11. Titova, O.O., Gritsenko, O.M., Dyachenko, T.A. and Stasyuk, O.V. (2012), “The plane contact problem on pressing of punch with flat foundation in the elastic strip at the different laws of deformation of the roughness”, *Visnyk Zaporizkogo nacionalnogo universytetu*, *Fiz.-mat. nauky*, no. 2, pp. 105-113.

12. Shishkanova, S.F., Dyachenko, N.M. and Shashkova, Ye.V. (2003), “Nonlinear generalized law of deformation of a roughness in the problem of a flat circular punch”, *Visnyk Kyyivskoho universytetu, Seriya : fiz.-mat. Nauky,* no. 3, pp. 269-273.

13. Dyachenko, N.M., Agapova, O.V., Batovsky, S.Ye. and Rezvina, D.G. (2013), “Generalized law of roughness deformation in the contact problem of the paraboloid punch”, *Sbornik nauchnyh trudov SWorld*, issea 4, vol. 4, Physics and mathematics, pp. 6-12.

14. Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1984), *Funkcionalnyi analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moskow, Russia.

УДК 519.85

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ОТРЕЗКОВ В ЗАДАЧАХ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

[1]Емец О. А., д. ф.-м. н., профессор, [2]Барболина Т. Н., к. ф.-м. н., доцент

[1]Полтавский университет экономики и торговли,
ул. Коваля, 3, г. Полтава, 36000, Украина

[2]Полтавский национальный педагогический университет им. В.Г. Короленко,
ул. Остроградского, 2, г. Полтава, 36000, Украина

yemetsli@mail.ru, tn_b@rambler.ru

Статья посвящена формализации взаимного расположения отрезков, лежащих на одной прямой, с учетом интервальной, нечеткой или стохастической неопределенности входных данных. Введены понятия и обоснованы необходимые и достаточные условия различных способов взаимного расположения отрезков. Показана полнота введенной системы взаимного расположения отрезков.
Ключевые слова: взаимное расположение отрезков, дискретная случайная величина, нечеткое число, центрированный интервал.

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ВЗАЄМНОГО РОЗТАШУВАННЯ ВІДРІЗКІВ У ЗАДАЧАХ З НЕВИЗНАЧЕНІСТЮ

[1]Ємець О. О., д. ф.-м. н., професор, [2]Барболіна Т. М., к. ф.-м. н., доцент

[1]Полтавський університет економіки і торгівлі,
вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36000, Україна

[2]Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г. Короленка,
вул. Остроградського, 2, м. Полтава, 36000, Україна

yemetsli@mail.ru, tn_b@rambler.ru

Стаття присвячена формалізації взаємного розташування відрізків, що лежать на одній прямій, в умовах інтервальної, нечіткої або стохастичної невизначеності вхідних даних. Уведені поняття та обґрунтовані необхідні й достатні умови різних способів взаємного розташування відрізків. Показано повноту введеної системи взаємного розташування відрізків.
Ключові слова: взаємне розташування відрізків, дискретна випадкова величина, нечітке число, центрований інтервал.

FORMALIZATION OF SEGMENTS MUTUAL PLACEMENT IN UNCERTAINTY PROBLEMS

[1]Iemets O. O., D. Sc. in Physics and Maths, professor,
[2]Barbolina T. M., associate professor, Ph. D. in Physics and Math

[1]*Poltava university of economics and trade,*
Koval St., 3, Poltava, Ukraine

yemetsli@mail.ru

[2]*Poltava V.G. Korolenko National Pedagogical University,*
Ostrogradsky St., 2, Poltava, Ukraine

tn_b@rambler.ru

Some important optimization problems require to choose the best mutual placement of rectangles. If initial data are centered intervals, fuzzy numbers or discrete random variables then the question of formalizing notion such mutual placement raises. One possible approach to this problem would be to use a certain order on the set of relevant variables, other one is proposed in this paper. Our approach is ideologically close to rigid statements in problems of stochastic programming.

Authors propose to determine the mutual placement of rectangles based on mutual placement of their projections on the coordinate axes. Therefore in this paper we discuss the mutual placement of two segments lying on one straight line when initial data are centered intervals, fuzzy numbers or discrete random variable.

Suppose coordinates of segment endpoints are centered intervals, fuzzy numbers or discrete random variable. We say that such parameters are IFSU-parameters. Based on relation of possible values of IFSU-parameters authors give the definitions of such segment mutual placement as unconditionally and probability belonging, unconditionally and probability intersection, unconditionally and probability non-intersection, external and internal tangency.

