

УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

¹Белова О. В., к. ф.-м. н., доцент, ²Кагадий Т. С., д. ф.-м. н., профессор,
³Щербина И. В., к. ф.-м. н., доцент

^{1,3}Национальная металлургическая академия Украины,
просп. Гагарина, 4, Днепропетровск, 49600, Украина

²Национальный горный университет,
просп. Карла Маркса, 19, г. Днепропетровск, 49600, Украина

okbelova@rambler.ru, sherbinaiv@ukr.net

С помощью метода возмущений решены плоские задачи теории упругости. Получено точное решение задачи для анизотропной пластины с круговым отверстием и приложенной периодической нагрузкой на его контуре, а также задачи об одноосном растяжении анизотропной пластины, ослабленной круговым отверстием. Последняя задача также решается асимптотическим методом. При этом получено решение в форме ряда по степеням выбранного малого параметра, который характеризует анизотропию. Показано, что первые члены разложения в ряд по степеням малого параметра полученного точного решения совпадают с полученным асимптотическим решением. Установлено, что в случае изотропного материала пластины это решение переходит в известное для задачи Кирша.

Ключевые слова: анизотропная пластина, асимптотический метод, круговое отверстие, криволинейная анизотропия.

ЕФЕКТИВНІСТЬ ВИКОРИСТАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ

¹Білова О. В., к. ф.-м. н., доцент, ²Кагадій Т. С., д. ф.-м. н., професор,
³Щербина І. В., к. ф.-м. н., доцент

^{1,3}Національна металургійна академія України,
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна

²Національний гірничий університет,
просп. Карла Маркса, 19, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна

okbelova@rambler.ru, sherbinaiv@ukr.net

За допомогою методу збурень розв'язані плоскі задачі теорії пружності. Отримано точне рішення задачі для анизотропної пластины з круговим отвором та доданим періодичним навантаженням на його контурі, а також задачі про одноосьове розтягуванні анизотропної пластины, ослабленої круговим отвором. Остання задача також розв'язується асимптотичним методом. При цьому отримано розв'язок у формі ряду за ступенями обраного малого параметра, який характеризує анизотропію. Показано, що перші члени розкладання в ряд за ступенями малого параметра отриманого точного розв'язку збігаються з отриманим асимптотичним розв'язком. Встановлено, що в разі ізотропного матеріалу пластины цей розв'язок переходить у відомий для задачі Кірша.

Ключові слова: анізотропна пластина, асимптотичний метод, круговий отвір, криволінійна анізотропія.

EFFICIENCY OF APPLICATION OF ASYMPTOTIC METHOD FOR SOLVING SOME PROBLEMS OF MECHANICS

Belova O., associate professor, Ph. D. in Physics and Math,
Kagadiy T., D. Sc. in Physics and Maths, professor,
Scherbina I., associate professor, Ph. D. in Physics and Math

^{1,3}National Metallurgical Academy of Ukraine,
Gagarin Avenue, 4, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

²National Mining University,
Karl Marx Avenue, 19, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

okbelova@rambler.ru, sherbinaiv@ukr.net

Designs from composite materials are widely used in modern mechanics. However the solution of tasks for such skew fields appears more complicated, than for isotropic. Therefore at the account of anisotropy, especially curvilinear, it is necessary to resort to simplification of allowing system the differential equations, i.e. on the basis of some a priori

geometrical or physical assumptions to build the simplified models, allowing discovering an analytical solution. Such solutions allow predicting the subsequent behaviour of a material or a design, to analyses behaviour of functions in singular points.

In the given paper it is considered to the solution of acute scientific problem of mechanics of the deformed solid, which is related to the research of contact problems of the theory of resiliency for orthotropic bodies with curvilinear anisotropy. To solve the problem the method of perturbation is applied which makes it possible to reduce boundary problems of the theory of the potential.

