

7. Kurpa, L.V. (2008), "Nelinejnye svobodnye kolebaniya mnogoslujnyx pologix obolochek simmetrichnogo stroeniya so slozhnoj formoj plana", *Mat. metodi ta fiz.-mex. polya*, 51, no. 2, pp. 75-85.
8. Kurpa, L.V. (2009), "Metod R-funkcij dlya resheniya linejnyx zadach izgiba i kolebanij pologix obolochek", NTU "XPI", Xar'kov.
9. Kurpa, L.V. and Shmatko, T.V. (2014), "Svobodnye kolebaniya funkcional'no-gradientnyx pologix obolochek so slozhnoj formoj plana", *Teoret. i prikladnaya mexanika*, issue 8(54), pp. 77-85.
10. Rvachev, V.L. (1982), "Teoriya R-funkcij i nekotorye ee prilozheniya", Nauk.dumka, Kiev, 1982.

УДК 519.6 (075.8)+536.24

### ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ТОПЛИВНОЙ КАССЕТЕ ТВЭЛОВ

<sup>1,2</sup>Максименко-Шейко К. В., д. т. н., с. н. с., <sup>1</sup>Шейко Т. И., д. т. н., профессор

<sup>1</sup>*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,  
ул. Пожарского, 2/10, Харьков, 61000, Украина*

<sup>2</sup>*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, Харьков, 61000, Украина*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Целью работы является математическое и компьютерное моделирование сопряженной задачи конвективного теплообмена в решетках ТВЭЛОВ методом R-функций и исследование влияния вида упаковки и формы кассеты на распределение скорости и температуры.

Рассмотрены сопряженные краевые задачи теплообмена для случаев, когда вязкая несжимаемая жидкость движется по каналам неканонического сечения, обтекающая пучок стержней. Рассмотрены различные упаковки ТВЭЛОВ и формы кассет. Показано, что метод R-функций является эффективным методом решения задач расчета физических полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок сложной формы.

*Ключевые слова: теория R-функций; метод Ритца; сопряженная задача; теплообмен; топливная кассета; треугольная, циклическая, прямоугольная упаковки; трансляционная и циклическая симметрии.*

### ДОСЛІДЖЕННЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ В ПАЛИВНІЙ КАСЕТІ ТВЕЛІВ

<sup>1,2</sup>Максименко-Шейко К. В., д. т. н., с. н. с., <sup>1</sup>Шейко Т. І., д. т. н., професор

<sup>1</sup>*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,  
вул. Пожарського, 2/10, Харків, 61000, Україна*

<sup>2</sup>*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,  
пл. Свободи, 4, Харків, 61000, Україна*

sheyko@ipmach.kharkov.ua

Метою роботи є математичне і комп'ютерне моделювання сполученої задачі конвективного теплообміну в ґратках ТВЕЛІВ методом R-функцій та дослідження впливу вигляду упакування та форми касети на розподіл швидкості та температури.

Розглянуто сполучені крайові задачі теплообміну для випадків, коли в'язка нестислива рідина рухається по каналах неканонічного перерізу, обтікаючи пучок стрижнів. Розглянуто різні упакування ТВЕЛІВ та форми касет. Показано, що метод R-функцій є ефективним методом розв'язання задач розрахунку фізичних полів в елементах конструкцій ядерних енергетичних установок складної форми.

*Ключові слова: теорія R-функцій; метод Ритца; сполучена задача; теплообмін; паливна кассета; трикутне, циклічне, прямокутне упакування; трансляційна і циклічна симетрії.*

## THE CONVECTIVE HEAT-TRANSFER ANALYSIS IN FUEL ELEMENT CARTRIDGE

<sup>1,2</sup>Maksimenko-Sheiko K. V., D. of Technical Science, Senior Researcher

<sup>1</sup>Sheiko T. I., D. of Technical Science, Professor

<sup>1</sup>A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems, NAS of Ukraine,  
Pozharsky st., 2/10, Kharkov, 61000, Ukraine