Specifically consider unconditionally non-intersection and external targency of segments with IFSU-parameters. Let $\tau(P, Q)$ be a segment where endpoints P and Q are IFSU-parameters and $\tau(p, q)$ be a segment where endpoints p and q are possible values of IFSU-parameters P and Q. We assume that the maximal possible value of IFSU-parameter P is less than or equal to the minimal possible value of IFSU-parameter Q (this condition is said to be definiteness of the segment endpoints).

Suppose for any possible values p, q, r, s of IFSU-parameters P, Q, R, S segments $\tau(p, q)$ and $\tau(r, s)$ have no common points; then these segments $\tau(P, Q)$ and $\tau(R, S)$ are called unconditionally non-intersecting.

Segments $\tau(P, Q)$ and $\tau(R, S)$ are called external targent if the following conditions hold: (i) there exists a unique pair of possible values q, r of IFSU-parameters Q, R such that for any possible values p, s of IFSU-parameters P,S segments $\tau(p, q)$ and $\tau(r, s)$ have one common point (ii) for any other possible values segment have no common points.

Let us remark that for stochastic uncertainty (IFSU-parameters are discrete random variables) probability of segment tagency (intersection, non-intersection) can be calculated.

In this paper we have proved necessary and sufficient conditions of each segment mutual placement. In particular segments $\tau(P, Q)$ and $\tau(R, S)$ are unconditionally non-intersecting iff the maximal possible value of IFSU-parameter Q is less than the minimal possible value of IFSU-parameter R. A necessary and sufficient condition for segments $\tau(P, Q)$ and $\tau(R, S)$ to be external targent is that the maximal possible value of IFSU-parameter Q is equal to the minimal possible value of IFSU-parameter R.

Based on necessary and sufficient conditions of segment mutual placement authors demonstrate completeness of given system of segment mutual arrangement: suppose segments $\tau(P, Q)$ and $\tau(R, S)$ satisfy definiteness of segment endpoints condition and the minimal possible value of IFSU-parameter P less than or equal to the minimal possible value of IFSU-parameter R; then segments $\tau(P, Q)$ and $\tau(R, S)$ are unconditionally intersecting or probability intersecting or unconditionally non-intersecting or probability non-intersecting or external tangent or internal tangent or segment $\tau(P, Q)$ unconditionally or probability belong to segment $\tau(R, S)$.

The concepts considered above may be used for determaning of mutual placement of rectangles with IFSU-parameters. If rectangle sides are parallel to coordinate axes then we study the mutual placement of its projections on axes. For example we say that rectangles are unconditionally non-intersecting if their projections on one of axes are unconditionally non-intersecting.

The approach offered in the paper is new and may be used in constructing of mathematical models of optimization problems, for example problems of rectangle packing or covering by rectangles.

Key words: mutual arrangement of segments, discrete random variable, fuzzy number, centered interval.

ВВЕДЕНИЕ

Применение аппарата комбинаторной оптимизации (см., например [1-6]) позволяет адекватно формализовать целый ряд практически значимых задач. Одной из таких задач евклидовой комбинаторной оптимизации является задача упаковки прямоугольников, которая в одном из простейших случаев формулируется следующим образом [2]. Пусть есть некоторая полубесконечная полоса, разделенная на полоски одинаковой ширины H. Заданы также t прямоугольников ширины H с длинами $a_1,...,a_t$. Задача состоит в расположении прямоугольников без наложений в полосе таким образом, чтобы длина занятой части полосы была минимально возможной (под длиной занятой части полосы понимают максимальную из длин занятых частей отдельных полосок).

Следует отметить, что в случае наличия той или иной неопределенности входных данных (см., например, [5, 7]) возникает вопрос о формализации понятий взаимного расположения прямоугольников в полосе. Одним из возможных подходов к решению данной проблемы может быть использование введенного порядка на множестве соответствующих величин (нечетких чисел [8], центрированных интервалов [7], случайных величин [9]). Например, в [8] это было подробно сделано для прямоугольников с нечеткими параметрами.

Может также использоваться подход, который идейно близок к жестким постановкам в задачах стохастического программирования [10, 11] и закрывает имеющийся в этом смысле пробел для учета стохастической неопределенности данных. Взаимное расположение прямоугольников предлагается устанавливать на основании взаимного расположения отрезков, которые являются проекциями прямоугольников на оси координат. В данной статье детально рассматривается вопрос о взаимном расположении двух отрезков, лежащих на одной прямой, если имеет место интервальная, нечеткая или стохастическая неопределенность в задании отрезков.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ОТРЕЗКОВ

Пусть на прямой введена система координат. Отрезок будем задавать координатами его концов, которые являются центрированными интервалами, нечеткими числами или случайными величинами (в рамках данной статьи будем рассматривать только нечеткие числа с дискретным носителем конечной мощности и конечнозначные дискретные случайные величины).