According to the example of the solution of model problems and on the basis of the comparison of the results with known data it was shown, that the developed approach is an effective means for the solution of new and complex problems of linear theory of elasticity. By means of a method of perturbation are solved flat tasks of the theory of an elasticity. The exact solution of a task for an anisotropic plate with a circular orifice and the enclosed periodic loading on its contour, and also tasks about a monoaxial stretching of the anisotropic plate loosened by a circular orifice is received. Last task also is solved an asymptotic method. Thus the solution in the form of some on degrees of the chosen small parameter which characterizes anisotropy is received. It is shown, that the first terms of an expansion in a series on degrees of small parameter of the received exact solution coincide with the received asymptotic solution. It is installed, that in case of an isotropic material of a plate this solution passes in known for task of Kirsh.

The problem on exactitude of the asymptotic methods applied to a solution of problems mechanics is rather actual. Far not always it is possible to compare an asymptotic solution of a problem to its exact solution to become clear effectiveness of an applied method. In the given paper the solution of a problem is received by several methods that enable to draw conclusions about effectiveness of the offered method of perturbations. Even in the most unfavorable, from the point of view of applied a method; a case of an isotropic plate the error of an approximation does not exceed 5%.

Key words: anisotropic plate, the asymptotic method, a circular hole, curved anisotropy.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о точности асимптотических методов, применяемых для решения задач механики, является весьма актуальным [1]. Далеко не всегда удается сравнить асимптотическое решение задачи с точным ее решением, чтобы выяснить эффективность применяемого метода [2]. В данной статье получено решение задачи несколькими методами, что дает возможность сделать выводы об эффективности предложенного метода возмущений.

1. АНИЗОТРОПНАЯ ПЛАСТИНКА С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ПРИЛОЖЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ НА КОНТУРЕ

Рассмотрим задачу для бесконечной криволинейно-анизотропной пластинки с круговым отверстием и приложенной на его контуре периодической нагрузкой.

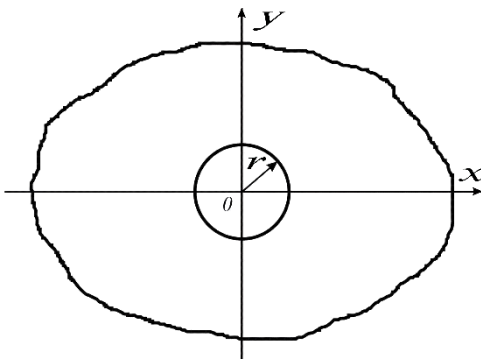


Рис. 1

Пусть упругая бесконечная пластина, обладающая цилиндрической анизотропией, ослаблена круговым отверстием радиуса r . Контур отверстия нагружен радиальным σ_r и касательным $\tau_{r\theta}$ напряжениями, на бесконечности напряжения равны нулю (рис.1). Решение задачи сводится к интегрированию уравнений равновесия пластины [3]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0; \end{cases} \quad (1.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\sigma_r = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (r=1), \quad \tau_{r\theta} = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (r=1),$$

$$\sigma_r \rightarrow 0; \quad \tau_{r\theta} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1.2)$$

Уравнения равновесия в полярных координатах удовлетворяются, если ввести функцию напряжений $F(r, \theta)$:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{F}{r} \right).$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений, для ортотропной пластины запишется в виде [4]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + q \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + 2 \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} -$$

$$- \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - q \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left(2(1 - \vartheta_r) q + q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + q \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad (1.3)$$

где E_θ , E_r – модуль упругости пластины на растяжение-сжатие; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига; ϑ_r – коэффициент Пуассона; $q = \frac{E_\theta}{E_r}$; $\varepsilon = \frac{G_{r\theta}^2}{E_r E_\theta}$.