<sup>2</sup>V.N. Karazin Kharkov National University,  
sq. Liberty, 4, Kharkov, 61000, Ukraine

sheyko@ipmach.kharkov.ua

The world nuclear fuel market is divided between three global level concerns- Russian Fuel company “TVEL”, the American company “Westinghouse” and the French one “Areva”. There is a competitive struggle between these companies. The companies aspire to win each other a part of the market. Thus the designs of reactors' active zone are essentially various. Everyone has the advantages and drawbacks. So, for example, at the Westinghouse TBC-W fuel the spacer grids were the weak elements. However the fuel made by this company is more effective than Russian one on some significant parameters. One of the primary goals of a reactor' calculation is the temperature field finding as to fuel elements made great demands concerning their reliability. The failure of several fuel elements can result in an emergency. There is a necessity for the solving of corresponding transfer problems as conjugate problems in this case. These solutions allow carry out the researches of real heat-transfer processes where the mutual influence of a moving liquid, the forms of the channel walls, the kind of fuel elements' packings etc. is essentially shown. The plenty of fuel elements is located in each fuel cartridge, and the cartridges' shapes and the packings' kind are rather various. It creates the certain difficulties during mathematical and computer modelling of real physical processes. In this case the R-functions method is rather useful. This method allows to realize analytical identification of complex-shape geometrical objects and to build the structures of solutions of boundary value problems, precisely satisfying boundary conditions.

The goal of this work is the mathematical and computer modelling of the conjugate problem of convective heat exchange in fuel lattices with the help of the R-functions method and the research of influence of the packing kind and of the cartridge shape at the speed and temperature distribution.

The conjugate boundary value problems of heat exchange are considered for cases when the viscous incompressible liquid flowing around a bunch of rods on non-classical section channels. The influence of the packing kind and of the cartridge shape at the speed and temperature distribution is investigated. The R-functions theory in combination with variational Ritz method was used. The various fuel elements' packings and cartridges' shapes are considered. Each packing contains from 81 up to 91 rods. The corresponding equations are constructed using the new R-functions theory' constructive means. This means have allowed reduce essentially the R-operations quantity. It has resulted in reduction of calculation time. The cubic Schönberg splines were used as the approximation means with splitting from  $60 \times 60$  up to  $100 \times 100$ . It is shown that the R-functions method is effective for the solving of the physical fields' calculation problems in the complex shape designs' elements of nuclear power installations. The lead researches allow designers to choose those or other packings' kinds depending on technical requirements. Thus the calculation of the temperature field for the cartridge as a whole is essential. The mathematical modelling and the computer experiment are irreplaceable when the natural experiment is impossible or complicated for whatever reasons. The computing experiments with models of objects allow to study them in detail and deeply, basing on modern numerical methods.

*Key words: R-functions theory; Ritz method; conjugate problem; heat transfer; fuel element cartridge; triangle, cyclic, rectangular packing; translation and cyclic symmetry.*

### ВВЕДЕНИЕ

Мировой рынок ядерного топлива поделен между тремя концернами мирового уровня – российской Топливной компанией «ТВЭЛ», американской Westinghouse и французской Areva, между которыми идет конкурентная борьба. Компании стремятся отвоевать друг у друга часть рынка. При этом конструкции активной зоны реакторов существенно различны и каждая имеет свои преимущества и недостатки. Так, например, у топлива Westinghouse ТВС-W был слабый элемент – это дистанционирующие решетки, однако топливо, производимое этой компанией, по некоторым значимым показателям эффективнее российского.

В активной зоне современных ядерных энергетических установок ядерное топливо сконцентрировано в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛлах). Одна из основных задач расчета реактора – определение поля температур, так как к ТВЭЛам предъявляются очень высокие требования в отношении их надежности. Выход из строя нескольких ТВЭЛов, а в реакторе их тысячи, может привести к аварийной ситуации. В этом случае появляется необходимость в решении соответствующих задач переноса в сопряженной постановке, так как эти решения позволяют проводить исследования реальных теплообменных процессов,

где существенно проявляется взаимное влияние движущейся жидкости, стенок канала, ТВЭЛов и др. Так как в каждой топливной кассете расположено большое количество ТВЭЛов, а формы кассет и вид упаковок весьма разнообразны, то это создаёт определенные трудности в процессе проведения математического и компьютерного моделирования реальных физических процессов. В этом случае весьма полезным является метод R-функций, позволяющий реализовать аналитическую идентификацию сложных геометрических объектов и строить структуры решений краевых задач математической физики, точно удовлетворяющие граничным условиям.

