

УДК 539.6

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

Ободан Н. И., д. т. н., профессор, Гук Н. А., д. ф.-м. н., профессор, Фещенко А. С., аспирант

*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49010, Украина*

nataly-guk@rambler.ru

Рассматривается задача об определении двумерной функции распределения материала тонкостенной системы, обеспечивающей минимальный вес, при заданном значении критической нагрузки. Функция толщины оболочки определяется из решения обратной спектральной задачи. Для дискретизации функций задачи используется метод конечных элементов. Идентификация неизвестных узловых значений функции толщины с учетом ограничений на уровень действующей нагрузки, на минимальное и максимальное значение толщины оболочки, выполняется путем минимизации функции Лагранжа. Приводятся результаты идентификации функции толщины оболочки, обеспечивающей минимальный вес, при заданном значении критической нагрузки.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, тонкостенная оболочка, толщина, идентификация, метод конечных элементов, функция Лагранжа.

ОБЕРНЕНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОСТІННИХ СИСТЕМ

Ободан Н. И., д. т. н., професор, Гук Н. А., д. ф.-м. н., професор, Фещенко А. С., аспірант

*Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

nataly-guk@rambler.ru

Розглядається задача про визначення двовимірної функції розподілу матеріалу тонкостінної системи, що забезпечує мінімальну вагу, при заданому значенні критичного навантаження. Функція товщини оболонки визначається з розв'язку оберненої спектральної задачі. Для дискретизації функцій задачі використовується метод скінченних елементів. Ідентифікація невідомих вузлових значень функції товщини з урахуванням обмежень на рівень діючого навантаження, на мінімальне і максимальне значення товщини оболонки, виконується шляхом мінімізації функції Лагранжа. Наводяться результати ідентифікації функції товщини оболонки, що забезпечує мінімальну вагу, при заданому значенні критичного навантаження.

Ключові слова: обернена спектральна задача, тонкостінна оболонка, товщина, ідентифікація, метод скінченних елементів, функція Лагранжа.

INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE THIN-WALLED SYSTEMS

Obodan N. I., D.Sc. in Engineering, professor, Guk N. A., D.Sc. in Physics and Maths, professor,
Feschenko A. S., postgraduate

*Dnipropetrovsk national university named after Oles Honchar,
Naharina ave., 72, Dnipropetrovsk, 49010, Ukraine*

nataly-guk@rambler.ru

The problem of definition two-dimensional function of distribution of material of the thin-walled system providing the minimum weight at a preset value of critical loading is considered. Function of thickness of a shell as the solution of the inverse problem is defined.

The problem as the inverse spectral problem is formulated. In the course of change of the decision the non-uniform subcritical state as function of shell's thickness changes on two coordinates is realized. There is a destruction of a bifurcation picture to realization of such form of the decision which is determined by convertibility of function of thickness by coordinates ξ_1 and ξ_2 . The vector function characterizing own form at the fixed function of thickness is the generalized solution of a spectral boundary value problem.

The method of finite elements for discretization of functions of direct and inverse problems is used. Identification of unknown nodal values of function of thickness taking into account restrictions on level of the loading, on the minimum and maximum value of thickness of the shell, is carried out by minimization of function of Lagrange. Necessary conditions of an extreme from which the system of the algebraic equations for definition of stationary points of function

of Lagrange is received are formulated. The set of values of variables at which values of characteristic functions are equal 1 is defined. The unknown vector of values of function of thickness is defined by the Newton method.

The iteration algorithm of the solution of a problem is formulated. For realization of algorithm at achievement of critical values of function of loading the method of continuation of the decision on loading parameter is used. For destruction of a bifurcation picture, i.e. for elimination of multiple Eigen-values, initial approach is set not axisymmetric; its convertibility has to correspond to own form of a cover with constant thickness.

Numerical experiment for thin-walled covers of variable thickness which are under the influence of the squeezing loadings is made. Own forms which correspond to local and regular forms of deformation are constructed.

Results of identification of shell's thickness providing the minimum weight under the set critical loading are given.

Key words: inverse spectral problem, thin-walled shell, thickness, identification, method of final elements, Lagrange's function.

ВВЕДЕНИЕ

Решению задач оптимизации спектральных характеристик посвящено большое количество исследований в теории тонкостенных систем. При этом, как правило, рассматривались постановки одномерных задач [1-3], либо использовались предельные модели, когда закон распределения свойств системы задан, при этом в качестве методов решения использовались методы параметрической оптимизации, к которым сводилась задача.

В работе [4] сформулирована задача об оптимальном, с точки зрения веса, распределении толщины оболочки, нагруженной осесимметричным внешним давлением. Для решения указанной задачи использовался обобщенный принцип максимума, а в качестве функции управления выбиралась функция толщины, входящая в уравнение устойчивости. Неизвестная функция толщины удовлетворяла уравнениям устойчивости, конструктивным, технологическим или прочностным ограничениям, граничным условиям задачи, и обеспечивала минимальный вес оболочки.

В работах [5, 6] рассматривались задачи о максимизации критической нагрузки ортотропных оболочек переменной толщины как задачи теории управления, когда в качестве функции управления использовалась функция толщины оболочки при наличии ограничений на вес, толщину и прочностные характеристики оболочки. Толщина оболочки отыскивалась в классе ступенчатых или линейно возрастающих к середине оболочки функций. Определены кратные собственные значения для оптимального решения задачи максимизации, при этом задача формулировалась в линейной безмоментной постановке без учета докритического состояния системы.

