

6. Levinson, M. and Burgess, I.W (1971), "A comparison of some simple constitutive relations for slightly compressible rubber-like materials", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 13, pp. 563-572.
7. Blatz, P.J. (1960), "Application of finite elastic theory in predicting the performance of solid propellant rocket motors", *Calif. Inst. of Techn. GALCJISM*, pp. 60-125.
8. Chernous'ko, F.L. and Banichuk, V.P. (1973), "Variacionnye zadachi mehaniki i upravlenija", Nauka, Moscow.
9. Fedorenko, R.P. (1978), "Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravlenija", Nauka, Moscow.
10. Pod obshh. red. A.S. Saharova and I. Al'tenbaha (1982), "Metod konechnyh jelementov v mehanike tverdyyh tel", Vishha shkola, Kiev.
11. Ahundov, V.M. (1999), "Analiz jelastomernyh kompozitov na osnove sistem volokon. 3. Dvunapravlenno armirovannye kompozity", *Mehanika kompozit. materialov*, vol. 35, no. 4, pp. 479-492.
12. Ahundov, V.M. (2001), "Analiz jelastomernyh kompozitov na osnove sistem volokon. 4. Trehnapravlenno armirovannye kompozity", *Mehanika kompozit. materialov*, vol. 37, no. 3, pp. 355-376.

УДК 539.1:534.1

НЕСТАЦІОНАРНА ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЗГОДЖЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Кубенко В. Д., д. ф.-м. н., академік НАН України, Янчевський І. В., д. ф.-м. н., професор

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057, Україна*

vdk@inmech.kiev.ua; yanchevsky@ukr.net

Викладено чисельно-аналітичний підхід до вивчення процесу ударної взаємодії довгого кругового недеформованого тіла з поверхнею кругової циліндричної порожнини пружного простору, усередині якого перебуває тіло. Формулюється нестационарна змішана початково-крайова задача з наперед невідомими границями, які рухаються зі змінною швидкістю. Для розв'язання задачі застосовуються методи теорії інтегральних перетворень, розвинення шуканих величин у ряди Фур'є та метод квадратур, які дозволили звести задачу до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному кроці за часом. Конкретні числові розрахунки виконані для випадку, коли тіло і порожнина мають форму однакових кругових циліндрів. Проаналізовано вплив маси тіла на характеристики перехідного процесу контактної взаємодії.

Ключові слова: нестационарна змішана задача, порожнина пружного простору, циліндричне тіло, перетворення Лапласа, розвинення Фур'є.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОГЛАСОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Кубенко В. Д., д. ф.-м. н., академик НАН Украины, Янчевский И. В., д. ф.-м. н., профессор

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, г. Киев, 03057, Украина*

vdk@inmech.kiev.ua; yanchevsky@ukr.net

Изложен численно-аналитический подход к изучению процесса ударного взаимодействия длинного кругового недеформируемого тела с поверхностью круговой цилиндрической полости упругого пространства, внутри которого находится тело. Формулируется нестационарная смешанная начально-краевая задача с наперед неизвестными границами, которые движутся с переменной скоростью. Для решения задачи применяются

методы теории интегральных преобразований, разложение искомых величин в ряды Фурье и метод квадратур, позволившие свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений на каждом шаге по времени. Конкретные числовые расчеты выполнены для случая, когда тело и полость имеют форму равных круговых цилиндров. Проанализировано влияние массы тела на характеристики переходного процесса контактного взаимодействия.

Ключевые слова: нестационарная смешанная задача, полость упругого пространства, цилиндрическое тело, преобразование Лапласа, разложение Фурье.

NONSTATIONARY PLANE CONTACT PROBLEM FOR CONFORMAL CYLINDRICAL SURFACES

Kubenko V. D., D.Sc. in Physics and Maths, academician of NAS of Ukraine,
Yanchevskiy I. V., D.Sc. in Physics and Maths, professor

*S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine,
3, Nesterova str., Kyiv, 03057, Ukraine*

vdk@inmech.kiev.ua; yanchevsky@ukr.net

A numerical-analytical approach is described to investigating the process of impact interaction of a long circular rigid body with the surface of a circular cylindrical cavity in elastic space accommodating the body. A nonstationary mixed initial boundary value problem is formulated with a priori unknown boundaries moving with variable velocity. The problem is solved using the methods of the theory of integral transforms, expansion of sought for values into a Fourier series, and the quadrature method to reduce the problem to solving a system of linear algebraic equations at each time step. The accepted problem statement excludes body breakaway from the cavity surface. Thereby the time interval, during which the computation results adequately describe the process considered, is limited. Concrete numerical computations were done for the case when the body and the cavity have the shape of equal circular cylinders. The body mass impact on the profile of the transient process of contact interaction (stress in the contact zone, medium resistance force and body motion velocity) has been analysed. Computations have confirmed with a fine level of accuracy the $\cos(\theta)$ -distribution for normal stress over the cavity surface in the contact zone. Hence, to find the medium force of resistance it suffices to compute stress in the body frontal point.

Key words: nonstationary mixed problem, elastic space cavity, cylindrical body, Laplace transform, Fourier expansion.