Рассмотрим сопряженные краевые задачи теплообмена для случаев, когда вязкая несжимаемая жидкость движется по каналу неканонического сечения, обтекаемая пучок стержней. Предполагается, что физические свойства жидкости постоянны, ламинарное течение гидродинамически стабилизировано, процесс теплообмена стационарен. На внешней поверхности канала могут быть заданы условия первого, второго, третьего рода. Предполагается, что изменение плотности теплового потока вдоль оси канала за счет аксиальной теплопроводности пренебрежимо мало по сравнению с изменением теплового потока, обусловленного конвекцией. Предполагается также, что стенки трубы и внутренние стержни выполнены из изотропного материала, причем теплопроводность последнего можно считать постоянной в рассматриваемом интервале температур [1-3].

Наличие внутренних источников тепла в элементах реактора усложняет как уравнение теплопроводности, так и методы его решения. В работах [1, 3] рассматривался теплообмен в пучке продольно обтекаемых бесконечных цилиндров. Предполагалась симметрия температурного поля в силу симметрии системы, и рассматривалась лишь область  $OABC$  (рис.1).



Рис. 1. Расположение рабочих каналов в активной зоне реактора: а) – коридорное; б) – шахматное

**Целью работы** является совершенствование конструктивных средств и алгоритмов метода R-функций для математического и компьютерного моделирования сопряженной задачи конвективного теплообмена в решетках ТВЭЛов и исследование влияния вида упаковки и формы кассеты на распределение скорости и температуры.

### ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Основная система уравнений, описывающая процесс теплообмена в потоке вязкой жидкости, при постоянных физических свойствах жидкости и температуры имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{DT}{D\tau} = a\Delta T + \frac{q_v}{\rho c_p} + \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}, \\ \frac{D\vec{V}}{D\tau} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{V}, \\ \operatorname{div}\vec{V} = 0, \end{cases}$$

где  $\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$  – субстанциальная (или полная) производная,  $\mu\Phi$  – диссипативная функция,  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  – коэффициент температуропроводности,  $c_p$  – теплоемкость среды,  $q_V$  – мощность внутренних источников тепла.

В случае стационарных процессов температура тела не зависит от времени, и уравнение теплопроводности при продольном обтекании ТВЭЛов принимает вид:

$$V_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p},$$

а математическая модель поля скоростей при ламинарном течении имеет вид  $\Delta V_z = -\frac{\nabla P}{\mu l} = -C$ , где  $\nabla P$  – постоянное вдоль трубы падение давления на произвольно выбранном участке длины  $l$ .

В области тепловой стабилизации, когда  $\frac{\partial T}{\partial z} = \text{const}$ , получим

$$-div(\lambda \nabla T) = q_V - V_z C_1.$$

Таким образом, математическая модель теплообмена при ламинарном движении жидкости по кассете с ТВЭЛами сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} \Delta V_z = -C & \text{в } \Omega_b \cap \overline{\Omega_{nv}}, \\ -div(\lambda_i \nabla T_i) = F_i & \text{в } \Omega_b, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} F_1 = -V_z & \text{в } \Omega_b \cap \overline{\Omega_{nv}}, \\ F_2 = q_V & \text{в } \Omega_{nv} \end{cases}$$

с граничными условиями вида

$$V_z|_{\partial\Omega_b \cap \overline{\Omega_{nv}}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} + hT|_{\Omega_b} = 0, \quad T_1|_{\partial\Omega_{nv}} = T_2|_{\partial\Omega_{nv}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{nv}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{nv}}. \quad (1)$$

Рассмотрим типовую конструктивную схему реактора, активная зона которого собирается из большого числа топливных кассет [2, 3]. Кассеты представляют собой шестигранные кожухи, в которых размещены тепловыделяющие элементы.

Для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, воспользуемся следующей теоремой [4].

**Теорема 1.** Пусть трансляционная область  $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$  симметрична относительно оси  $Oy$  и может быть заключена в вертикальную полосу  $-a < x < a$ , а области  $\Sigma_i = [\sigma_0(x - hi, y, z) \geq 0]$  получены в результате преобразования переноса области  $\Sigma_0$  вдоль оси абсцисс на величины, кратные  $h > 2a$ . Тогда уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega = \bigcup_{i \in Z} \Sigma_i$

имеет вид

$$\omega(x, y, z) \equiv \sigma_0(\mu(x, h), y, z) = 0,$$

$$\text{где } \mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}.$$

Для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклического типа, воспользуемся следующей теоремой [4].