Известно, что при оптимизации спектральных характеристик линейной краевой задачи по параметрам модели приходится сталкиваться с проблемой повышения кратности собственных значений и существования соответствующих собственных форм [7]. Так, для цилиндрической оболочки, находящейся под действием равномерного внешнего давления, обнаружено существование нескольких локальных форм для максимального по распределению толщины значения давления [5, 6]. Между тем решения, соответствующие локальным формам при внешнем давлении, являются следствием вторичного ветвления, которое происходит на нисходящей (неустойчивой) ветви решения [8]. При этом точка ветвления, соответствующая локальной форме, близка, но не кратна решению, отвечающему регулярной форме, а соответствующие формы не являются близкими по норме в пространстве W_1 .

Следовательно, если учитывать возможность существования докритических неосесимметричных решений в задаче о распределении толщины при осесимметричной нагрузке и геометрии оболочки, то произойдет разрушение картины бифуркации с кратными собственными значениями [8], которая является следствием постановки задачи как осесимметричной и безмоментной. Следствием разрушения картины бифуркации будет увеличение энергетической нормы соответствующих локальных форм, что исключает наличие близких по норме локальных решений, их реализация требует «больших» возмущений.

Настоящее исследование посвящено определению двумерной функции распределения материала $H(\xi_1, \xi_2)$ тонкостенной системы в классе кусочно-линейных непрерывных функций при заданном значении критической нагрузки и ограничениях на минимальную и максимальную толщины на основе решения рассматриваемой задачи как обратной.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается тонкостенная система переменной толщины $H(\xi_1, \xi_2)$, занимающая ограниченную пространственную область $\Omega = \{X | X = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3; 0 \leq \xi_1 \leq L; 0 \leq \xi_2 \leq 2\pi; H_{\min} \leq \xi_3 \leq H_{\max}\}$. Система находится под действием равномерных сжимающих нагрузок – нормальной к боковой поверхности q и направленной вдоль образующей N . Задан требуемый уровень значений критических нагрузок q^* и (или) N^* . Необходимо определить функцию $H(\xi_1, \xi_2)$ так, чтобы конструкция была оптимальной. Под оптимальной конструкцией будем понимать оболочку минимального веса.

Тогда функция распределения толщины оболочки определяется из условия:

$$H^*(\xi_1, \xi_2) = \arg \min_H J(H), \quad H \in \bar{H}, \quad (1)$$

где

$$J(H) = \int_{\Omega} H^2(\xi_1, \xi_2) d\Omega; \quad (2)$$

$$\bar{H} = \left\{ H \mid H_{\min} \leq H \leq H_{\max}; \left. \frac{\partial H}{\partial \xi_1} \right|_{\Omega} \neq 0; \left. \frac{\partial H}{\partial \xi_2} \right|_{\Omega} \neq 0 \right\} - \text{область определения функции } H(\xi_1, \xi_2);$$

H_{\min} , H_{\max} – минимальное и максимальное допустимые значения толщины оболочки.

Выполнение условий $\left. \frac{\partial H}{\partial \xi_1} \right|_{\Omega} \neq 0; \left. \frac{\partial H}{\partial \xi_2} \right|_{\Omega} \neq 0$ позволяет обеспечить отстройку бифуркационной

картины от «близких» локальных форм, область возможных решений \bar{H} должна содержать функции H , имеющие регулярную изменяемость собственной формы для задачи на собственные значения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Сформулируем задачу (1), (2) как обратную для соответствующей спектральной задачи. Для определения неизвестной вектор-функции толщины $H(\xi_1, \xi_2)$ будем использовать информацию о требуемом собственном значении, соответствующем q^* или N^* , а также о классе собственных функций $\tilde{U}(X) = \tilde{U}(\tilde{u}_1(X), \tilde{u}_2(X), \tilde{w}(X))$, т.к. для оптимальной линеаризованной системы возможно существование нескольких собственных функций.

В случае двумерного изменения функции $H(\xi_1, \xi_2)$ в процессе изменения решения $0 \leq q \leq q^*$, $0 \leq N \leq N^*$ реализуется неоднородное докритическое состояние T_{kl}^0 и происходит разрушение бифуркационной картины с реализацией такой формы $\tilde{U}(X)$, которая определяется изменяемостями функции $H(\xi_1, \xi_2)$ по координатам ξ_1 и ξ_2 . При этом остальные ветви решений, соответствующие другим формам, либо удаляются в пространстве состояний, либо становятся изолированными [8]. Таким образом, обратная задача формулируется в виде (1), (2) при условии:

$$H_{\min} \leq H \leq H_{\max} \quad (3)$$

и

$$q^*, N^* = \arg \min_{\Phi} F(\tilde{U}, \Phi); \quad \tilde{U}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{w}) \neq 0, \quad (4)$$

где $F(\tilde{U}, \Phi)$ – обобщенное решение соответствующей краевой задачи теории оболочек при фиксированной функции $H(\xi_1, \xi_2)$; $\tilde{U}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{w})$ – вектор-функция, характеризующая отклонение от исходного напряженно-деформированного состояния; $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{w}$ – функции перемещения в направлениях ξ_1, ξ_2 и ξ_3 ; Φ – произвольная вектор-функция.

Для определения функционала $F(\tilde{U}, \Phi)$ в (4) построим математическую модель прямой задачи, в качестве которой выступает краевая задача теории пологих оболочек на собственные функции. Поскольку исходная разрешающая система уравнений теории оболочек содержит нелинейные слагаемые, то при значениях функций задачи, превышающих некоторые критические значения, возможна неединственность решения исходной нелинейной задачи, т.е. существование как неособых, так и особых решений.