Если ввести новую независимую переменную $r = r_0 e^\rho$ ($r_0 = 1$) $\Rightarrow \rho = \ln r$, уравнение (1.3) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \rho^4} - 4 \frac{\partial^3 F}{\partial \rho^3} + 5 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) \frac{\partial^4 F}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} -$$

$$- 2 \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) \frac{\partial^3 F}{\partial \rho \partial \theta^2} + q \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} - q \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + 2q \frac{\partial F}{\partial \rho} +$$

$$+ \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + 2q \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.4) ищется в виде:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\rho) \cos n\theta.$$

Для n -го члена ряда получено обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4 f_n}{d\rho^4} - 4 \frac{d^3 f_n}{d\rho^3} + 5 \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} - 2 \frac{df_n}{d\rho} - q \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} + 2q \frac{df_n}{d\rho} - \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) n^2 \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} +$$

$$+ 2 \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) n^2 \frac{df_n}{d\rho} + q n^4 f_n - \left(q^{1/2} \varepsilon^{-1/2} - 2\vartheta_r q \right) n^2 f_n - 2q n^2 f_n = 0. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.6) в (1.5), получаем характеристическое уравнение

$$t^2 - \varepsilon^{-1/2} \left[(1+q)\varepsilon^{1/2} + (q^{1/2} - 2\vartheta_r q \varepsilon^{1/2}) n^2 \right] t + q(n^2 - 1)^2 = 0, \text{ где } t = (k-1)^2.$$

Корни уравнения принимают вид:

$$t_1 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\vartheta_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right] - \sqrt{\left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\vartheta_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right]^2 - q(n-1)^2 \varepsilon} \right\},$$

$$t_2 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\vartheta_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right] + \sqrt{\left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q - 2\vartheta_r q n^2) \varepsilon^{1/2} \right]^2 - q(n-1)^2 \varepsilon} \right\}.$$

Тогда,

$$k_1 = 1 - \sqrt{t_1}; \quad k_2 = 1 + \sqrt{t_1}; \quad k_3 = 1 - \sqrt{t_2}; \quad k_4 = 1 + \sqrt{t_2}. \quad (1.6)$$

Выражения для напряжений имеют вид:

$$\sigma_r = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) C_1 r^{-(1+\sqrt{t_1})} + (n^2 - 1 - \sqrt{t_1}) C_2 r^{\sqrt{t_1}-1} + \right. \\ \left. + (n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) C_3 r^{-(1+\sqrt{t_2})} + (n^2 - 1 - \sqrt{t_2}) C_4 r^{\sqrt{t_2}-1} \right] \cos n\theta,$$

$$\sigma_\theta = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sqrt{t_1} (1 - \sqrt{t_1}) C_1 r^{-(1+\sqrt{t_1})} - \sqrt{t_1} (1 + \sqrt{t_1}) C_2 r^{\sqrt{t_1}-1} + \right. \\ \left. + \sqrt{t_2} (1 - \sqrt{t_2}) C_3 r^{-(1+\sqrt{t_2})} - \sqrt{t_2} (1 + \sqrt{t_2}) C_4 r^{\sqrt{t_2}-1} \right] \cos n\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = - \sum_{n=0}^{\infty} n \left[\sqrt{t_1} C_1 r^{-(1+\sqrt{t_1})} - \sqrt{t_1} C_2 r^{\sqrt{t_1}-1} + \right. \\ \left. + \sqrt{t_2} C_3 r^{-(1+\sqrt{t_2})} - \sqrt{t_2} C_4 r^{\sqrt{t_2}-1} \right] \sin n\theta. \quad (1.7)$$

Из граничных условий определяются постоянные C_i . Тогда напряжения в пластине переписуются в виде:

$$\sigma_r = - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n^2 - 1 + \sqrt{t_1})(n^2 - 1 + \sqrt{t_2}) B_n - n\sqrt{t_2} A_n}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \right. \\ \left. - \frac{(n^2 - 1 + \sqrt{t_2})[(n^2 - 1 + \sqrt{t_1}) B_n - n\sqrt{t_1} A_n]}{n(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(n^2 - 1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right\} \cos n\theta,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{t_1}(1-\sqrt{t_1})[(n^2-1+\sqrt{t_2})B_n - n\sqrt{t_2}A_n]}{n(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})(n^2-1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{t_2}(1-\sqrt{t_2})[(n^2-1+\sqrt{t_1})B_n - n\sqrt{t_1}A_n]}{n(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})(n^2-1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right\} \cos n\theta, \\ \tau_{r\theta} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{t_1}[(n^2-1+\sqrt{t_2})B_n - n\sqrt{t_2}A_n]}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})(n^2-1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{t_2}[(n^2-1+\sqrt{t_1})B_n - n\sqrt{t_1}A_n]}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})(n^2-1)} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right\} \sin n\theta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$t_1 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q-\mu) \varepsilon^{1/2} \right] - f(\varepsilon) \right\},$$