ВСТУП

У механіці контактної взаємодії, у рамках якої перебувають і задачі пружного зіткнення тіл, розрізняють випадки взаємодії узгоджених та неузгоджених за формою тіл [1]. Неузгодженими називають взаємодіючі тіла, профілі яких, принаймні в тій своїй частині, що вступають в контакт з іншим тілом, не збігаються. Для таких тіл область контакту, зазвичай, суттєво менша їх характерних розмірів і при моделюванні задачі зіткнення тіл вона може бути апроксимована плоскою поверхнею (див., наприклад, [2-5]). Узгоджений контакт властивий «внутрішнім» контактним задачам і має місце, коли поверхні обох тіл у недеформованому стані в області контакту мають досить близькі або співпадаючі контури. В інженерній практиці, зокрема, такий тип контакту проявляється між цапфою вала (осі) і поверхнею опорної деталі, між зубцями сполучених коліс зачеплення Новікова та ін. [6, 7]. Незастосовність теорії Герца до розв'язання згаданих прикладних задач через сумірність розмірів області контакту з радіусами кривизни дотичних поверхонь, зокрема, циліндричної форми, обумовлюють інтерес до розвитку відповідних підходів до дослідження. Серед численних публікацій, присвячених розвитку ефективних методів розв'язання задач про контактну взаємодію узгоджених циліндричних тіл, слід відзначити монографії [1, 6, 8] та статті [9-14]. При цьому основна увага в публікаціях останніх років приділяється побудові наближених розв'язків задачі в статичній постановці при найменшій кількості незалежних параметрів. У той же час ударна контактна взаємодія узгоджених тіл залишається недостатньо вивченою [15, 16].

У нашій роботі запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання нестационарної задачі про ударний «внутрішній» контакт узгоджених тіл циліндричної форми. Розглядається випадок, коли тверде тіло, поперечний переріз якого окреслено досить гладкою у фронтальній частині кривою, ударяється з заданою початковою швидкістю о поверхню кругової циліндричної порожнини в пружному просторі. Напружено-деформований стан пружного середовища та характеристики руху тіла при його прониканні в середовище

підлягають визначенню. Суть запропонованого підходу полягає в застосуванні інтегрального перетворення Лапласа за часом і розвиненні шуканих величин у ряди Фур'є за відповідною кутовою координатою. Сформульована нестационарна змішана крайова задача зводиться до розв'язання парних інтегральних рівнянь, ядра яких визначаються за допомогою інтегрального рівняння Вольтерра. Розв'язок останнього будується через залучення регуляризуючого алгоритму, система парних рівнянь розв'язується шляхом дискретизації за часом і розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь на кожному часовому кроці. Чисельні результати отримані для найбільш типового випадку, коду радіуси порожнини та тіла збігаються. Для тіла різної маси визначені основні характеристики процесу зіткнення: напруження в області контакту, сила опору середовища, швидкість руху тіла. Відзначимо, що розглянутий випадок рівних радіусів порожнини та тіла є зручним для обчислень ще й тому, що в точках зміни граничних умов відсутній нормальний тиск на поверхню порожнини й тим самим вилучається поява особливостей розв'язку, який властивий змішаним задачам.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Ударна взаємодія тіла з пружним середовищем обумовлює, з одного боку, утворення в останньому пружних хвиль, які несуть частину енергії зіткнення, а з іншого – зміну швидкості руху тіла аж до зміни її знака та руху у зворотному напрямку. Адекватне моделювання розглянутого процесу вимагає розв'язання зв'язаної системи рівнянь, що складається з рівнянь теорії пружності, які описують рух пружного середовища, і рівнянь руху тіла. Очевидно, що на поверхні порожнини мають бути сформульовані такі змішані граничні умови:

- в області контакту тіла з середовищем має місце рівність переміщень тіла та середовища;
- на вільній поверхні порожнини нормальне напруження відсутнє;
- тертя в області контакту відсутнє, отже, дотичне напруження дорівнює нулеві на всій поверхні порожнини.

Зазначимо, що в загальному випадку при прониканні тіла в середовище положення граничних точок, які відокремлюють на поверхні порожнини область контакту від вільної поверхні, невідомо. Більш того, зазначені точки рухаються по поверхні порожнини з невідомою змінною швидкістю і їх положення визначається в кожний момент часу з розв'язання загальної зв'язаної задачі.

Початкові умови також очевидні:

- для тіла задано початкове переміщення (зазвичай – нульове) і початкове значення швидкості (час t будемо відлічувати з моменту початкового контакту тіла з порожниною);
- у початковий момент часу пружне середовище перебуває в спокої.

Наведені вище міркування дозволяють сформулювати змішану початково-крайову задачу із, загалом, наперед невідомою змінною в часі та просторі границею.

Довге тверде циліндричне тіло розташовано в циліндричній порожнині і в момент часу $t=0$

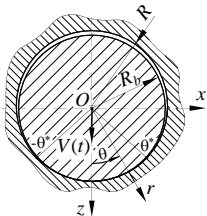


Рис. 1. Розрахункова схема

йому миттєво надається перпендикулярна до осі тіла швидкість руху $V(t)$. Будемо вважати, що швидкість $V(t)$ значно менша від швидкості звуку в середовищі, а глибини проникання тіла в середовище малі. Це дозволяє за рівняння руху середовища використовувати лінійні рівняння плоскої задачі теорії пружності та, крім того, відповідні граничні умови формулювати на недеформованій поверхні порожнини.

У довільному поперечному перерізі введемо декартову систему координат Oxz так, щоб напрямок осі z

збігався з напрямком вектора швидкості руху тіла $V(t)$, а початок координат O – з центром порожнини, і зв'яземо з нею полярну систему координат $Or\theta$, полярний кут θ якої відлічується від осі z (див. рис. 1).

Позначимо радіус порожнини через R . Пружне середовище характеризується параметрами Ламе λ і μ , та густиною ρ . Циліндричне тіло торкається поверхні порожнини в точці ($r=R$; $\theta=0$) і в момент часу $t=0$ починає рухатися так, що його утворююча паралельна до осі порожнини, а початкове значення швидкості $V_0=V(t)|_{t=0}$. Має місце задача плоскої деформації, відповідно до якої деформації та переміщення з площини Oxz відсутні.