Тогда спектральная задача может быть сформулирована следующим образом. В особой точке возможно отклонение $\tilde{U}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{w})$ от исходного напряженно-деформированного состояния $\bar{U}_0(\bar{u}_{10}, \bar{u}_{20}, \bar{w}_0)$ при неизменной нагрузке [9]. Здесь $\bar{U}_0(\bar{u}_{10}, \bar{u}_{20}, \bar{w}_0)$ – вектор-функция перемещений тонкостенного оболочечного элемента в ограниченной пространственной области Ω .

Рассматривая семейство решений $\bar{U}(H) = \bar{U}(\bar{u}_1(H), \bar{u}_2(H), \bar{w}(H))$, зависящих от функций $H(\xi_1, \xi_2)$, и учитывая, что отклонение $\tilde{U}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{w})$ является малым, линеаризованная система уравнений в малой окрестности неособого решения (\bar{U}_0, H_0) при фиксированной функции неизвестных обратной задачи $H(\xi_1, \xi_2)$ формулируется в виде:

$$\nabla_j (C_1^{ijkl}(H) \nabla_k \tilde{u}_l) - \nabla_j \left[C_1^{ijkl}(H) \left(B_{kl}(H) \tilde{w} - \frac{1}{2} \bar{w}_{\alpha_k} \tilde{w}_{,\xi_l} \right) \right] = 0; \quad (5)$$

$$\nabla_{ij} (C_2^{ijkl}(H) \nabla_{kl} \tilde{w}) - T_{kl}(H) (B_{ij}(H) + \nabla_{ij} \tilde{w}) = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (6)$$

при

$$F(\tilde{U})|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

где T_{kl} – мембранные усилия, возникающие от действия сжимающих нагрузок; $T_{kl} = T_{kl}^0 + \tilde{T}_{kl}$;

$$T_{kl}^0 = \frac{1}{2} C_1^{ijkl}(H) \left[(\bar{u}_{k0, \xi_l} + \bar{u}_{l0, \xi_k}) + (\bar{w}_{0, \xi_k})^2 + (\bar{w}_{0, \xi_l})^2 \right];$$

$$\tilde{T}_{kl} = \frac{1}{2} C_1^{ijkl}(H) \left((\tilde{u}_{k, \xi_l} + \tilde{u}_{l, \xi_k}) + (\bar{w}_{\alpha_k} \tilde{w}_{,\xi_l} + \bar{w}_{\alpha_l} \tilde{w}_{,\xi_k}) \right); \quad C_1^{1111} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}; \quad C_1^{1122} = \frac{Eh\nu}{(1-\nu^2)};$$

$$C_1^{1212} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}; \quad C_2^{1111} = \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)}; \quad C_2^{1122} = \frac{Eh^3\nu}{(1-\nu^2)}; \quad C_2^{1212} = \frac{Eh^3}{2(1+\nu)}; \quad T_{kl}^0(q, N), \quad \bar{u}_0(q, N),$$

$\bar{w}_0(q, N)$ – мембранные усилия и перемещения, описывающие нелинейное докритическое состояние; $\tilde{T}_{kl}, \tilde{u}_i(u_{i0}, H_0), \tilde{w}(w_0, H_0)$ – функции, характеризующие отклонение от исходного

напряженно-деформированного состояния; $H(\xi_1, \xi_2)$ – неизвестная функция толщины, которая определяется из условий (1), (2).

Обобщенным решением спектральной краевой задачи (5)-(7) является вектор-функция $\tilde{U} = (\omega(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \tilde{w})$, характеризующая собственную форму при фиксированной вектор-функции $H(\xi_1, \xi_2)$ и удовлетворяющая интегральному тождеству для любой вектор-функции $\Phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$:

$$F_1 \equiv (\tilde{w}, \phi)_{Z_x} - \int_{\Omega} \left[T_{ij}(H) \left(B_{ij}(H) \phi_3 - \left[T_{ij}^0 \tilde{w}_{,\xi_i} \phi_{3,\xi_j} + \tilde{T}_{ij} \bar{w}_{0,\xi_i} \phi_{3,\xi_j} \right] \right) \right] d\Omega = 0;$$

$$F_2 \equiv (\omega(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \phi(\phi_1, \phi_2))_{Z_t} - \int_{\Omega} \left[B_{kl}(H) \tilde{w} - \frac{1}{2} \left[\bar{w}_{0,\xi_k} \tilde{w}_{,\xi_l} + \tilde{w}_{,\xi_k} \bar{w}_{0,\xi_l} \right] \right] C_1^{ijkl}(H) \nabla_i \phi_j d\Omega = 0;$$

или

$$F \equiv (\tilde{U}, \Phi)_{Z_x} - \int_{\Omega} \left[\left(B_{kl}(H) \tilde{w} - \frac{1}{2} \left[\bar{w}_{0,\xi_k} \tilde{w}_{,\xi_l} + \tilde{w}_{,\xi_k} \bar{w}_{0,\xi_l} \right] \right) C_1^{ijkl}(H) \nabla_i \phi_j + \right. \\ \left. + T_{ij}(H) \left(B_{ij}(H) \phi_3 - \left[T_{ij}^0 \tilde{w}_{,\xi_i} \phi_{3,\xi_j} + \tilde{T}_{ij} \bar{w}_{0,\xi_i} \phi_{3,\xi_j} \right] \right) \right] d\Omega, \quad (8)$$

где Z_x, Z_t, Z_{xt} – специальные функциональные пространства [9].

