1881-1895.
10. Requicha, A.G. (1980), “Representation for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems”, *Computer Surveys*, vol. 12, no. 4, pp. 437-464.
11. Farin, G., Hoschek, J and Kim, M.S. (2002), *Handbook of computer-aided geometric design*, Elsevier Science B.V., Amsterdam.
12. Agoston, M.K. (2005), *Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms*, Springer-Verlag, London.
13. Rvachev, V.L. (1982), *Teoriia R-funktsii i nekotorye ee prilozheniia* [Theory of R-functions and it applications], Naukova dumka, Kiev.

14. Rvachev, V.L., Tolok, A.V., Uvarov, R.A. and Sheiko, T.I. (2000), "New approaches to the construction of three-dimensional equations of the locuses using R-functions", *Visnyk Zaporizkoho derzhavnoho universytetu*, no. 2, pp. 119-130.
15. Rvachev, V.L. and Sheiko, T.I. (2001), "Theory of R-functions: introduction", *Problemy mashinostroeniia*, vol. 4, no. 1-2, pp. 46-58.
16. Rvachev, V.L. and Maksimenko-Sheiko, K.V. (2003), "Mathematical models of the flow of incompressible viscous fluid by a twisted pipes", *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia*, vol. 46, no. 2, pp. 81-88.
17. Kravchenko, V.F. and Rvachev, V.L. (2006), *Algebra logiki, atomarnye funktsii i veivlety v fizicheskikh prilozheniakh* [Algebra of logic, atomic functions and wavelets in physical applications], Fizmatlit, Moscow.
18. Thompson, J.F. Soni, B.K. and Weatheril, N.P. (1999), *Hand book of grid generation*, CRC Press, New York.
19. Snezhkova, L.S. and Choporov, S.V. (2014), "Methods and approaches for modeling of geometric objects in contact mechanics", *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: Fizyko-matematychni nauky*, no. 1, pp. 171-195.
20. Schneiders, R. (1996), "A Grid-based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes", *Engineering with Computers*, no. 12, pp. 168-177.
21. Schneiders, R., Schindler, R. and Weiler, F. (1996), "Octree-based Generation of Hexahedral Element Meshes", *Proc. 5th Annual International Meshing Roundtable*, pp. 205-216.
22. Androsov, A.A. and Grebeniuk, G.P. (2005), "Gears with elliptical tooth profile as an element of scientific and technical progress", *SAPR i grafika*, no. 1,2(8), pp. 94-96.
23. Choporov, S.V., Homeniuk, S.I., Hrebeniuk, S.M. and Lisniak, A.O. License № 53829. *The Softwaer "Computer Aided Design "qMesher"* [software], Date of registration: 24.02.2014.

УДК 539.1:534.1

ВІСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ НЕЗАМКНЕНОЇ ЕЛЕКТРОПРУЖНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ПРУЖНОМУ ЗАКРІПЛЕННІ КРАЮ

Янчевський І. В., д. ф.-м. н., професор

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет,
вул. Петровського, 25, м. Харків, 61002, Україна*

yanchevsky@ukr.net

Представлено розв'язання задачі про нестационарні вісесиметричні коливання незамкненої сферичної оболонки з поляризованої за товщиною п'єзокераміки, край якої взаємодіє з тонким пружним кільцем. Для опису перехідних процесів конструктивного елемента, що розглядається, використовуються рівняння теорії тонких оболонок. Задоволення умов спряження оболонки та кільця здійснюється через введення системи додаткових механічних навантажень, для визначення яких задача зведена до чисельного розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра. Наведені деякі числові результати.

Ключові слова: незамкнена сферична електропружна оболонка, пружне кільце, нестационарні коливання, перетворення Лапласа.