$$t_2 = \varepsilon^{-1/2} \left\{ \left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q-\mu) \varepsilon^{1/2} \right] + f(\varepsilon) \right\},$$

$$f(\varepsilon) = \sqrt{\left[\frac{1}{2} q^{1/2} n^2 + \frac{1}{2} (1+q-\mu) \varepsilon^{1/2} \right]^2 - q(n^2-1)^2 \varepsilon}; \quad \mu = 2\vartheta_r q n^2.$$

Полученное точное решение используем в следующей задаче.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим бесконечную пластину, обладающую криволинейной анизотропией. Пластина ослаблена круговым отверстием единичного радиуса (рис. 2).

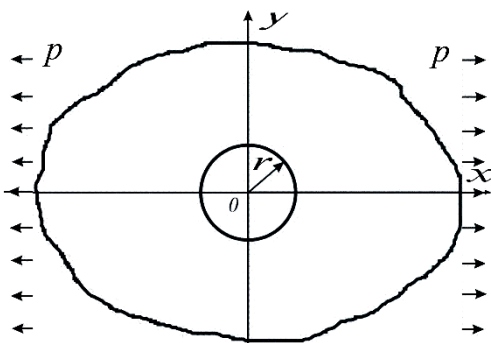


Рис. 2

Рассмотрим первую основную задачу, когда контур отверстия свободен от внешних усилий, а на бесконечности действуют растягивающие пластину усилия интенсивности p (задача Кирша). Пластина имеет в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости xoy . В сплошной пластине без отверстия

$$\sigma_x^0 = p; \quad \sigma_y^0 = 0; \quad \tau^0 = 0. \quad (2.1)$$

Введем полярную систему координат r, θ . Если воспользоваться формулами преобразования [4], то при условиях (2.1) получим, что в сплошной пластине без отверстия

$$\sigma_r^0 = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\theta, \quad \sigma_{\theta}^0 = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^0 = -\frac{p}{2} \sin 2\theta. \quad (2.2)$$

Поскольку контур отверстия свободен от нормальных (σ_r) и касательных ($\tau_{r\theta}$) напряжений, то образование в пластине отверстия равносильно приложению к точкам воображаемого контура напряжений

$$\sigma_r = -\sigma_r^0; \quad \tau_{r\theta} = -\tau_{r\theta}^0.$$

Действие напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$ приводит к возникновению второго поля напряжений, которое определяется из решения задачи, рассмотренной выше.

Полное решение поставленной задачи состоит из суммы решения (2.2) и указанного второго поля напряжений, которое необходимо определить. Для рассматриваемого случая решение

$$\sigma_r = \frac{A_0}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \sigma_\theta = -\frac{\sqrt{q} A_0}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (\text{при } n=0 \quad A_0 = -\frac{p}{2})$$

принимает вид:

$$\sigma_r = -\frac{p}{2} \frac{1}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \sigma_\theta = \frac{p}{2} \frac{\sqrt{q}}{r^{1+\sqrt{q}}}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.3)$$