Для зручності інтерпретації результатів далі будемо користуватися безрозмірними позначаннями, які введемо за допомогою таких співвідношень:

$$\bar{r} = \frac{r}{R};$$

$$\bar{u} = \frac{u}{R}; \quad \bar{v} = \frac{v}{R}; \quad \bar{U} = \frac{U}{R}; \quad \bar{R} = 1; \quad \bar{V} = \frac{V}{c_p}; \quad \bar{t} = \frac{c_p t}{R}; \quad \bar{M} = \frac{M}{\pi R^3 \rho};$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{2\mu}$$

$$; \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu}; \quad \bar{\sigma}_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu}; \quad \bar{Q} = \frac{Q}{\pi R^2 \rho c_p^2}.$$

Тут u і v – радіальна і тангенціальна компоненти вектора переміщень пружного середовища; U – переміщення тіла; V – його швидкість ($V=dU/dt$); σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень; $c_p = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ і $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ – відповідно, швидкості поздовжніх і поперечних хвиль у пружному середовищі; Q – сила реакції пружного середовища; M – погонна маса тіла, яка віднесена до маси пружного середовища ідентичного об'єму.

Нижче використовуються лише безрозмірні позначання, тому риска над ними буде опущена. У випадку плоскої деформації рух пружного середовища описується скалярними потенціалами Φ і Ψ , які задовольняють хвильовим рівнянням [17]:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \Psi - \xi^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\xi = \frac{c_p}{c_s}) \quad (1)$$

і пов'язані з вектором пружних переміщень \bar{U} за допомогою співвідношення

$$\bar{U} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\Psi.$$

У формулах (1) через ∇^2 позначено оператор Лапласа, який у полярних координатах має вигляд:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Напруження та переміщення представляються виразами:

$$u = \frac{\partial}{\partial r} \Phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi; \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi - \frac{\partial}{\partial r} \Psi;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \left(\frac{\xi^2}{2} - 1\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \Psi\right); \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \Phi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi\right); \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Phi - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \Psi\right).\end{aligned}\quad (2)$$

Сформулюємо граничні умови. Зображені на рис. 1 точки з полярними кутами $-\theta^*(t)$ і $\theta^*(t)$ відокремлюють область контакту тіла та порожнини від вільної поверхні останньої. Якщо позначити через U поступальне переміщення тіла в напрямку осі z , граничні умови на поверхні $r=1$ можна представити в наступному вигляді:

– рівність переміщень в області контакту ($|\theta| \leq \theta^*$)

$$u = U(t) \cos \theta; \quad (3)$$

– відсутність нормального напруження на вільній поверхні порожнини ($|\theta| > \theta^*$)

$$\sigma_{rr} = 0; \quad (4)$$

– відсутність дотичного напруження на всій поверхні порожнини ($|\theta| \leq \pi$)

$$\sigma_{r\theta} = 0. \quad (5)$$

Крім того, в області контакту ($r=1$, $|\theta| \leq \theta^*$) напруження σ_{rr} має бути стискаючим –

$$\sigma_{rr} < 0.$$

На нескінченності має місце умова загасання хвильових збурень –

$$\Phi \rightarrow 0, \Psi \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Початкові умови для потенціалів такі:

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0. \quad (7)$$

Нарешті, рівняння руху твердого тіла має вигляд:

$$M \frac{dV}{dt} = Q \quad (8)$$

при початковій умові

$$V(t) = V_0 \text{ при } t = 0. \quad (9)$$

Протидіюча заглибленню тіла сила Q обчислюється як інтеграл по поверхні контакту від проекції на вісь z напруження σ_{rr} –

$$Q = 2 \int_0^{\theta^*} \sigma_{rr}(t, \theta) \cos \theta d\theta. \quad (10)$$

Кут $\theta^*(t)$ визначає область контакту тіла й порожнини. Будемо вважати, що θ^* є полярним кутом точки перетину контуру поперечного перерізу порожнини і кривою, що є контуром тіла. У цьому випадку кут θ^* обчислюється виключно з геометричної задачі як функція розмірів порожнини та тіла і глибини проникання $U(t)$. Зокрема, для тіла у вигляді кругового циліндра безрозмірного радіуса R_b і порожнини радіусу $R=1$ значення кута θ^* визначається формулою:

$$\theta^* = \arccos \frac{U^2/2 + (1+U)(1-R_b)}{1-R_b+U}. \quad (11)$$

Якщо, наприклад, тіло має поперечний переріз у вигляді еліпса з безрозмірними півсями a і b , координати точок перетину є розв'язком системи рівнянь:

$$x = \sqrt{1-z^2} \quad \wedge \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(z+1-b+U)^2}{b^2} = 1,$$

а саме,

$$\theta^* = \arccos \frac{2a^2U + 2a^2 - 2a^2b \pm 2b\sqrt{a^4 + b^2 - 2ba^2 - a^2(2bU + 2U + U^2)}}{2(b^2 - a^2)}.$$

Співвідношення (2)-(11) представляють математичне формулювання розглянутої змішаної крайової задачі з початковими умовами.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для розв'язання сформульованої задачі застосуємо до рівнянь (1) інтегральне перетворення Лапласа по t з параметром s [18]. Відповідні трансформанти будемо позначати верхнім індексом L . Тоді рівняння (1) з урахуванням нульових початкових умов (7) будуть мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^L}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi^L}{\partial \theta^2} - s^2 \Phi^L = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^L}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial \theta^2} - s^2 \xi^2 \Psi^L = 0,$$

а їх загальний розв'язок, що загасає на нескінченності (див. (6)), запишеться у вигляді:

$$\Phi^L = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) K_n(sr) \cos n\theta; \quad \Psi^L = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(s) K_n(s\xi r) \sin n\theta. \quad (12)$$

Тут $K_n(x)$ – модифікована циліндрична функція Бесселя уявного аргументу [18]; A_n , B_n – невідомі коефіцієнти.