Такие параметры отрезков с неопределенностью (интервальной, нечеткой, стохастической) будем обозначать большими латинскими буквами и называть ИНСН-параметрами. Для удобства изложения также будем говорить о возможных значениях ИНСН-параметров, под которыми будем понимать следующее:

- для центрированных интервалов – множество точек соответствующего интервала, в том числе концы интервала;
- для нечетких чисел – элементы носителя нечеткого числа;
- для дискретных случайных величин – в соответствии с общепринятым пониманием – множество тех значений, для которых соответствующая вероятность положительна.

Возможные значения ИНСН-параметров будем обозначать соответствующими малыми латинскими буквами. Также для ИНСН-параметра R через $r^{\min}$ будем обозначать наименьшее, а через $r^{\max}$ наибольшее возможное значение (при указанных выше ограничениях на рассматриваемые величины наименьшее и наибольшее значение, очевидно, существуют), используя одинаковые большие и малые латинские буквы.

Отрезок с координатами концов η и θ (неопределенными ИНСН-параметрами или действительными числами) будем обозначать через $\tau(\eta,\theta)$. Полагаем, что конец с координатой η расположен левее (начало отрезка), то есть $\eta<\theta$ для действительных чисел и $p^{\min} \le q^{\min}$, если $\eta = P$, $\theta = Q$ – ИНСН-параметры. Полагаем также, что для ИНСН-параметров P, Q выполняется условие $p^{\max} \le q^{\min}$. Последнее условие (которое назовем *условием определенности концов отрезка*) означает, что для отрезка $\tau(P,Q)$ неравенство $p \le q$ выполняется при любых возможных значениях p, q ИНСН-параметров P, Q.

Рассмотрим отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$, для которых $p^{\min} \le r^{\min}$ (назовем это условие *упорядочением начал отрезков*). Тогда при возможных значениях p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$, очевидно, не имеют общих точек тогда и только тогда, когда $q < r$.

Докажем лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Необходимым и достаточным условием существования возможных значений p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S, при которых все точки отрезка $\tau(r,s)$ принадлежат отрезку $\tau(p,q)$, является выполнение неравенства

$$s^{\min} \le q^{\max}. \tag{1}$$

Доказательство. При выполнении неравенства (1) возможные значения $p^{\min}$, $q^{\max}$, $r^{\min}$, $s^{\min}$ удовлетворяют условию леммы, так как все точки отрезка $\tau(r^{\min},s^{\min})$ принадлежат отрезку $\tau(p^{\min},q^{\max})$ (напомним, что для рассматриваемых отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ выполняется условие упорядочения начал отрезков $p^{\min} \le r^{\min}$). Пусть теперь $s^{\min} > q^{\max}$. Тогда для любых возможных значений s, q ИНСН-параметров S, Q выполняются неравенства $s \ge s^{\min} > q^{\max} > q$, т.е. точка s отрезка $\tau(r,s)$ не принадлежит отрезку $\tau(p,q)$ независимо от возможных значений p, q, r, s. Лемма доказана.

Определение 1. Отрезок $\tau(R,S)$ будем называть ***безусловно принадлежащим*** отрезку $\tau(P,Q)$, если при любых возможных значениях p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S все точки отрезка $\tau(r,s)$ принадлежат отрезку $\tau(p,q)$.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием безусловной принадлежности отрезка $\tau(R,S)$ отрезку $\tau(P,Q)$ является выполнение системы

$$\begin{cases} p^{\max} \le r^{\min}, \\ q^{\min} \ge s^{\max}. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Если $p^{\max} > r^{\min}$, то точка $r^{\min}$ отрезка $\tau(r^{\min},s)$ не принадлежит отрезку $\tau(p^{\max},q)$ независимо от возможных значений ИНСН-параметров Q, S. Также при $q^{\min} < s^{\max}$ точка $s^{\max}$ отрезка $\tau(r,s^{\max})$ не принадлежит отрезку $\tau(p,q^{\min})$ независимо от возможных значений ИНСН-параметров R, S. Если условие (2) выполняется, то для любых возможных значений p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S имеют место неравенства

$$p \le p^{\max} \le r^{\min} \le r \le s \le s^{\max} \le q^{\min} \le q,$$

откуда следует, что все точки отрезка $\tau(r,s)$ принадлежат отрезку $\tau(p,q)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием того, что безусловная принадлежность отрезков не имеет места, является выполнение совокупности

$$\left[\begin{array}{l} s^{\max} > q^{\min}, \\ r^{\min} < p^{\max}. \end{array}\right. \tag{3}$$