Для $n \neq 0$ все A_n и B_n , кроме A_2 и B_2 , равны нулю, а $A_2 = -\frac{p}{2}$; $B_2 = \frac{p}{2}$, поэтому решение запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^{1+\sqrt{q}}} \right) + \frac{p}{2} \left[1 - \frac{(3+\sqrt{t_1})(\sqrt{t_2}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} + \frac{(3+\sqrt{t_2})(\sqrt{t_1}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{q}}{r^{1+\sqrt{q}}} \right) - \frac{p}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{t_1}(1-\sqrt{t_1})(\sqrt{t_2}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} + \frac{\sqrt{t_2}(\sqrt{t_2}-1)(\sqrt{t_1}+1)}{2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{t_1}(\sqrt{t_2}+1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_1}}} - \frac{\sqrt{t_2}(\sqrt{t_1}+1)}{(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})} \frac{1}{r^{1+\sqrt{t_2}}} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В частном случае изотропной пластины, то есть при

$$q=1; \quad \varepsilon = \frac{(1-\vartheta)^2}{4}; \quad \varepsilon^{1/2} = \frac{1-\vartheta}{2}; \quad \left(G = \frac{E}{2(1+\vartheta)} \right), \quad t_1=1; \quad t_2=9$$

решение (2.4) переходит в известное решение задачи Кирша для изотропной пластины [4], когда радиус отверстия равен единице.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{p}{2} \left(1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{p}{2} \left(1 + \frac{3}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p}{2} \left(1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Эта же задача об одноосном растяжении криволинейно анизотропной пластины решается асимптотическим методом.

Напряженно-деформированное состояние (НДС) первого типа:

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} &= 0; \quad V_{\eta}^{1,0} + U^{1,0} = 0, \\ U_{\xi}^{1,0} &= -\frac{1}{E} \frac{p}{2} \cos \eta_1 \quad (\xi_1 = 0), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$U_{\xi\xi}^{1,1} + U_{\eta\eta}^{1,1} = -2\alpha_1 U_{\xi\xi}^{1,0}; \quad V_{\eta}^{1,1} + U^{1,1} = 0,$$

$$U_{\xi}^{1,1} = -\alpha_1 U_{\xi}^{1,0} - U_{\xi}^{2,0} (\xi_1 = 0), \quad (2.7)$$

$$U_{\xi\xi}^{1,2} + U_{\eta\eta}^{1,2} = -(2\alpha_2 + \alpha_1^2) U_{\xi\xi}^{1,0} - 2\alpha_1 U_{\xi\xi}^{1,1} - m U_{\xi}^{1,0} - U^{1,0} - m V_{\xi\eta}^{1,0} + V_{\eta}^{1,0},$$

$$V_{\eta}^{1,2} + U^{1,2} = -m U_{\xi}^{1,0} - U^{1,0},$$

$$U_{\xi}^{1,2} = -\alpha_2 U_{\xi}^{1,0} - \alpha_1 U_{\xi}^{1,1} - \beta_1 U_{\xi}^{2,0} - U_{\xi}^{2,1} - (m-1) V_{\eta}^{2,0} (\xi_1 = 0). \quad (2.8)$$

НДС второго типа:

$$U_{\xi}^{2,0} = 0; \quad V_{\xi\xi}^{2,0} + V_{\eta\eta}^{2,0} = 0,$$

$$V_{\xi}^{2,0} = \frac{\varepsilon^{-1/2}}{E} \frac{p}{2} \sin \eta_2 - U_{\eta}^{1,0} \quad (\xi_2 = 0), \quad (2.9)$$

$$U_{\xi}^{2,1} = -m V_{\eta}^{2,0} + \int V_{\eta}^{2,0} d\xi_2,$$

$$V_{\xi\xi}^{2,1} + V_{\eta\eta}^{2,1} = -2\beta_1 V_{\xi\xi}^{2,0},$$

$$V_{\xi}^{2,1} = -U_{\eta}^{1,1} - \beta_1 V_{\xi}^{2,0} \quad (\xi_2 = 0), \quad (2.10)$$

$$U_{\xi}^{2,2} = -\beta_1 \int V_{\eta}^{2,0} d\xi_2 - \beta_1 U_{\xi}^{2,1} - m V_{\eta}^{2,1} + \int V_{\eta}^{2,1} d\xi_2,$$

$$V_{\xi\xi}^{2,2} + V_{\eta\eta}^{2,2} = -(2\beta_2 + \beta_1^2) V_{\xi\xi}^{2,0} - 2\beta_1 V_{\xi\xi}^{2,1},$$

$$V_{\xi}^{2,2} = -U_{\eta}^{1,2} - \beta_2 V_{\xi}^{2,0} - \beta_1 V_{\xi}^{2,1} - V_{\xi}^{1,0} + V^{1,0} + V^{2,0} \quad (\xi_2 = 0). \quad (2.11)$$