Переміщення, швидкість та напруження на поверхні порожнини ($r=1$) також представимо у вигляді рядів Фур'є, наприклад:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos n\theta; \quad \sigma_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rrn}(t) \cos n\theta; \quad \sigma_{r\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{r\theta n}(t) \sin n\theta. \quad (13)$$

Для того, щоб отримати розв'язок сформульованої змішаної граничної задачі, розглянемо спочатку розв'язання допоміжної задачі для системи рівнянь (1) при наступних граничних умовах: дотичне напруження на поверхні порожнини ($r=1$) відсутнє, однак відома швидкість її деформування у вигляді деякої функції $W(t, \theta)$, тобто:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{r=1} = W(t, \theta); \quad \sigma_{r\theta} \Big|_{r=1} = 0. \quad (14)$$

Функція $W(t, \theta)$ має бути представлена рядом Фур'є –

$$W(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t) \cos n\theta.$$

У зображеннях за Лапласом з використанням розв'язків (12) отримаємо, що коефіцієнти рядів (13) будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} (\partial u_n / \partial t)^L &= A_n(s)T_{1n} + B_n(s)T_{2n}; \quad \sigma_{rrn}^L = A_n(s)T_{5n} + B_n(s)T_{6n}; \\ \sigma_{r\theta n}^L &= A_n(s)T_{3n} + B_n(s)T_{4n}; \quad \sigma_{\theta\theta n}^L = A_n(s)T_{7n} + B_n(s)T_{8n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned} T_{1n} &= snK_n(s) - s^2K_{n+1}(s); \quad T_{2n} = nsK_n(s\xi); \quad T_{3n} = -n(n-1)K_n(s) + nsK_{n+1}(s); \\ T_{4n} &= \left(\frac{\xi^2}{2}s^2 + n(n-1) \right) K_n(s\xi) - s\xi K_{n+1}(s\xi); \quad T_{5n} = \left(\frac{\xi^2}{2}s^2 + n(n-1) \right) K_n(s) + sK_{n+1}(s); \quad T_{6n} = \left(\left(\frac{\xi^2}{2} - 1 \right) s^2 - n(n-1) \right) \times \\ &\times K_n(s) - sK_{n+1}(s); \quad T_{7n} = n(n-1)K_n(s\xi) - ns\xi K_{n+1}(s\xi); \quad T_{8n} = -n(n-1)K_n(s\xi) + ns\xi K_{n+1}(s\xi). \end{aligned}$$

З умов (14) і співвідношень (15) знаходимо:

$$A_n(s) = W_n^L \frac{T_{4n}}{T_{1n}T_{4n} - T_{2n}T_{3n}}; \quad B_n(s) = W_n^L \frac{-T_{3n}}{T_{1n}T_{4n} - T_{2n}T_{3n}}; \quad \sigma_{rrn}^L = W_n^L \frac{T_{4n}T_{5n} - T_{3n}T_{6n}}{T_{1n}T_{4n} - T_{2n}T_{3n}}.$$

Якщо скористатися асимптотичним поданням циліндричних функцій 3-го роду для великих значень аргументу виду $K_n(s) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s} (1 + \dots)$ [18] та теоремою про граничні співвідношення операційного обчислення [19], то можна визначити початковий стрибок значення напруження – $\sigma_{rrn} \Big|_{t=0} = -(\xi^2/2)W_n$. Тоді у виразі для σ_{rrn}^L можна виділити зазначений стрибок і представити компонент напруження у вигляді двох доданків

$$\sigma_{rrn}^L = W_n^L \left[-\frac{\xi^2}{2} + P_n^L(s) \right], \quad (16)$$

де

$$P_n^L(s) = \frac{T_{4n}T_{5n} - T_{3n}T_{6n} + \frac{\xi^2}{2}(T_{1n}T_{4n} - T_{2n}T_{3n})}{T_{1n}T_{4n} - T_{2n}T_{3n}}. \quad (17)$$

Вираз (16) тепер можна переписати в просторі оригіналів, скориставшись правилом згортки [19]

$$\sigma_{rr_n}(t) = -\frac{\xi^2}{2} W_n(t) + \int_0^t W_n(\tau) P_n(t-\tau) d\tau. \quad (18)$$

Якщо тепер повернутися до початкової граничної задачі (3)-(5), то отримане співвідношення (18) дозволяє сформулювати систему парних рівнянь відносно коефіцієнтів $W_n(t)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(t) \cos n\theta = V(t) \cos \theta, \quad |\theta| < \theta^*; \quad (19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{\xi^2}{2} W_n(t) + \int_0^t W_n(\tau) P_n(t-\tau) d\tau \right] \cdot \cos n\theta = 0, \quad |\theta| > \theta^*.$$

Тут $P_n(t)$ є оригіналом $P_n^L(s)$. Фігуруюча в правій частині системи (19) швидкість тіла $V(t)$ має задовольняти рівнянню руху (8), у якому сила Q , відповідно до формул (10) та (13), має вигляд:

$$Q = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \sigma_{rr_n}(t) \quad (20)$$

і, відповідно до (18), також може бути виражена через функції $W_n(t)$. При цьому коефіцієнти χ_n визначаються рівностями:

$$\chi_0 = \sin \theta^*; \quad \chi_1 = \frac{\theta^*}{2} + \frac{\sin 2\theta^*}{4}; \quad \chi_n = \frac{\sin(n-1)\theta^*}{2(n-1)} + \frac{\sin(n+1)\theta^*}{2(n+1)}.$$

Обчисливши з системи (19) коефіцієнти $W_n(t)$, за допомогою формул:

$$u(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t W_n(\tau) d\tau \cdot \cos n\theta; \quad (21)$$

$$\sigma_{rr}(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{\xi^2}{2} W_n(t) + \int_0^t W_n(\tau) P_n(t-\tau) d\tau \right] \cdot \cos n\theta$$

можна знайти напруження $\sigma_{rr}(t, \theta)$ і радіальне переміщення $u(t, \theta)$ точок порожнини на поверхні $r=1$.