Пример 1. Рассмотрим отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$, где P, Q, R, S являются центрированными интервалами, которые будем обозначать (α,σ), понимая под этим интервал числовой оси $(\alpha-\sigma;\alpha+\sigma)$ (α, σ – действительные числа, причем $\sigma \ge 0$). Пусть $P=(2;1)$, $Q=(9;0,5)$, $R=(4;0,5)$, $S=(7,5;1)$. В этом случае $p^{\min}=1$, $p^{\max}=3$, $q^{\min}=8,5$, $q^{\max}=9,5$, $r^{\min}=3,5$, $r^{\max}=4,5$, $s^{\min}=6,5$, $s^{\max}=8,5$. Так как $p^{\max}=3 \le q^{\min}=8,5$ и $r^{\max}=4,5 \le s^{\min}=6,5$, то для заданных отрезков выполняется условие определенности концов. Также выполняется условие упорядочения начал отрезков: $p^{\min} = 1 \le r^{\min} = 3{,}5$. Поскольку $p^{\max} = 3 \le r^{\min} = 3{,}5$ и $q^{\min} = 8{,}5 \ge s^{\max} = 8{,}5$, то в соответствии с теоремой 1 отрезок $\tau(R,S)$ является безусловно принадлежащим отрезку $\tau(P,Q)$ (см. также рис. 1, на котором заштрихованы те промежутки числовой прямой, которые принадлежат соответствующему отрезку при любых возможных значениях интервальных параметров).

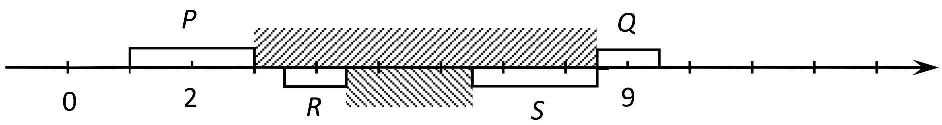

Рис. 1. Иллюстрация к примеру 1

Определение 2. Отрезок $\tau(R,S)$ будем называть ***возможно принадлежащим*** отрезку $\tau(P,Q)$, если при отсутствии безусловной принадлежности существуют такие возможные значения p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S, при которых все точки отрезка $\tau(r,s)$ принадлежат отрезку $\tau(p,q)$.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием возможной принадлежности отрезка $\tau(R,S)$ отрезку $\tau(P,Q)$ является выполнение системы из неравенства (1) и совокупности (3).

Доказательство. В соответствии с леммой 1 существуют возможные значения p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S, при которых все точки отрезка $\tau(r,s)$ принадлежат отрезку $\tau(p,q)$. С другой стороны, на основании следствия 1 получаем, что безусловная принадлежность отрезков не имеет места. Таким образом, отрезок $\tau(r,s)$ является возможно принадлежащим отрезку $\tau(p,q)$. Теорема доказана.

Определение 3. Отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ будем называть ***безусловно непересекающимися***, если при любых возможных значениях p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ не имеют общих точек.

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием безусловного непересечения отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ является выполнение неравенства

$$q^{\max} < r^{\min}. \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что имеет место противоположное к (4) неравенство $q^{\max} \ge r^{\min}$. Так как выполняется также условие упорядочения начал отрезка $p^{\min} \le r^{\min}$, то по крайней мере точка $r^{\min}$ принадлежит как отрезку $\tau(p^{\min}, q^{\max})$, так и отрезку $\tau(r^{\min}, s^{\max})$, что противоречит определению 3. Следовательно, предположение неправильно, то есть выполняется условие (4).

Пусть теперь $q^{\max} < r^{\min}$. Рассмотрим отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$, где p, q, r, s – произвольные возможные значения ИНСН-параметров. Так как $q \le q^{\max} < r^{\min} \le r$, то отрезки не имеют общих точек. Учитывая, что p, q, r, s – произвольные возможные значения ИНСН-параметров, то теорема доказана.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием того, что найдутся такие возможные значения p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S, при которых отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют общие точки, является выполнение неравенства

$$r^{\min} \le q^{\max}. \tag{5}$$

Определение 4. Отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ будем называть ***возможно непересекающимися***, если выполняются следующие условия:

а) существуют возможные значения p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S, при которых отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют больше одной общей точки;

б) существует такое возможное значение $\bar{r}$ ИНСН-параметра R, что при любых возможных значениях ИНСН-параметров P, Q, S отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(\bar{r},s)$ не имеют общих точек.