Аналогично строятся следующие приближения. Все функции $U_{\xi}^{1,j}$; $V_{\xi}^{2,j}$ ($j=0,1,\dots$) на бесконечности стремятся к нулю. Из выражений (2.6)-(2.11) видно, что уравнения второго типа для каждого из приближений интегрируются после решения соответствующих уравнений первого типа.

Функция $U^{1,0}$ может быть определена из задачи Неймана для бесконечной области с круговым отверстием единичного радиуса в комплексной плоскости $\zeta_1 = e^{\xi_1 + i\eta_1}$, то есть

$$U^{1,0} = \frac{1}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_1} \cos \eta_1. \quad (2.12)$$

Решая второе уравнение (2.6), найдем

$$V^{1,0} = -\frac{1}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_1} \sin \eta_1.$$

Используя формулу (2.12), получим граничные условия на контуре отверстия ($\xi = \xi_1 = \xi_2 = 0$) для нахождения функции $V^{2,0}$ из второго уравнения (2.9)

$$V_{\xi}^{2,0} = -\frac{1+\varepsilon^{-1/2}}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_1} \sin \eta_2 \quad (\xi_2 = 0).$$

Здесь имеем задачу Неймана в комплексной плоскости $\zeta_2 = e^{\xi_2 + i\eta_2}$, решение которой запишется так:

$$V^{2,0} = -\frac{1+\varepsilon^{-1/2}}{E} \frac{p}{2} e^{-\xi_2} \sin \eta_2.$$

Из первого уравнения (2.9) получим $U_{\xi}^{2,0} = 0$.

На этом решение задачи в нулевом приближении заканчивается. Напряжения в указанном приближении для рассматриваемого случая принимают вид:

$$\sigma_{1,0} = Ee^{-\xi} U_{\xi}^{1,0}; \quad \sigma_{2,0} = Ee^{-\xi} V_{\eta}^{2,0}, \quad \tau_0 = Ee^{-\xi} \varepsilon^{1/2} (V_{\xi}^{2,0} + U_{\eta}^{1,0}). \quad (2.13)$$

Нахождение решений в более высоких приближениях является задачей той же трудности, что и в нулевом приближении. Продолжая процесс, получим решение поставленной задачи в форме ряда по степеням параметра ε :

$$\sigma_{11} = \sigma_{1,0} + \varepsilon \sigma_{1,2} + O(\varepsilon^2), \quad \sigma_{22} = \sigma_{2,0} + \varepsilon \sigma_{2,2} + O(\varepsilon^2), \quad \tau = \tau_0 + \varepsilon \tau_2 + O(\varepsilon^2). \quad (2.14)$$