ПОБУДОВА ОРИГІНАЛІВ ФУНКЦІЙ $P_n^L(s)$

Для розв'язання системи (19) необхідно мати ефективний алгоритм обчислення підінтегральних функцій $P_n(t)$, зображення яких представлені формулою (17). Викладемо тут механізм обчислення зазначених функцій. Функцію $P_n^L(s)$ представимо так:

$$P_n^L(s) = \frac{S_n^L(s)}{R_n^L(s)}, \quad (22)$$

де чисельник і знаменник мають вигляд:

$$R_n^L(s) = \frac{1}{s^4} [T_{1n}T_{4n} - T_{2n}T_{3n}] = -\frac{\xi^2}{2} n \frac{1}{s} K_n(s) K_n(s\xi) + \left(\frac{\xi^2}{2} - n \frac{1}{s^2} \right) K_{n+1}(s) K_n(s\xi) - \xi n \frac{1}{s^2} K_n(s) K_{n+1}(s\xi) + \xi \frac{1}{s} K_{n+1}(s) K_{n+1}(s\xi);$$

$$S_n^L(s) = \frac{1}{s^4} \left[T_{4n}T_{5n} - T_{3n}T_{6n} + \frac{\xi^2}{2} (T_{1n}T_{4n} - T_{2n}T_{3n}) \right] = -\left(\frac{\xi^4}{4} + \xi^2 n(n-1) \frac{1}{s^2} \right) K_n(s) K_n(s\xi) - \left(\frac{\xi^2}{2} \frac{1}{s} + n(n^2-1) \frac{1}{s^3} \right) K_{n+1}(s) K_n(s\xi) - \left(\frac{\xi^3}{2} \frac{1}{s} + \xi n(n^2-1) \frac{1}{s^3} \right) K_n(s) K_{n+1}(s\xi) + \xi(n^2-1) \frac{1}{s^2} K_{n+1}(s) K_{n+1}(s\xi) + \frac{\xi^2}{2} R_n^L(s).$$

Вираз (22) перепишемо у вигляді:

$$P_n^L(s) e^{s(1+\xi)} R_n^L(s) = e^{s(1+\xi)} S_n^L(s).$$

Якщо до останнього виразу застосувати теорему про згортку оригіналів [19], то для функцій $P_n(t)$ можна отримати інтегральне рівняння Вольєра I-го роду

$$\int_0^t P_n(\tau) \tilde{R}_n(t-\tau) d\tau = \tilde{S}_n(t), \quad n=0,1,\dots,\infty. \quad (23)$$

Ядро $\tilde{R}_n(t)$ і права частина $\tilde{S}_n(t)$ цього рівняння обчислюються за допомогою згорток на основі табличних подань оригіналів циліндричних функцій Макдональда [20]:

$$F_n^{(0)} = L^{-1} \left\{ e^{\alpha s} K_n(\alpha s) \right\} = \frac{z_1^n + z_2^n}{2\alpha Z}; \quad F_n^{(1)} = L^{-1} \left\{ \frac{e^{\alpha s}}{s} K_n(\alpha s) \right\} = \frac{z_1^n - z_2^n}{2n};$$

$$F_n^{(2)} = L^{-1} \left\{ \frac{e^{\alpha s}}{s^2} K_n(\alpha s) \right\} = \alpha \left[\frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{4n(n+1)} - \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{4n(n-1)} \right],$$

де

$$z_{1,2}(\alpha, t) = z_0(\alpha, t) \pm Z, \quad Z = \sqrt{z_0^2(\alpha, t) - 1}, \quad z_0(\alpha, t) = 1 + t/\alpha, \quad \alpha = 1, \xi.$$

Для побудови оригіналів з індексом $n \geq 2$ можна також скористатися рекурентними співвідношеннями:

$$F_n^{(0)} = 2z_0 F_{n-1}^{(0)} - F_{n-2}^{(0)}; \quad F_n^{(1)} = 2z_0 \frac{n-1}{n} F_{n-1}^{(1)} - \frac{n-2}{n} F_{n-2}^{(1)}; \quad F_n^{(2)} = \frac{\alpha}{2n} (F_{n+1}^{(1)} - F_{n-1}^{(1)}),$$

при цьому для малих значень n справедливі вирази:

$$F_0^{(0)} = \frac{1}{\alpha Z}; \quad F_1^{(0)} = \frac{z_0}{\alpha Z}; \quad F_0^{(1)} = \ln z_1; \quad F_1^{(1)} = Z; \quad F_0^{(2)} = \alpha(z_0 \ln z_1 - Z); \quad F_1^{(2)} = \frac{\alpha}{2}(z_0 Z - \ln z_1).$$

ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

При проведенні чисельних експериментів розглянута найбільш поширена ситуація, коли тіло та порожнина мають форму кругового циліндра, причому їх радіуси настільки мало відрізняються один від одного, що їх можна вважати однаковими ($R=R_b$). У цьому випадку, очевидно, початкове значення полярного кута θ^* , який визначає границю контакту поверхонь, дорівнює $\pi/2$ (рис. 1). Коефіцієнт ξ при обчисленнях прийнято рівним 1,87, що відповідає значенню коефіцієнта Пуассона матеріалу середовища, близького до 0,3.

Розв'язання системи рівнянь (21), як і інтегральних рівнянь Вольтерра (23), здійснювалося чисельно, при цьому заміна інтегралів скінченними сумами виконана за допомогою формули прямокутників (метод середньої точки). Крок дискретизації за часовою координатою Δt приймався постійним. Значення Δt та кількість утримуваних членів у рядах Фур'є N обиралися з умови забезпечення прийнятної точності обчислень. Так, на досліджуваному тимчасовому інтервалі $[0; T]$ ($T=3$) різниця максимальних значень розрахункових величин при $N=120$ і $\Delta t=0,005$ та $N=160$ і $\Delta t=0,0025$ не перевищувала 1%. Прискорення збіжності рядів Фур'є здійснювалося за допомогою використання σ -множників Ланцоша. При розв'язанні інтегральних рівнянь (23) залучався регуляризуючий алгоритм Тихонова зі стабілізатором 1-го порядку, який широко використовується при розв'язанні некоректних задач обчислювальної математики [21]. Фігуруючий в алгоритмі параметр регуляризації обчислювався на підставі принципу нев'язки, при цьому відносний рівень нев'язки був прийнятий рівним 0,0001.