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием возможного непересечения отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ является выполнение неравенства

$$r^{\min} < q^{\max} < r^{\max}. \tag{6}$$

Доказательство. В соответствии со следствием 2 возможные значения p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S, при которых отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют общие точки, существуют тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (5). Однако только при $r^{\min} = q^{\max}$ такая точка единственная. Таким образом, левая часть неравенства (6) является необходимым и достаточным условием выполнения условия а) определения 4.

Рассмотрим теперь правую часть неравенства (6). Очевидно, что если неравенство $q^{\max} < r^{\max}$ выполняется, то, по крайней мере, $\bar{r} = r^{\max}$ удовлетворяет условию б) определения 4, так как в этом случае для произвольных возможных значений ИНСН-параметров P, Q, S с учетом условия определенности концов отрезка имеем $p \le q \le q^{\max} < r^{\max} = \bar{r} \le s$ откуда следует, что отрезки не пересекаются.

Если же правая часть неравенства (6) не выполняется, то есть $q^{\max} \ge r^{\max}$, то отрезки $\tau(p,q^{\max})$ и $\tau(r,s)$ будут иметь общие точки (по крайней мере $q^{\max}$) независимо от возможного значения r. Теорема доказана.

Определение 5. Отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ будем называть ***внешне касающимися***, если существует единственная пара возможных значений q, r ИНСН-параметров Q, R, при которых отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют одну общую точку независимо от возможных значений p, s ИНСН-параметров P, S, а при всех остальных возможных значениях ИНСН-параметров отрезки не имеют общих точек.

Теорема 5. Необходимым и достаточным условием внешнего касания отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ является выполнение равенства

$$q^{\max} = r^{\min}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть выполняется равенство (7). Тогда отрезки $\tau(p,q^{\max})$ и $\tau(r^{\min},s)$ имеют одну общую точку ($q^{\max} = r^{\min}$) при любых возможных значениях ИНСН-параметров P, S. Для всех остальных возможных значений ИНСН-параметров Q, R имеет место неравенство $q < r$, следовательно, отрезки не пересекаются.

Предположим, что равенство (7) не имеет места. Тогда выполняется одно из двух неравенств $q^{\max} < r^{\min}$ или $q^{\max} > r^{\min}$. В первом случае согласно теореме 3 отрезки не имеют общих точек ни при каких возможных значениях ИНСН-параметров. Во втором случае также не выполняются условия определения 5, так как отрезки $\tau(p,q^{\max})$ и $\tau(r^{\min},s)$ имеют больше одной общей точки. Теорема доказана.

Определение 6. Отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ будем называть ***внутренне касающимися***, если для любых возможных значений p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S отрезки $\tau(r,s)$ и $\tau(p,q)$ имеют различные (необщие) точки и при этом существует единственная пара возможных значений $\overline{q}$, $\overline{r}$ ИНСН-параметров Q, R, такая, что независимо от возможных значений p, s ИНСН-параметров P, S отрезки $\tau(p,\overline{q})$ и $\tau(\overline{r},s)$ имеют одну общую точку, а при всех остальных возможных значениях ИНСН-параметров Q, R отрезки имеют больше одной общей точки.

Теорема 6. Необходимым и достаточным условием внутреннего касания отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ является выполнение системы

$$\begin{cases} q^{\min} = r^{\max}, \\ s^{\min} > q^{\max}. \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что второе неравенство системы (8) является необходимым и достаточным условием наличия различных точек отрезков $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$. Рассмотрим теперь первое соотношение системы. Если $r^{\max} = q^{\min}$, то возможные значения $\overline{r} = r^{\max}$ и $\overline{q} = q^{\min}$ удовлетворяют условиям определения. Действительно, точка $r^{\max} = q^{\min}$ является единственной общей точкой отрезков $\tau(p,\overline{q})$ и $\tau(\overline{r},s)$, причем для всех остальных возможных значений ИНСН-параметров вследствие неравенства $r < r^{\max} = q^{\min} < q$ отрезки имеют более одной общей точки. Таким образом, имеет место внутреннее касание отрезков.

Пусть теперь $r^{\max} \neq q^{\min}$, то есть $r^{\max} < q^{\min}$ или $r^{\max} > q^{\min}$. В первом случае для любых возможных значений ИНСН-параметров имеем $r \le r^{\max} < q^{\min} \le q$ и все точки отрезка $\tau(r,q)$ принадлежат как отрезку $\tau(p,q)$, так и отрезку $\tau(r,s)$. Если $r^{\max} > q^{\min}$, то отрезки $\tau(p,q^{\min})$ и $\tau(r^{\max},s)$ не имеют общих точек при любых возможных значениях ИНСН-параметров P, S. Значит, при $r^{\max} \neq q^{\min}$ внутреннее касание отрезков не имеет места. Теорема доказана.