Неизвестную функцию обратной задачи на области $\tilde{\Omega} = \{(\xi_1, \xi_2) | 0 \leq \xi_1 \leq L; 0 \leq \xi_2 \leq 2\pi\}$ будем представлять в виде:

$$H^{(i)}(\xi_1, \xi_2) = H_0^{(i-1)} \cdot f^{(i)}(\xi_1, \xi_2), \quad (9)$$

где индекс (i) характеризует номер шага итерационного процесса и в дальнейшем будет опущен; $f(\xi_1, \xi_2)$ – непрерывная функция; H_0 – параметр; H_0^* – значение H_0 , соответствующее нетривиальному решению краевой задачи (5)-(7) при фиксированных нагрузках q^* и (или) N^* ; $\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)$ – значение функции $f(\xi_1, \xi_2)$, полученное из условий (1), (2) при значении $H_0 = H_0^*$.

На значения функции $f(\xi_1, \xi_2)$ вводится ограничение в виде:

$$\frac{H_{\min}}{H_0} \leq f(\xi_1, \xi_2) \leq \frac{H_{\max}}{H_0}. \quad (10)$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения краевой задачи (5)-(7) при фиксированной функции $H(\xi_1, \xi_2)$ используется метод конечных элементов.

Рассматриваемая система представляется в виде ансамбля четырехузловых конечных элементов. Неизвестные функции $\bar{u}_{l_0}(\xi_1, \xi_2)$, $\bar{w}_0(\xi_1, \xi_2)$, $\tilde{u}_l(\xi_1, \xi_2)$, $\tilde{w}(\xi_1, \xi_2)$, $\tilde{f}(\xi_1, \xi_2)$ на элементе e задаются для локальной системы координат (θ, η) при помощи аппроксимации через их узловые значения на сетке [11]:

$$u_l^e(x, y) = \sum_{k=1}^4 u_{lk} B_k(\theta) B_k(\eta), \quad w^e(x, y) = \sum_{k=1}^4 w_k B_k(\theta) B_k(\eta),$$

$$f^e(x, y) = \sum_{k=1}^4 f_k B_k(\theta) B_k(\eta), \quad l=1, 2,$$

где u_{lk} , w_k , f_k – значения функций в узлах элемента; B_k – функции формы.

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования и суммирования матриц элементов система разрешающих уравнений, соответствующая краевой задачи на собственные значения, имеет вид:

$$Y(H_0, f, T_{kl}^0(H, q^*, N^*)) \cdot \tilde{U} = 0, \quad (11)$$

где $\tilde{U} = \{\tilde{U}_i\}^T$, $i = \overline{1, I}$ – собственный вектор; $f = \{f_p\}$, $p = \overline{1, P}$; I – число узлов дискретизации сетки решения прямой задачи; P – число узлов дискретизации функции f ; Y – матрица жесткости, $Y = [C]^T [D] [C]$; C – матрица функций формы; D – матрица упругости для всего ансамбля элементов; H_0 – параметр, значение которого H_0^* определяется из условия

$$\det Y(H_0^*, f^*, T_{kl}^0(H^*, N^*, q^*)) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, задача определения функции толщины $H(\xi_1, \xi_2)$ сводится к задаче определения значения H_0^* и вектора $f^* = \{f_p^*\}$ из условия:

$$f^* = \arg \min_f J(H_0^*(f), f), \quad f \in \tilde{\Omega}, \quad (13)$$

при выполнении условия (12) на допустимом множестве, ограничивающем значения неизвестных параметров

$$\frac{H_{\min}}{H_0} \leq f_p \leq \frac{H_{\max}}{H_0}; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right|_{\Omega} \neq 0; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right|_{\Omega} \neq 0. \quad (14)$$

Функционал обратной задачи в (13) будет иметь вид:

$$J(H_0^*(f), f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (H_0^*(f) f(x, y))^2 d\Omega + \beta (q^{\min} - q^*)^2 = \frac{1}{2} \left(H_0^* \sum_p \alpha_p f_p \right)^2 + \beta (q^{\min} - q^*)^2,$$

где β – весовой коэффициент; q^{\min} – критическое значение нагрузки для текущих значений $H(\xi_1, \xi_2)$.

Считаем, что условие (12) выполнено.

Введем характеристические функции μ^1 и μ^2 следующим образом:

$$\mu^1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(f_p - \frac{H_{\min}}{H_0} \right) < 0; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}; \quad \mu^2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \left(\frac{H_{\max}}{H_0} - f_p \right) < 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сформулируем функцию Лагранжа:

$$\tilde{J}(F, \Psi) = -J(H_0^*(f), f) + \frac{1}{2} \sum_p \left(f_p - \frac{H_{\min}}{H_0} \right)^2 \mu_p^1 \tau_p + \frac{1}{2} \sum_p \left(\frac{H_{\max}}{H_0} - f_p \right)^2 \mu_p^2 \psi_p, \quad (15)$$

где $\Psi = \{\tau, \psi\}$ – множители Лагранжа.

Решение задачи (13) с ограничениями (14) определяется из условия минимума функции Лагранжа (15) [10].