Полное решение задачи об одноосном растяжении криволинейно-анизотропной пластины, ослабленной круговым отверстием, состоит из суммы полученных решений и имеет следующий вид (в исходных обозначениях):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{p}{2} \left\{1 - \frac{1}{r} - \varepsilon \left(1 + \varepsilon^{-1/2}\right) \left(\frac{1}{r(1-\varepsilon)} - \frac{1}{r}\right) + O(\varepsilon^2)\right\} \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta} &= \frac{p}{2} \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{p}{2} \left\{1 + \left(1 + \varepsilon^{-1/2}\right) \frac{1}{r(1+\varepsilon^{-1})} + \varepsilon \left(\left(1 + \varepsilon^{-1/2}\right) \frac{1}{r(1+\varepsilon^{-1})} - \frac{1}{r(1-\varepsilon)}\right) + O(\varepsilon^2)\right\} \cos 2\theta, \\ \tau_r &= -\frac{p}{2} \left\{1 - \varepsilon^{1/2} \left[\left(1 + \varepsilon^{-1/2}\right) \frac{1}{r(1+\varepsilon^{-1})} - \frac{1}{r} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon \left(1 + \varepsilon^{-1/2}\right) \left(\frac{1}{r(1+\varepsilon^{-1})} - \frac{1}{r(1-\varepsilon)}\right) + O(\varepsilon^2)\right]\right\} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Формулы (2.15) представляют собой первые члены разложения точного решения в ряд по степеням ε . Для изотропной пластины, учитывая, что $q = 1$, полученное асимптотическим методом решение (2.15) переходит в найденное ранее точное решение (2.5), разложенное по параметру ε .

На контуре отверстия криволинейно-анизотропной пластины напряжения будут следующими:

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_r = 0, \quad \sigma_{\theta} = p - \frac{p}{2} \left[\left(2 + \varepsilon^{-1/2}\right) + \varepsilon \left(\varepsilon^{-1/2}\right) + O(\varepsilon^2) \right] \cos 2\theta.$$

$$\text{При } \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\sigma_{\theta})_{\max} = p + \frac{p}{2} \left[\left(2 + \varepsilon^{-1/2}\right) + \varepsilon \left(\varepsilon^{-1/2}\right) + O(\varepsilon^2) \right].$$

Если в выражениях (2.15) ограничиться нулевым приближением, то сравнивая результат (таблица 1) с известным максимальным напряжением на контуре отверстия [4], погрешность при вычислении $(\sigma_\theta)_{\max}$ на контуре отверстия ($\xi = 0$) не превосходит 1% при $\varepsilon = 1/4$ и будет меньше 0,3% при $\varepsilon = 1/9$. В таблице 1 приведены значения максимального напряжения на контуре отверстия, которые были получены из точного и асимптотического (в первом приближении) решений как для ортотропного, так и для изотропного материала.

Таблица 1 – Сравнение асимптотического и точного решения для максимального напряжения на контуре отверстия

ε	Известное решение	Полученное точное решение	Полученное асимптотическое решение	Погрешность
1/3 (изотропный случай)	$3p$	$3p$	$2,85p$	$\approx 5\%$
1/4	–	$3,22p$	$3,25p$	$\approx 0,93\%$
1/9	–	$3,658p$	$3,667p$	$\approx 0,24\%$

ВЫВОД

Даже в самом неблагоприятном, с точки зрения применяемого метода, случае изотропной пластинки (параметр ε имеет максимальное значение) погрешность приближения не превышает 5% при $\vartheta = 0,3$ (ϑ – коэффициент Пуассона) и в нулевом приближении полученное решение переходит в известное решение задачи Кирша.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьев В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Из-во «Самарский университет», 2001. – 562 с.
2. Варданян Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. – М. : АСВ, 1995. – 568 с.
3. Маневич Л. И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела / Л. И. Маневич, А. В. Павленко, С. Г. Коблик. – К. : Вища школа, 1982. – 152 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

REFERENCES

1. Astafev, V.I., Radaev, J.N. and Stepanova, L.V. (2001), *Nelineynaya mekhanika razrusheniya* [Nonlinear of the mechanic of destruction], Publishing house “Samara university”, Samara, Russia.
2. Vardanyan, G.S., Andreev, V.I. and Atarov, N.M. (1995), *Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti* [The Strength of materials with bases of the theory of an elasticity and plasticity], ACB, Moscow, Russia.
3. Manevich, L.I., Pavlenko, A.V. and Koblik, S.G. (1982), *Asimptoticheskiy metod v teorii uprugosti ortotropnogo tela* [Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field], Vyshcha shkola, Kiev.
4. Mushelishvili, N.I. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some primal problems of the mathematical theory of an elasticity], Nauka, Moscow.