Определение 7. Отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ будем называть ***безусловно пересекающимися***, если $\tau(R,S)$ не является безусловно или возможно принадлежащим $\tau(P,Q)$ и при любых возможных значениях p,q,r,s ИНСН-параметров P,Q,R,S отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют больше одной общей точки.

Теорема 7. Необходимым и достаточным условием безусловного пересечения отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ является выполнение системы

$$\begin{cases} r^{\max} < q^{\min}, \\ s^{\min} > q^{\max}. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Второе неравенство системы в соответствии с леммой 1 является необходимым и достаточным условием того, что ни возможная, ни безусловная принадлежность отрезка $\tau(R,S)$ отрезку $\tau(P,Q)$ не имеет места.

При $r^{\max} < q^{\min}$ для любых возможных значений p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S имеем $r \le r^{\max} < q^{\min} \le q$ и все точки отрезка $\tau(r,q)$ принадлежат как отрезку $\tau(p,q)$, так и отрезку $\tau(r,s)$. Если $r^{\max} \ge q^{\min}$, то отрезки $\tau(p,q^{\min})$ и $\tau(r^{\max`},s)$ (p и s – любые из возможных значений ИНСН-параметров P и S) имеют не более одной общей точки. Теорема доказана.

Определение 8. Отрезки $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ будем называть ***возможно пересекающимися***, если выполняются следующие условия:

а) отрезок $\tau(R,S)$ не является возможно принадлежащим отрезку $\tau(P,Q)$;

б) существуют возможные значения p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S, при которых отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ не имеют общих точек;

в) существует такое возможное значение $\overline{q}$ ИНСН-параметра Q, что при любых возможных значениях ИНСН-параметров P, R, S отрезки $\tau(p,\overline{q})$ и $\tau(r,s)$ имеют по крайней мере одну общую точку.

Теорема 8. Необходимым и достаточным условием возможного пересечения отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$ является выполнение неравенств

$$s^{\min} > q^{\max} \geq r^{\max} > q^{\min}. \tag{10}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1 условие а) определения 8 выполняется тогда и только тогда, когда имеет место неравенство $s^{\min} > q^{\max}$.

Из теорем 6, 7 следует, что при любых возможных значениях p, q, r, s ИНСН-параметров P, Q, R, S отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r,s)$ имеют по крайней мере одну общую точку тогда и только тогда, когда $r^{\max} \leq q^{\min}$. Следовательно, для выполнения условия б) определения 8 необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $r^{\max} > q^{\min}$.

Если $q^{\max} \geq r^{\max}$, то $\overline{q} = q^{\max}$ удовлетворяет условию в) определения 8: отрезки $\tau(p,q^{\max})$ и $\tau(r,s)$ имеют по крайней мере одну общую точку независимо от возможных значений ИНСН-параметров P, R, S (действительно $r \leq r^{\max} \leq q^{\max}$).

С другой стороны, если $q^{\max} < r^{\max}$, то отрезки $\tau(p,q)$ и $\tau(r^{\max},s)$ не имеют общих точек независимо от возможных значений P, Q, S. Теорема доказана.

Теорема 9 (***о полноте введенной системы взаимного расположения отрезков в условиях неопределенности***). Для любых двух отрезков $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$, для которых выполнено условие определенности концов $p^{\max} \leq q^{\min}$ и условие упорядочения начал $p^{\min} \leq r^{\min}$, имеет место одно из соотношений, введенных в определениях 1-8.

Доказательство. Рассмотрим два произвольных отрезка $\tau(P,Q)$ и $\tau(R,S)$, удовлетворяющих условиям теоремы. Из условия упорядочения начал следует, что отрезок $\tau(P,Q)$ не является ни безусловно, ни возможно принадлежащим отрезку $\tau(R,S)$. Если также не имеет места ни безусловная, ни возможная принадлежность отрезка $\tau(R,S)$ отрезку $\tau(P,Q)$, то в соответствии с леммой 1 имеем $s^{\min} > q^{\max}$. Тогда, при отсутствии безусловного пересечения из теоремы 7 следует, что $r^{\max} \geq q^{\min}$. Но при $r^{\max} = q^{\min}$ отрезки согласно теоремы 6 внутренне касаются. Значит, если внутреннее касание также не имеет места, то $r^{\max} > q^{\min}$. Если при этом $q^{\max} \geq r^{\max}$, то в соответствии с теоремой 8 отрезки будут возможно пересекающимися.