Определим набор индексов $K = \{p_k\}$, $k = \overline{1, P}$ и рассмотрим наборы $K_1 \subset K$, $K_2 \subset K$, такие, что $K_1 \neq K_2$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, которые содержат индексы p_k , удовлетворяющие соотношениям:

$$\text{для } p_k \in K_1, \quad \mu_p^1 = 1,$$

$$\text{для } p_k \in K_2, \quad \mu_p^2 = 1.$$

Сформулировав необходимые условия экстремума, получим систему алгебраических уравнений, определяющую стационарные точки функции Лагранжа (15):

$$\begin{aligned} L_p &= \frac{\partial \tilde{J}(H_0^*, f)}{\partial f_p} + \tau \Delta_p^1 \mu_p^1 = 0 \quad \text{для } p \in K_1, \quad K_1 = \{p_1^1, p_2^1, \dots, p_k^1\}; \\ L_p &= \frac{\partial \tilde{J}(H_0^*, f)}{\partial f_p} + \psi \Delta_p^2 \mu_p^2 = 0 \quad \text{для } p \in K_2, \quad K_2 = \{p_1^2, p_2^2, \dots, p_k^2\}; \\ L_p &= \frac{\partial \tilde{J}(H_0^*, f)}{\partial f_p} = 0 \quad \text{для } p \in K, \quad p \notin K_1, \quad p \notin K_2; \end{aligned} \quad (16)$$

$$L_{p+1} = \left(\sum_p \Delta_p^1 \right)^2 \mu_p^1 = 0; \quad L_{p+2} = \left(\sum_p \Delta_p^2 \right)^2 \mu_p^2 = 0,$$

где $\Delta_p^1 = f_p - \frac{H_{\min}}{H_0}$, $\Delta_p^2 = f_p - \frac{H_{\max}}{H_0}$ при фиксированном H_0^* .

Неизвестный вектор $\tilde{f} = (f_1, f_2, \dots, f_p, \tau, \psi)^T$ определяется методом Ньютона:

$$\tilde{f}^{(n+1)} = \tilde{f}^{(n)} - \left[\left(\frac{\partial L_i}{\partial \tilde{f}_p} \right) \right]_{f_p = f_p^{(n)}}^{-1} \cdot L^{(n)}, \quad (17)$$

где n – номер шага итерационного процесса метода Ньютона; $p = \overline{1, P+2}$; $i = \overline{1, P+2}$.

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ОБОЛОЧКИ ПОД ЗАДАННУЮ КРИТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

Предложенный итерационный подход к решению обратной задачи может быть описан следующим алгоритмом:

1. Задать начальные значения параметров задачи: вектор значений $f^{нач} = (f_1^{нач}, f_2^{нач}, \dots, f_p^{нач})^T$, удовлетворяющий условиям (14), $\Psi \equiv 0$, N^* , q^* ; $i = 0$.
2. Определить $H_0^{*(0)}$ из условия (12).
3. $i = i + 1$.
4. Определить наборы индексов $p^{(i)} \in K_1$ и $p^{(i)} \in K_2$, $p = \overline{1, P}$, μ_p^1 , μ_p^2 .

5. Сформировать систему уравнений (17), определить вектора $\{f_p^{(i)}\}$, $p = \overline{1, P}$ и $\{\tau^{(i)}, \psi^{(i)}\}$ из условий (17) методом Ньютона.
6. Определить значение $H_0^{*(i)}$ при найденных значениях $f_p^{(i)}$ из условия (12).
7. Проверить выполнение условия $H_0^{*(i)} - H_0^{*(i-1)} > \varepsilon$, если выполняется, то перейти к шагу 3, иначе перейти к следующему шагу.
8. Конец.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для реализации алгоритма использован метод продолжения по параметру H_0 [11] из точки $q = q^*$ (или $N = N^*$), реализованный с использованием пакета прикладных программ конечно-элементного анализа. Построение решения, соответствующего исходному состоянию $T_{kl}^0(H)$, осуществляется путем продолжения решения по параметру нагружения с проверкой выполнения условия (12), в процессе фиксируется точка, отвечающая значению q^* (или N^*).

Для разрушения бифуркационной картины, т.е. для «отстройки» от кратности собственных значений начальное приближение F задается неосесимметричным с изменяемостью, соответствующей собственной форме оболочки постоянной толщины.

С помощью предложенного алгоритма был проведен численный эксперимент для цилиндрических оболочек с параметрами: 1 – $L/R = 2$; $R/H = 200$; 2 – $L/R = 4$; $R/h = 200$ и характеристиками материала: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $\mu = 0.3$, где H , R – значения толщины и радиуса кривизны оболочки; L – длина оболочки.

На торцах оболочки заданы условия шарнирного опирания, оболочка находится под действием равномерно распределенного нормального к боковой поверхности внешнего давления. Значение критической нагрузки q^* , для которой осуществлялось определение закона распределения толщины оболочки, было получено в результате решения задач устойчивости для оболочек постоянной толщины с параметрами $L = 0,12 \text{ м}$; $L = 0,24 \text{ м}$; $R = 0,06 \text{ м}$; $H = 0,0003 \text{ м}$ (распределение толщины для этих оболочек показано на рис. 1, 2, 5 мелким пунктиром).