**Теорема 2.** Пусть трансляционная область  $\Sigma_0 = [\sigma_0(x, y, z) \geq 0]$  симметрична относительно оси абсцисс, а область  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$  может быть размещена внутри сектора

$$-\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}. \quad \text{Области } \Sigma_k = \left[ \sigma_0 \left( r \cos \left( \theta - \frac{2\pi k}{n} \right) - r_0, r \sin \left( \theta - \frac{2\pi k}{n}, z \right) \right) \geq 0 \right]$$

получены в результате поворота области  $\Sigma_1 = [\sigma_0(x - r_0, y, z) \geq 0]$  в плоскости  $xOy$  вокруг начала координат на углы  $\frac{2\pi k}{n}$ . Тогда уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$  имеет

$$\text{вид } \omega(x, y) \equiv \sigma_0 \left( r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n), z \right) = 0, \quad \left( r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x} \right), \text{ где}$$

$$\mu(n\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}.$$

Построим уравнение топливной кассеты с 91 ТВЭЛом и раздвинутой треугольной упаковкой, которую иногда называют шахматной. Заметим, что при применении обычной методики, используемой в теории R-функций [5], мы получим в результате 93 R-операции в уравнении. Громоздкая формула приведет не только к увеличению времени счета, но и, возможно, к некоторому нарушению симметрии из-за неассоциативности R-операций. Поэтому для построения уравнения шестигранного кожуха воспользуемся *теоремой 2*. Рассмотрим уравнение прямой  $\sigma \equiv R_v - x \geq 0$  и периодическую функцию

$$\mu_v = \frac{4}{3\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) 3\theta \right]}{(2k-1)^2}. \quad \text{В результате получим } \omega_b \equiv R_v - r \cos \mu_v = 0, \quad \text{где}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}. \quad \text{Для построения треугольной упаковки ТВЭЛов воспользуемся$$

*теоремой 1*. Зададим

$$f_1 = R^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 \geq 0,$$

$$\text{где } \mu_x = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{\pi x}{h_x} \right]}{(2k-1)^2},$$

$$\mu_y = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ (2k-1) \frac{\pi y}{h_y} \right]}{(2k-1)^2}, \quad \text{и } f_2 = R^2 - \mu_{x1}^2 - \mu_{y1}^2 \geq 0,$$

$$\text{где } \mu_{x1} = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ \frac{(2k-1)\pi(x - h_x/2)}{h_x} \right]}{(2k-1)^2}, \quad \mu_{y1} = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[ \frac{(2k-1)\pi(y - h_y/2)}{h_x} \right]}{(2k-1)^2}.$$

Тогда уравнение топливной кассеты имеет вид  $\omega \equiv \omega_b \wedge \overline{\omega_n} \geq 0, \quad \omega_n \equiv (f_1 \vee_0 f_2) \geq 0$ .

Построение функции  $\omega(x, y)$  выполнено при следующих значениях буквенных параметров:  $R=0,2$ ;  $h_x=2,32$ ;  $h_y=1,35$ ;  $n_0=6$ ;  $r_k=6,7$ . Следует отметить, что при построении уравнения кассеты по новой методике R-операции использовались лишь два раза.

Остановимся также на построении функции  $\omega(x, y) \equiv \omega_b \wedge_0 \overline{\omega_{lv}} \geq 0$ , когда ТВЭЛ транслируется с циклической симметрией  $n_d$  раз вдоль окружности радиуса  $R$  и  $n_b$  раз вдоль окружности радиуса  $R_1$  и  $n_c$  раз вдоль окружности радиуса  $R_2$ . Для построения уравнения границы ТВЭЛов, транслированных с циклической симметрией  $n_d$  раз вдоль окружности радиуса  $R$ , воспользуемся теоремой 2  $\omega_o \equiv \frac{1}{2R_{lv}}(R_{lv}^2 - (x-R)^2 - y^2)$  и