Предположим, что $q^{\max} < r^{\max}$. Для $q^{\max}$ и $r^{\min}$ выполняется одно из трех соотношений: $q^{\max} > r^{\max}$, $q^{\max} = r^{\max}$ или $q^{\max} < r^{\max}$. В первом случае выполняется двойное неравенство $r^{\max} > q^{\max} > r^{\min}$ и в соответствии с теоремой 4 отрезки являются возможно непересекающимися. Во втором случае согласно теоремы 5 отрезки внешне касаются. В третьем случае – безусловно непересекаются (теорема 3). Таким образом, для произвольных двух отрезков, удовлетворяющих условию теоремы 9, имеет место одно из соотношений, введенных в определениях 1-8. Теорема доказано.

Замечание. В случае, когда неопределенность имеет вероятностный характер (то есть ИНСН-параметры являются дискретными случайными величинами), целесообразно также ставить вопрос о вероятности касания (пересечения, непересечения) отрезков.

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Предложенный в статье подход к установлению взаимного расположения отрезков с ИНСН-параметрами может быть применен для формализации взаимного расположения прямоугольников с аналогичной неопределенностью входных данных. При этом взаимное расположение прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат, может быть установлено на основе взаимного расположения проекций этих прямоугольников на оси координат. Например, прямоугольники будем называть безусловно непересекающимися, если безусловно не пересекаются проекции хотя бы на одну из координатных осей.

Такой подход к формализации взаимного расположения прямоугольников является новым. Авторам не известна рассматриваемая реализация прямоугольников со стохастическими параметрами. Для параметров с центрированными интервалами этот подход отличается от работ Ю.Г.Стояна и его учеников (см., например, [12]). Для параметров с нечеткими числами указанный подход отличен от работ, обобщенных в [8].

Как направление дальнейших исследований можно наметить использование рассмотренных положений для построения математических моделей задач, в частности задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу и покрытия полосы прямоугольниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. — К. : Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — Режим доступу : http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
3. Барболина Т. Н. Решение частично комбинаторных задач оптимизации на размещениях методом построения лексикографической эквивалентности / Т. Н. Барболина // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №6. — С. 137-149.
4. Емец О. А. Решение линейных условных полностью комбинаторных оптимизационных задач на перестановках методом ветвей и границ / О. А. Емец, Е. М. Емец, Т. А. Парфёнова, Т. В. Чиликина // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №2. — С. 121-128.
5. Емец О. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — №5. — С. 35-44.
6. Емец О. А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями / О. А. Емец, Т. Н. Барболина, О. А. Черненко // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — №5. — С. 79-85.
7. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — №5. — С. 38-50.
8. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. — Полтава : ПУЕТ, 2011. — 239 с. — Режим доступу : http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352.

9. Ємець О. О. Формалізація взаємного розташування прямокутників з випадковими параметрами / О. О. Ємець, Т. М. Барболіна // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2014) : abstracts of XXIV International Conference, September 1-5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic / Taras Shevchenko National University of Kyiv, University of Defence, Brno etc. — К. : ТВіМС, 2014. — С. 124-125.

10. Ермольев Ю. М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю. М. Ермольев, А. И. Ястремский. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 256 с.

11. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин. — М. : Сов. радио, 1974. — 400 с.

12. Стоян Ю. Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Л. Г. Евсеева // Доповіді НАН України. — 1997. — №.7. — С. 56-60.

REFERENCE

1. Sergienko, I.V. and Kaspshitskaya, M.F. (1981), *Modeli i metody resheniya na EVM kombinatornykh zadach optimizatsii* [Models and methods of solving combinatorial optimization problems by computers], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

2. Stoyan, Yu.G. and Iemets, O.O. (1993), *Teoriia i metody evklidovoi kombinatornoi optymizatsii* [Theory and methods of euclidian combinatorial optimization], Instytut systemnykh doslidzhen osvity, Ukraine.

3. Barbolina, T. (2013), “Solution of mixed combinatorial optimization problems on arrangements by the method of construction of lexicographic equivalence”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 49, issue 6, pp. 922-931.

4. Iemets, O.O., Yemets, Y.M., Parfionova, T.A. and Chilikina, T.V (2013), “Solving linear conditional completely combinatorial optimization problems on permutations by the branch and bound method”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 49, issue 2, pp. 264-278.

5. Yemets, O.A. and Roskladka, A.A. (2008), “Combinatorial optimization under uncertainty”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 44, issue 5, pp. 655-663.

6. Yemets, O.A., Barbolina, T.N. and Chernenko, O.A. (2006), “Solving optimization problems with linear-fractional objective functions and additional constraints on arrangements”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 42, issue 5, pp. 680-685.