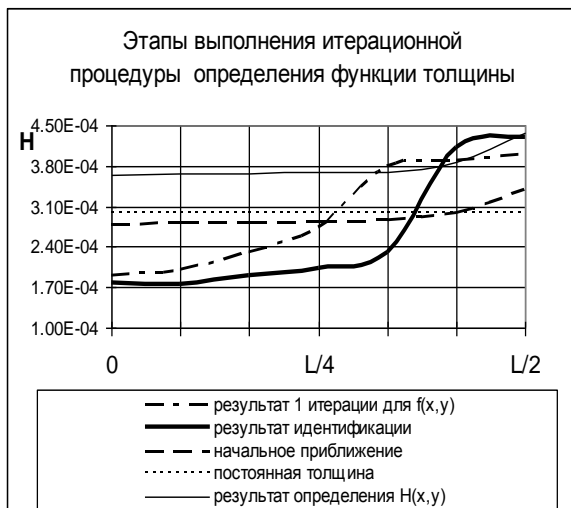


Рис. 1

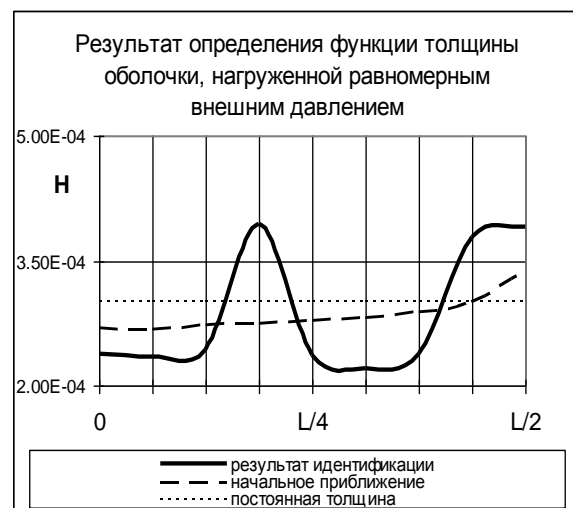


Рис. 2

На рис. 1. приведены этапы выполнения шагов алгоритма по определению оптимального закона распределения толщины для оболочки 1 при ограничениях на значения толщин $H_{\min} = 0,00015\text{м}$, $H_{\max} = 0,0004\text{м}$. В качестве начального приближения было задано распределение, обозначенное на рис. 1 пунктирной линией. Далее в первом итерационном процессе было определено значение $H_0^{*(1)}$, кривая, соответствующая этому значению, представлена на рис. 1 и обозначена тонкой сплошной линией. Для найденного значения $H_0^{*(1)}$ были определены значения компонент вектора $f^{*(1)} = \{f_i^*\}$ из условия минимума функционала (15), соответствующее распределение толщины оболочки обозначено на рис. 1 штрихпунктирной линией. Результат идентификации функции толщины под заданную критическую нагрузку показан на рис. 1 сплошной жирной линией. Значение критической нагрузки для оболочки с таким распределением толщины совпадает с заданным значением q^* для оболочки постоянной толщины.

На рис. 2 приведен результат идентификации функции распределения толщины для оболочки 2. Из анализа рисунков 1 и 2 видно, что найденные оптимальные законы распределения толщины описывают концентрацию материала для оболочки 1 – в центре, для оболочки 2 – симметрично, в центре и на расстоянии от центра, приблизительно равном $\frac{1}{3}$ длины оболочки. В обоих случаях в результате определения оптимального распределения толщины оболочки получено снижение веса конструкции: для оболочки 1 – на 17%, для оболочки 2 – на 12%.

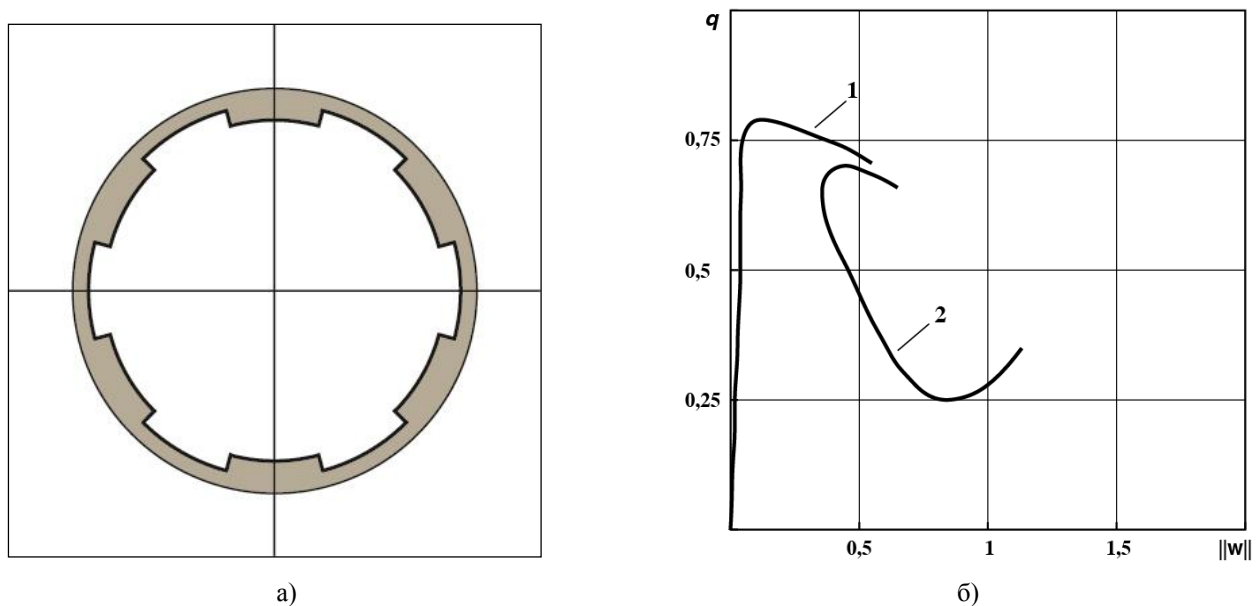


Рис. 3

На рис. 3, а представлено сечение оптимальной оболочки 2, а на рис. 3, б – фрагмент бифуркационной картины для оптимальной оболочки 2. Видно, что ветвь, соответствующая локальному решению (кривая 2 на рис. 3, б), является изолированной и нисходящей, что в случае одномерного ветвления является признаком ее неустойчивости [8]. Ветви, соответствующие остальным локальным формам, выглядят аналогично. На рис. 3, б введены обозначения: $\hat{q} = q/q^*$, $\|w\| = \max w/H_0$.