формулой 
$$\mu_d = \frac{8}{n_d \pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_d \theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$
 В результате получим 
$$\omega_{lv1} \equiv \frac{1}{2R_{lv}}(R_{lv}^2 - (r \cos \mu_d - R)^2 - (r \sin \mu_d)^2) \geq 0.$$

Для построения уравнения границы ТВЭЛов, транслированных с циклической симметрией  $n_b$  раз вдоль окружности радиуса  $R_1$ , воспользуемся функцией

$$\omega_{o1} \equiv \frac{1}{2R_{lv}}(R_{lv}^2 - (x-R_1)^2 - y^2) \text{ и формулой } \mu_b = \frac{8}{n_b \pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_b \theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Тогда 
$$\omega_{lv2} \equiv \frac{1}{2R_{lv}}(R_{lv}^2 - (r \cos \mu_b - R_1)^2 - (r \sin \mu_b)^2) \geq 0.$$

Для построения уравнения границы ТВЭЛов, транслированных с циклической симметрией  $n_c$  раз вдоль окружности радиуса  $R_2$ , воспользуемся функцией

$$\omega_{o2} \equiv \frac{1}{2R_{lv}}(R_{lv}^2 - (x-R_2)^2 - y^2) \text{ и формулой } \mu_c = \frac{8}{n_c \pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{n_c \theta}{2}\right]}{(2k-1)^2}.$$

Тогда 
$$\omega_{lv3} \equiv \frac{1}{2R_{lv}}(R_{lv}^2 - (r \cos \mu_c - R_2)^2 - (r \sin \mu_c)^2) \geq 0.$$

Таким образом, уравнение границы кассеты с 91 ТВЭЛом имеет вид  $\omega \equiv (\omega_b \wedge_0 \omega_{lv1} \vee_0 \omega_{lv2} \vee_0 \omega_{lv3}) \geq 0$ , при  $n_d=38$ ,  $R=6$ ,  $n_b=32$ ,  $R_1=4,5$ ,  $n_c=21$ ,  $R_2=3$  и является семипараметрическим  $(n_b, n_d, n_c, R, R_1, R_2, R_{lv})$  семейством кривых (рис. 2, б). Следует отметить, что R-операции использовались лишь три раза. При наличии

центрального ТВЭЛа получим  $\omega \equiv \omega_b \wedge_0 \omega_{lv1} \vee_0 \omega_{lv2} \vee_0 \omega_{lv3} \vee_0 \frac{1}{2R_{lv}}(R_{lv}^2 - x^2 - y^2) \geq 0$

при  $n_c=20$ .

Зная уравнения кассеты и ТВЭЛов, мы можем постановку задачи (1) переписать в виде

$$\begin{cases} \Delta V_z = -C \\ -\text{div}(\lambda \nabla T) = F, \end{cases} \text{ с граничными условиями } V_z|_{\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_{lv}} = 0, \frac{\partial T}{\partial n} + hT|_{\Omega_b} = 0, T_1|_{\partial\Omega_{lv}} = T_2|_{\partial\Omega_{lv}},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{lv}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{lv}}, \text{ где}$$

$$\lambda = \lambda_1 \frac{1 - \text{sign}\omega_{lv}}{2} + \lambda_2 \frac{1 + \text{sign}\omega_{lv}}{2}, \quad F = -V_z \frac{1 - \text{sign}\omega_{lv}}{2} + qV \frac{1 + \text{sign}\omega_{lv}}{2}.$$

Для решения использовался метод R-функций в сочетании с вариационным методом Ритца. Структура решения задачи о ламинарном течении при продольном обтекании ТВЭЛов жидкости имеет вид  $V_z = \omega p_1$ , где  $\omega(x, y) \equiv \omega_b \wedge_0 \overline{\omega_{tv}} \geq 0$  – уравнение границы поперечного

сечения кассеты, а неопределенную компоненту  $p_1 = \sum_{i=1}^N c_{ik} \phi_{ik}(x, y)$  будем отыскивать,

минимизируя функционал  $I = \int_{\Omega} ((\nabla V_z)^2 - 2CV_z) d\Omega$ . Заметим, что решение  $V_z$  получаем в