Отже, система рівнянь (21) розв'язувалася на кожному m -му кроці за часом ($m=1,2,\dots,T/\Delta t$) відносно $N+1$ невідомих – коефіцієнтів $W_n(m\Delta t)$ ($n=0,\overline{N}$). Обчислені на попередніх кроках значення $W_n(p\Delta t)$ ($p=1,\overline{m-1}$) вважалися відомими і тому переносилися в праву частину на поточному розрахунковому кроці за часом. При цьому був застосований такий підхід. Замість безперервної кутової координати θ розглядалася дискретна величина θ_k з кроком $\Delta\theta=\pi/K$ ($\theta_k=k\Delta\theta$; $k=0,\overline{K}$; $K\geq N$). Це дозволило перейти від системи з двох рівнянь (21) до її скінченно-вимірного аналога, який є системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з $K+1$ рівнянь відносно $W_n(m\Delta t)$ ($n=0,\overline{N}$). Перші k_0+1 рівнянь цієї системи представляють перше рівняння вихідної системи (21), записані для $\theta_k\leq\theta^*$, а решта рівнянь – друге з $\theta^* < \theta_k \leq \pi$. Отже, k_0 є таке значення k , для якого $k_0 \leq \frac{\theta^*}{\Delta\theta} < k_0+1$. Згадана СЛАР з урахуванням прийнятої квадратурної формули може бути представлена у вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta_k \cdot W_n(m\Delta t) = V(m\Delta t) \cos\theta_k, \quad k=0,\overline{k_0};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta_k \left(\frac{\xi^2}{2} + P_n(0.5\Delta t)\Delta t \right) W_n(m\Delta t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta_k \cdot \left[\sum_{p=1}^{m-1} W_n(p\Delta t) P_n((m-p+0.5)\Delta t)\Delta t \right],$$

$$k=\overline{k_0+1, K}.$$

Отриману систему можна записати в матричній формі

$$\mathbf{AX}=\mathbf{Y} \quad (24)$$

так, що елементи матриць визначаються рівностями:

$$\{\mathbf{A}\}_{k+1,n+1} = \cos n\theta_k; \quad \{\mathbf{Y}\}_{k+1} = V(m\Delta t) \cos\theta_k \quad \text{для } k=0,\overline{k_0};$$

$$\{\mathbf{A}\}_{k+1,n+1} = \cos n\theta_k \left(\frac{\xi^2}{2} + P_n(0.5\Delta t)\Delta t \right); \quad \{\mathbf{Y}\}_{k+1} = -\cos n\theta_k \cdot \sum_{p=1}^{m-1} W_n(p\Delta t) P_n((m-p+0.5)\Delta t)\Delta t \quad \text{для } k=\overline{k_0+1, K};$$

$$\{\mathbf{X}\}_{n+1} = W_n(m\Delta t) \quad (n=0,\overline{N}).$$

Тоді, при $K=N$ розв'язок системи (24) може бути отриманий відповідно до класичної формули $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$. У випадку $K>N$ її розв'язок будується методом найменших квадратів – $\mathbf{X}=(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y}$, де індекс Т позначає операцію транспонування.

Обчислені з системи (24) коефіцієнти $W_n(m\Delta t)$ дозволяють визначити як радіальне переміщення u і нормальне напруження σ_r на поверхні порожнини (див. (21)), так і силу реакції середовища Q (див. (18), (20)), і швидкість проникання V (див. (8)).

Результати обчислення при початковому значенні швидкості проникання $V_0=0,01$ і різних значеннях безрозмірної погонної маси тіла ($M \rightarrow \infty$; $M=10,5$; $3,5$; 1 і $0,35$) представлені на рис. 2 і 3 кривими 1-5, відповідно. Як і слід було очікувати, у початковий момент часу ($t=0$) сила Q миттєво приймає деяке значення $Q(0)$ (рис. 2). При цьому $Q(0)$ не залежить від маси тіла M і у випадку рівності радіусів циліндричних поверхонь ($R=R_b$) маємо $Q(0) = -V_0\theta^*\xi^2/2$. Подальший характер зміни $Q(t)$ визначається масою M . Так, при нескінченно великому значенні M швидкість руху тіла залишається незмінною (рис. 3, крива 1), однак спостерігається деяке зростання Q у часі (рис. 2, крива 1). Інша картина має місце при скінченних значеннях маси. Для досить важкого тіла з масою $M=10,5$ зміна в часі сили Q практично не відбувається (рис. 2, крива 2), але відповідна цьому значенню маси швидкість руху тіла V зменшується за законом, який близький до лінійного (рис. 3, крива 2). При менших значеннях маси тіла M швидкість V і сила Q з часом зменшуються, при цьому чим менша M , тим більша швидкість зміни (криві 3 на рис. 2 і 3 побудовані для $M=3,5$, криві 4 – для $M=1$, а криві 5 – для $M=0,35$). Відзначимо, що $M=1$ відповідає випадку, коли густини матеріалів тіла та середовища збігаються.