На рис. 4, а, б представлены собственные формы для случаев постоянной и неосесимметричной толщины. В первом случае собственная форма соответствует локальному деформированию, во втором – регулярному. Полученные результаты для оптимального проекта оболочки постоянной толщины качественно совпадают с результатами работы [6].

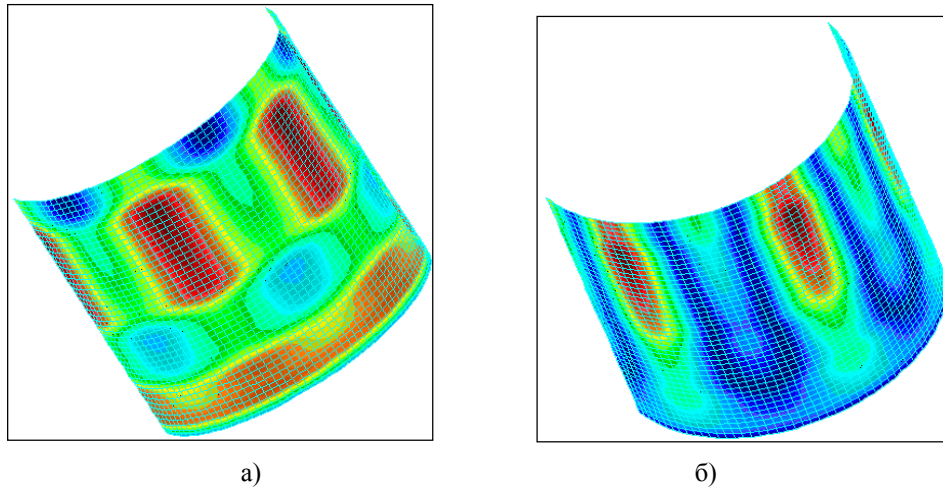


Рис. 4

Далее получено решение задачи определения толщины оболочки ($L/R = 4$; $R/h = 200$) для случая, когда нагрузка на боковую поверхность оболочки была неравномерной. Распределение нагрузки соответствовало закону:

$$q^*(\xi_1) = q^* [0,5 + 0,5 \sin \pi \xi_1 / L].$$

На рис. 5 показан результат выполнения процедуры идентификации, найденный оптимальный закон распределения толщины показывает, что материал концентрируется в области действия максимальной нагрузки. В сравнении с оболочкой постоянной толщины наблюдается снижение веса на 12%.

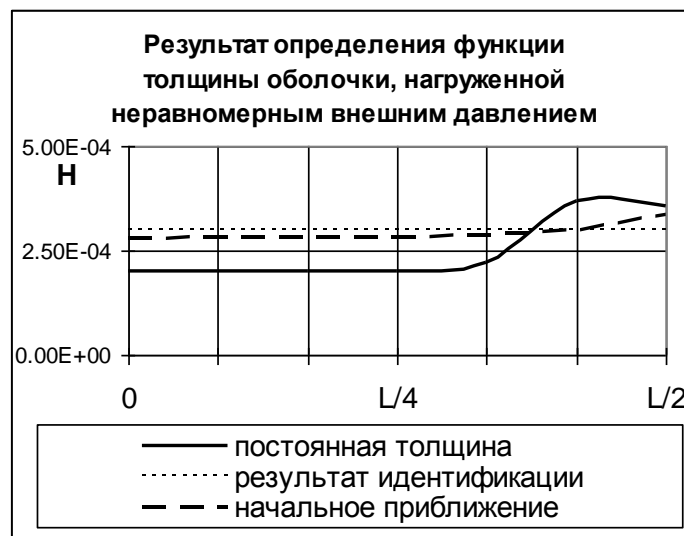


Рис. 5

ВЫВОДЫ

Предложенный подход позволил определить функцию распределения толщины оболочки, обеспечивающую минимальный вес, под заданную критическую нагрузку. Учет особенностей нелинейного напряженно-деформированного состояния оболочки и ограничений на значения функции толщины, обеспечивает оптимизацию в классе собственных форм, характеризующих общую потерю устойчивости, локальная потеря устойчивости реализуется на «далеких» закритических ветвях. Анализ результатов вычислительного эксперимента показал, что с использованием предложенного подхода возможно определение оптимального закона распределения толщины для оболочек с различными параметрами геометрии, находящихся под действием, как равномерно, так и неравномерно распределенной нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел / Н. В. Баничук. — М. : Наука, 1980. — 256 с.
2. Калинин И. Н. Проектирование оптимальных оболочек методом прямого поиска // И. Н. Калинин // Прикладная механика. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 36-42.
3. Демьянушко И. В. Расчет на прочность вращающихся дисков / И. В. Демьянушко, И. А. Биргер. — М. : Машиностроение, 1978. — 247 с.
4. Андреев Л. В. Об оптимальной толщине оболочки, нагруженной внешним давлением / Л. В. Андреев, В. И. Моссаковский, Н. И. Ободан // Прикладная математика и механика. — 1972. — Т. 36. — С. 717-725.
5. Медведев Н. Г. Некоторые спектральные особенности оптимальных задач устойчивости оболочек переменной толщины / Н. Г. Медведев // Доклады АН УССР. — 1980. — А, № 9. — С. 59-63.
6. Медведев Н. Г. Оптимизация цилиндрических оболочек переменной толщины при осесимметричной нагрузке / Н. Г. Медведев, Н. П. Тоцкий // Прикладная механика. — 1984. — Т. 20, № 9. — С. 53-57.
7. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт. — М. : Мир, 1980. — 607 с.
8. Obodan N. I. Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedev, V. A. Gromov. — Springer, 2013. — 179 p.
9. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. — М. : Наука, 1989. — 373 с.
10. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1988. — 549 с.
11. Григолюк Э. И. Проблемы нелинейного деформирования / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. — М. : Наука, 1988. — 230 с.
12. Bathe K. Numerical method in finite element analysis / K. Bathe, E. L. Wilson. — М. : Наука, 1985. — 648 с.