аналитическом виде и используем без какой-либо дальнейшей обработки (аппроксимации, интерполяции). Поэтому полученное распределение скорости мы подставляем в правую часть уравнения теплопроводности. Структура решения задачи определения температурного поля использовалась как точно удовлетворяющая граничным условиям на  $\partial\Omega_b$ ,

$u = p_2 + \omega_b(-D_1 p_2 + h p_2)$ , так и в виде  $T = p_2$ , где, как и ранее,  $p_2 = \sum_{i=1}^N d_{ik} \phi_{ik}(x, y)$ . Здесь

следует отметить, что граничные условия  $\frac{\partial T}{\partial n} + hT|_{\Omega_b} = 0$  и  $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \Big|_{\partial\Omega_{tv}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n_2} \Big|_{\partial\Omega_{tv}}$

являются естественными и следуют из функционала Ритца

$I = \int_{\Omega} (\lambda(\nabla T)^2 - 2FT) d\Omega + \int_{\partial\Omega_b} hT^2 d\partial\Omega_b$ . В качестве аппроксимационных средств  $\phi_{ik}(x, y)$

использовались кубические сплайны Шенберга при  $N = 6400, 10000$ . Вычислительные эксперименты проводились в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ, разработанной в отделе прикладной математики и вычислительных методов ИПМаш НАН Украины.

Ниже (рис. 2-5) приведены результаты исследований для различных упаковок ТВЭЛов. Каждая упаковка содержит 91 стержень при всех прочих равных условиях  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10, h = 1, q_V = 4$ . Меняя значения буквенных параметров, получим различные распределения исследуемых полей.

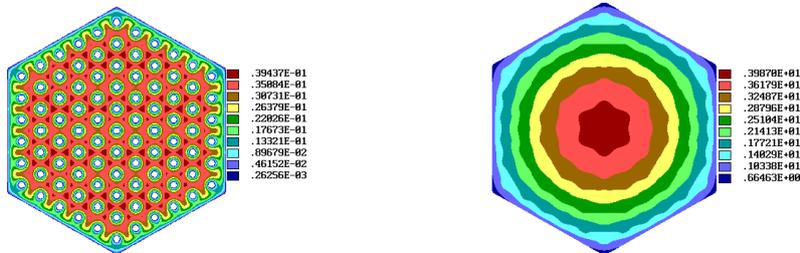


Рис. 2. Картины распределения скорости и температуры в шестигранной кассете с ТВЭЛами, расположенными по шахматной схеме

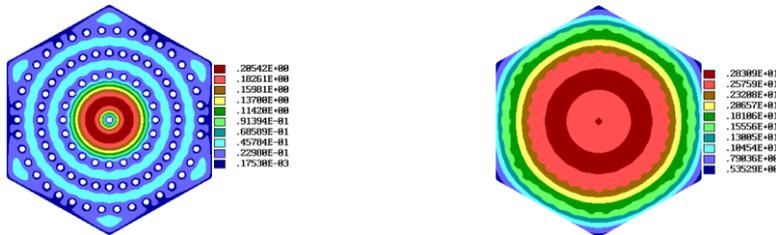


Рис. 3. Картины распределения скорости и температуры в кассете с циклически расположенными ТВЭЛами и центральным ТВЭЛом

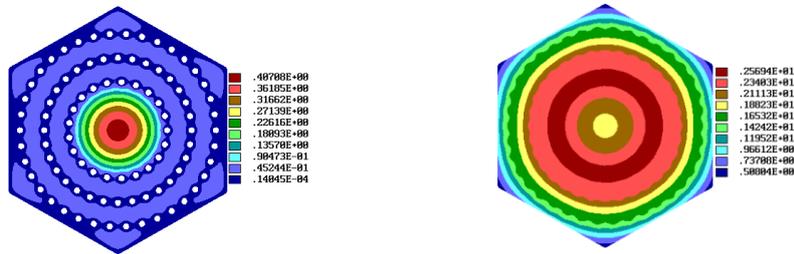


Рис. 4. Картины распределения скорости и температуры в шестигранной кассете с циклически расположенными ТВЭЛами без центрального ТВЭЛа