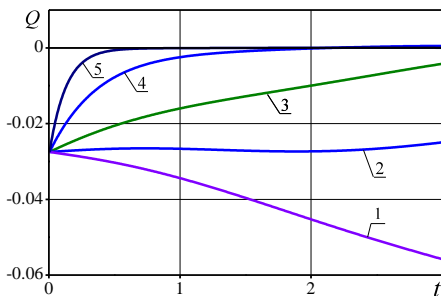


Рис. 2. Сила реакції середовища

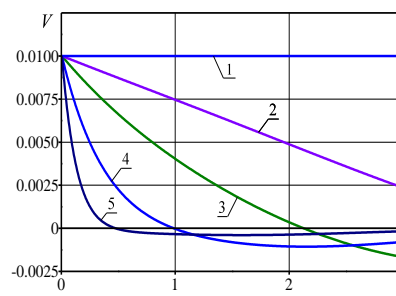


Рис. 3. Швидкість тіла

З рис. 3 також видно, що в певний момент часу $t=t_v$, коли $V(t)=0$, тіло зупиняється, а потім середовище починає «виштовхувати» тіло (має місце зворотний рух тіла). Виявилось, що після зміни напрямку руху ($t>t_v$) швидкість зворотного руху тіла V зростає до моменту часу, коли сила реакції стає рівною нулеві. Після зміни знака Q швидкість, як і сама сила реакції середовища, повільно зменшується, асимптотично наближаючись до нульового значення.

Нескладно показати, що на початковому етапі взаємодії швидкість проникання тіла $V(t)$ змінюється за законом $V(t)=V_0e^{-\xi^2/Mt}$, тобто зменшується експоненціально з показником експоненти ξ^2/M . Це впливає з того, що при малих t , коли за розв'язок системи (18)

можна використовувати перше наближення $W(t,\theta)=H(\theta^*-\theta)V(t)\cos\theta$, $\sigma_r=-\frac{\xi^2}{2}W(t,\theta)$, рівняння руху тіла (8), з врахуванням (9) і (10), запишеться:

$$M \frac{dV}{dt} = -\xi^2 \int_0^{\theta^*} V(t)\cos\theta d\theta = -\xi^2 V(t), \quad V(t)|_{t=0} = V_0.$$

Розв'язком цього рівняння є функція $V(t)=V_0e^{-(t^2/M)}$. Аналогічна залежність від часу при малих t буде мати місце для напруження σ_{rr} та сили реакції Q .

Зазначимо, що при побудові графіків на рисунках 2 і 3 число K , яке визначає кількість розрахункових точок за кутовою координатою, прийняте $K=200$.

На рис. 4 представлені графіки розподілення за кутовою координатою θ нормального напруження σ_{rr} для різних моментів часу ($t=0; 0,25; 0,5; 1; 2$ і 3). Значення маси тіла дорівнює $M=3,5$. Можна стверджувати, що з достатньою точністю ці криві можуть бути апроксимовані виразом

$$\sigma_{rr}(t,\theta)=H(\theta^*-\theta)\sigma_{rr}(t,0)\cos(\theta), \quad (25)$$

де $\sigma_{rr}(t,0)$ – напруження в лобовій точці $\theta=0$ (див. також [1]). Для порівняння на рис. 4 відповідний до цього виразу розподіл напруження σ_{rr} для моменту часу $t=2$ показаний штриховою кривою. Встановлено також, що в розглянутому випадку ($R=R_b$) сила реакції середовища $Q(t)$ прямо пропорційна напруженню в лобовій точці $\sigma_{rr}(t,0)$ – $Q(t)\approx\sigma_{rr}(t,0)\theta^*$. Аналогічні залежності встановлені і для інших значень безрозмірної маси тіла M .

Зазначимо, що на графіках має місце локальне (в околі точки θ^*) розтягувальне напруження, яке, очевидно, обумовлено прийнятими граничними умовами, які виключають відрив тіла від поверхні порожнини.

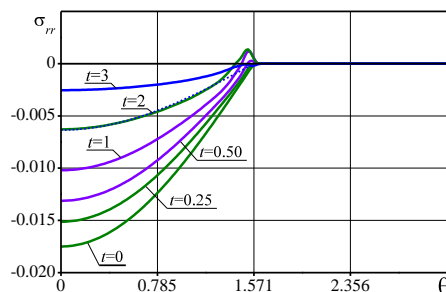


Рис. 4. Розподіл напруження

ВИСНОВКИ

Запропонована методика чисельно-аналітичного розв'язання задачі про ударне проникання (нестационарне втискування) твердого циліндричного тіла в поверхню циліндричної порожнини в пружному просторі дозволяє в рамках лінійної задачі теорії пружності при швидкостях проникання, які значно менші швидкості пружних хвиль у середовищі, обчислити всі характеристики процесу взаємодії тіла та середовища. Слід пам'ятати, що розглянута постановка задачі не передбачає відрив тіла від поверхні порожнини. Тим самим інтервал часу, впродовж якого результати обчислень адекватно описують розглянутий процес, є обмеженим. Проведені обчислення для випадку, коли радіуси тіла та порожнини збігаються, з гарним ступенем точності підтвердили розподіл відповідно до $\cos(\theta)$ нормального напруження σ_{rr} по поверхні порожнини в області контакту – див. (25). Отже, для визначення сили опору середовища достатньо обчислити напруження $\sigma_{rr}(t,0)$ у лобовій точці тіла.

ЛІТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 509 с.
2. Adda-Bedia V. M. Supersonic and subsonic stages of dynamic contact between bodies / V.M. Adda-Bedia, Smith S.G. Llewellyn // Proc. R. Soc. A. – 2006. – Vol. 462. – P. 2781-2795.
3. Кубенко В. Д. Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды / В.Д. Кубенко // Успехи механики (в 6-ти томах). – Т. 5 : К. : Літера Лтд., 2009. – С. 566-607.
4. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости / В.Б. Поручиков. – М. : Наука, 1986. – 328 с.