REFERENCES

1. Banichuk, N.V. (1980), *Optimizaciya form uprugikh tel* [Optimization of forms of elastic bodies], Nauka, Moscow, Russia.
2. Kalinin, I.N. (1982), "The design of optimal shells by the direct-search method", *Applied Mechanics*, vol. 18, no. 1, pp. 28-34.
3. Dem'yanushko, I.V. and Birger, I.A. (1978), *Raschet na prochnost vrashchayushshikh diskov* [Strength analysis of rotating disks], Mechanical Engineering, Moscow, Russia.
4. Andreev, I.V., Mossakovskiy, V.I. and Obodan, N.I. (1972), "The optimal shell thickness under the external pressure loaded", *Applied Mathematics and Mechanics*, issue 36, pp. 717-725.
5. Medvedev, N.G. (1980), "Some spectral features optimal problems stability of shells of variable thickness", *Doklady AN USSR*, no. 9, pp. 59-63.
6. Medvedev, N.G. and Totskii, N.P. (1984), "Optimizing cylindrical shells of variable thickness with axisymmetric loading", *Applied Mechanics*, vol. 20, no. 9, pp. 822-825.
7. Poston, T. and Stewart, Ian. (1998), *Teoriya katastrof i ee prilozheniya* [Catastrophe: Theory and Its Applications], Dover, New York.

8. Obodan, N.I., Lebedeyev, O.G. and Gromov, V.A. (2013), "Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells", Springer, London, England.
9. Vorovich, I.I. (1989), *Matematicheskie problemy nelinejnoj teorii plogikh obolochek* [Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells], Nauka, Moscow, Russia.
10. Vasil'ev, F.P. (1988), *Chislennye metody resheniya ekstremalnykh zadach* [Numerical methods for solving extremal problems], Nauka, Moscow, Russia.
11. Grigolyuk, E.I. and Shalashilin V.I. (1988), *Problemy nelinejnogo deformirovaniya* [Problems of nonlinear deformation], Nauka, Moscow, Russia.
12. Bathe, K. and Wilson, E.L. (1985), "Numerical method in finite element analysis", Nauka, Moscow, Russia.

УДК 539.3

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО-СТЕПЕНЕВИЙ ЗАКОН ДЕФОРМУВАННЯ ШОРСТКОСТІ В ПЛОСКІЙ ЗАДАЧІ ПРО ВДАВЛЕННЯ ШТАМПА

Д'яченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент, Столярчук І. А., к. ф.-м. н., доцент, Резвіна Д. Г., магістр,
Смолянкова Т. М., магістр

*Запорізький національний університет,
бул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна*

dyachenko-nata@mail.ru

Розглянуто нелінійне інтегральне рівняння плоскої контактної задачі про вдавнення штампа з плоскою або неплоскою основою в пружну шорстку товсту смугу при експоненціально-степеневому (узагальненому) законі деформування шорсткості. Досліджено випадки коефіцієнтів шорсткості, обмежених знизу (великим) і зверху (малим). У кожному із зазначених випадків відповідне рівняння зведено до рівняння Гаммерштейна, наближено-аналітичний розв'язок якого отримано методом послідовних наближень і методом редукції. Виявлено вплив параметрів шорсткості узагальненого закону на контактні характеристики.

Ключові слова: плоска контактна задача, штампи з плоскою та неплоскою основами, шорсткість, експоненціально-степеневий (узагальнений) закон деформування шорсткості.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ЗАКОН ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ ШТАМПА

Дьяченко Н. М., к. ф.-м. н., доцент, Столярчук И. А., к. ф.-м. н., доцент,
Резвина Д. Г., магистр, Соляникова Т. Н., магистр

*Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина*

dyachenko-nata@mail.ru

Рассмотрено нелинейное интегральное уравнение плоской контактной задачи о вдавливании штампа с плоским или неплоским основанием в упругую шероховатую толстую полосу при экспоненциально-степенном (обобщенном) законе деформирования шероховатости. Исследованы случаи коэффициентов шероховатости, ограниченных снизу (больших) и сверху (малых). В каждом из указанных случаев соответствующее уравнение сведено к уравнению Гаммерштейна, приближенно-аналитическое решение которого получено методом последовательных приближений и методом редукции. Установлено влияние коэффициентов шероховатости обобщенного закона на контактные характеристики.

Ключевые слова: плоская контактная задача, штампы с плоским и неплоским основаниями, шероховатость, экспоненциально-степенной (обобщенный) закон деформирования шероховатости.