7. Sergienko, I.V., Iemets, O.O. and Yemets, O.O. (2013), “Optimization problems with interval uncertainty: Branch and bound method”, *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 49, issue 5, pp. 673-683.

8. Iemets, O.O. and Yemets, O.O. (2011), *Rozviazuvannia zadach kombinatornoi optymizatsii na nechitkykh mnozhynakh* [Solving combinatorial optimization problems on fuzzy sets], PUET, Poltava, Ukraine.

9. Iemets, O.O. and Barbolina, T.M. (2014) “Formalization of mutual arrangement of rectangles with stochastic parameteres”, Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2014): abstracts of XXIV International Conference, Cesky Rudolec, Czech Republic, September 1-5, 2014, pp. 124-125.

10. Ermol'ev, Yu.M. and Yastremskii, A.I. (1979), *Stokhasticheskie modeli i metody v ekonomicheskom planirovanii* [Stochastic models and methods in economic planning], Nauka, Moskow, Russia.

11. Yudin, D.B. (1974), *Matematicheskie metody upravleniya v usloviyakh nepolnoi informatsii* [Mathematical methods of a management in the conditions of incomplete information], Sovetskoe radio, Moskow, Russia.

12. Stoyan, Yu.G., Romanova, T.E. and Evseeva, L.G. (1997) "Combinatorial optimization problem of arrangement of rectangles, taking into account errors of initial data", *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 7, pp. 56-60.

УДК 519.8

ФРАГМЕНТАРНАЯ СТРУКТУРА И ЭВОЛЮЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАСКРОЯ

Козин И. В., д. ф.-м. н., профессор, Кривцун Е. В., аспирант, Полюга С. И., ассистент

Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, 69600, Украина

kryvtsun@ukr.net

Исследуется проблема поиска оптимальных решений различных вариантов задач прямоугольного раскроя. Из-за большой вычислительной сложности, для отыскания приближенных оптимальных решений подобных задач является оправданным применение метаэвристик. Рассматривается задача построения универсальной эволюционной метаэвристики для отыскания приближенных оптимальных решений различных вариантов задач прямоугольного раскроя. Предлагается метаэвристика, которая является комбинацией двух алгоритмов – «жадного» алгоритма на фрагментарной структуре и эволюционного алгоритма на множестве перестановок конечного числа элементов. Дано определение фрагментарной структуры и описание стандартного «жадного» алгоритма построения максимального фрагмента – фрагментарного алгоритма. Показано, что фрагментарный алгоритм имеет полиномиальную трудоемкость. Рассматриваются две разновидности задачи прямоугольного раскроя в следующих постановках: задача прямоугольного раскроя на прямоугольнике с критерием плотности упаковки, задача прямоугольного гильотинного раскроя на бесконечной полосе с критерием длины используемой полосы. Показано, что каждая из этих задачи может быть сформулирована как задача поиска оптимального решения на взвешенной фрагментарной структуре. Предлагается универсальный эволюционный алгоритм на фрагментарной структуре, для которого элементами базового множества являются перестановки элементарных фрагментов. Описаны стандартные операторы кроссовера и мутации на множестве перестановок конечного числа элементов. Приводятся результаты анализа численного эксперимента по отысканию оптимальных решений рассматриваемых задач прямоугольного раскроя на основе предложенной схемы. На основе анализа результатов экспериментов сделан вывод о целесообразности применения предлагаемого в работе метода для отыскания приближенных оптимальных решений различных вариантов задач прямоугольного раскроя.

Ключевые слова: фрагментарная структура, «жадный» алгоритм, эволюционный алгоритм, задача прямоугольного раскроя, гильотинный раскрой.

ФРАГМЕНТАРНА СТРУКТУРА І ЕВОЛЮЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРЯМОКУТНОГО РОЗКРОЮ

Козін І. В., д. ф.-м. н., професор, Кривцун О. В., аспірант, Полюга С. І., асистент

Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

kryvtsun@ukr.net

Досліджується проблема пошуку оптимальних рішень різних варіантів задач прямокутного розкрою. Через велику обчислювальну складність, для відшукання наближених оптимальних рішень подібних задач є виправданим застосування метаеврістік. Розглядається задача побудови універсальної еволюційної метаеврістікі для відшукання наближених оптимальних рішень різних варіантів задач прямокутного розкрою. Пропонується метаеврістіка, яка є комбінацією двох алгоритмів – жадібного алгоритму на фрагментарній структурі та еволюційного алгоритму на множині перестановок скінченної кількості елементів. Дано