5. Thompson J. C. An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and an elastic body / J.C. Thompson, A.R. Robinson // *J. Appl. Mech.* – 1977. – Vol. 44, Iss. 4. – P. 583-586.
6. Александров В. М. Введение в механику контактных взаимодействий / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – Ростов-на-Дону : Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
7. Чебаков М. И. К теории расчета двухслойного цилиндрического подшипника / М.И. Чебаков // *Изв. РАН. МТТ.* – 2009. – № 3. – С. 163-170.
8. Кравчук А. С. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами / А.С. Кравчук, А.В. Чигарев. – Минск : Технопринт, 2000. – 196 с.
9. Ciavarella M. The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact / M. Ciavarella, P. Decuzzi // *Int. J. of Solids and Structures.* – 2001. – Vol. 38. – P.4507-4523.
10. Коваленко Е. В. Математическое моделирование упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями / Е.В. Коваленко // *Трение и износ.* – 1995. – Т. 16, № 4. – С. 667-678.
11. Liu C. The compliance contact model of cylindrical joints with clearances / C. Liu, K. Zhang, L. Yang // *Acta Mech Sinica.* – 2005. – Vol. 21. – P. 451-458.
12. Мелешко И. Н. Численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для твердых тел с согласованными контактными поверхностями / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич, А.В. Чигарев // *Наука и техника.* – 2013. – № 6. – С. 79-83.
13. Pedersen P. On the influence of clearance in orthotropic disc-pin contacts / P. Pedersen // *Composite Structures.* – 2007. – Vol. 79, Iss. 4. – P. 554-561.
14. Wang Q. J. Conformal-contact elements and systems / Q.J. Wang // *Encyclopedia of Tribology.* – 2013. – P. 434-440.
15. Gilardi G. Literature survey of contact dynamics modelling / G. Gilardi, I. Sharf // *Mechanism and Machine Theory.* – 2002. – Vol. 37, No. 10. – P. 1213-1239.
16. Zhong Z.-H. Contact-impact problems: A Review with bibliography / Z.-H. Zhong, Ja. Mackerle // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – Vol. 47, Iss. 2. – P. 55-76.
17. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – К. : Наук. думка, 1978. – 308 с.
18. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1966. – 295 с.
19. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М. : Высшая школа, 1965. – 466 с.
20. Методы расчета оболочек : [в 5 т.] / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек / Гузь А.Н., Кубенко В.Д. – К. : Наук. думка, 1982. – 400 с.
21. Тихонов А. Н. Численные методы решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.

REFERENCES

1. Johnson, K.L. (2003), *Contact mechanics*, Cambridge Univ. Press, New York, USA.
2. Adda-Bedia, B.M. and Llewellyn, Smith S.G. (2006), “Supersonic and subsonic stages of dynamic contact between bodies”, *Proc. R. Soc. A.*, vol. 462, pp. 2781-2795.
3. Kubenko, V.D. (2004), “Impact of blunted bodies on a liquid or elastic medium”, *Int. Appl. Mech.*, vol. 40, iss. 11, pp. 1185-1225.

4. Poruchikov, V.B. (1993), *Methods of the classical theory of elastodynamics*, Springer, Berlin, Germany.
5. Thompson, J.C. and Robinson, A.R. (1977), "An exact solution for the superseismic stage of dynamic contact between a punch and an elastic body", *J. Appl. Mech.*, vol. 44, iss. 4, pp. 583-586.
6. Alexandrov, V.M. and Chebakov, M.I. (2007), *Vvedenie v mehaniku kontaktного vzaimodeistviia* [Introduction to the mechanics of contact interactions], Publ. OOO "TsVVR", Rostov-on-Don, Russia.
7. Chebakov, M.I. (2009), "To the theory of analysis of a two-layer cylindrical bearing", *Mechanics of Solids*, vol. 44, iss. 3, pp. 473-479.
8. Kravchuk, A.S. and Chigarev, A.V. (2000), *Mehanika kontaktного vzaimodeistviia tel s krugovymi granitsami* [Mechanics of contact interaction for solids with round boundaries], Tehnoprint, Minsk, Belarus.
9. Ciavarella, M. and Decuzzi, P. (2001), "The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact", *Int. J. of Solids and Structures*, vol. 38, pp.4507-4523.
10. Kovalenko, E.V. (1995), "Contact problems for conforming cylindrical bodies", *J. Friction and Wear*, vol. 16, iss. 4, pp. 35-44.
11. Liu, C., Zhang, K. and Yang, L. (2005), "The compliance contact model of cylindrical joints with clearances", *Acta Mech Sinica*, vol. 21, pp. 451-458.
12. Meleshko, I.N., Pronkevich, S.A. and Chigarev, A.V. (2013), "Numerical-analytical solution of Prandtl equations for solids with conformal contact surfaces", *Nauka i tehnika*, iss. 6, pp. 79-83.
13. Pedersen, P. (2007), "On the influence of clearance in orthotropic disc-pin contacts", *Composite Structures*, vol. 79, iss. 4, pp. 554-561.
14. Wang, Q.J. (2013), "Conformal-contact elements and systems", *Encyclopedia of Tribology*, pp. 434-440.
15. Gilardi, G. and Sharf, I. (2002), "Literature survey of contact dynamics modelling", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, no. 10, pp. 1213-1239.
16. Zhong, Z.-H. and Mackerle, Ja. (1994), "Contact-impact problems: A Review with bibliography", *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, iss. 2, pp. 55-76.
17. Guz', A.N., Kubenko, V.D. and Cherevko, M.A. (1978), Diffraction of elastic waves, *Sov. Appl. Mech.*, vol. 14, iss. 8, pp. 789-798.
18. Erdélyi A., et al. *Higher Transcendental Function*. Vol. 1., McGraw Hill Book Co., Inc., New York, USA.
19. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A. and Marichev, O.I. (1992) *Integrals and series* [in 5 v.]. Vol. 5: Inverse Laplace Transforms, Gordon and Breach Science Publ., New York, USA.
20. Guz', A.N. and Kubenko, V.D. (1982), *Teoriia nestatsionarnoi aerogidrouprugosti obolochek* [The theory of nonstationary aerohydroelasticity of shells], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
21. Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V. and Yagola, A.G. (1995), *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Netherlands.