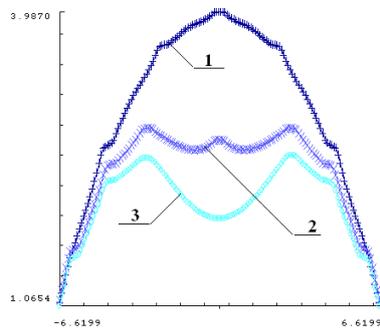


Рис. 5. Графики поля температур для различных упаковок ТВЭЛов в сечении  $y = 0$ : 1 – шахматная схема; 2 – циклическая симметрия с центральным ТВЭЛом; 3 – циклическая симметрия без центрального ТВЭЛа

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что наличие стержней в центральной зоне приводит к более высокой температуре. Поэтому, меняя конструктивный характер упаковки и типы симметрии, можно регулировать характер течения и распределение температуры по кассете, добиваясь необходимого значения, обусловленного техническим заданием. Анализ характера распределения скорости и температуры позволяет сделать вывод, что рассмотрение поля скоростей для ячейки (рис. 1), в случае ее достаточной удаленности от границы, является целесообразным. Однако поле температур при этом будет весьма далеким от действительности, чему свидетельствуют результаты, полученные для кассеты в целом.

Различные компании используют различные формы кассет: шестигранные, круглые, квадратные, прямоугольные. Метод R-функций позволяет оперативно изменять информацию о форме рассматриваемой области. На рисунках 6-9 приведены результаты исследования для различных упаковок ТВЭЛов и форм кассеты.

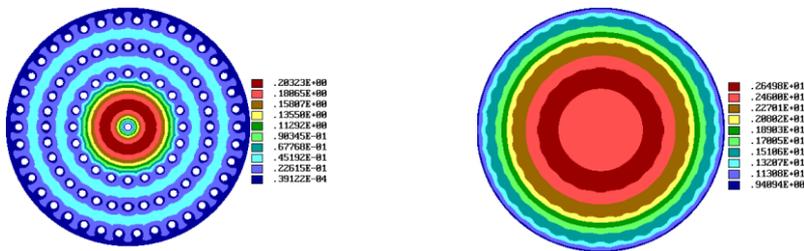


Рис. 6. Картины распределения скорости и температуры в круглой кассете с циклически расположенными ТВЭЛами и центральным ТВЭЛом

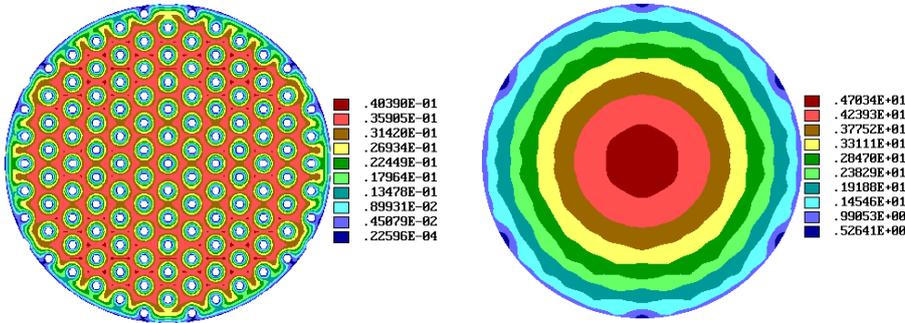


Рис. 7. Картины распределения скорости и температуры в круглой кассете с ТВЭЛами, расположенными по шахматной схеме

При коридорной упаковке ТВЭЛов в квадратной кассете для построения уравнения квадратного кожуха воспользуемся *теоремой 2*. Рассмотрим уравнение прямой  $\sigma \equiv R_v - x \geq 0$  и периодическую функцию  $\mu_v = \frac{4}{3\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin[(2k-1)2\theta]}{(2k-1)^2}$ . В результате получим  $\omega_b \equiv R_v - r \cos \mu_v = 0$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \text{arctg} \frac{y}{x}$ . Заметим, что процесс построения аналогичен построению шестигранного кожуха, а изменяется лишь значение  $n$ . Для построения коридорной упаковки ТВЭЛов воспользуемся *теоремой 1*. Зададим

$$f_1 = R^2 - \mu_x^2 - \mu_y^2 \geq 0,$$

где

$$\mu_x = \frac{4h_x}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi x}{h_x}\right]}{(2k-1)^2}, \quad \mu_y = \frac{4h_y}{\pi^2} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin\left[(2k-1)\frac{\pi y}{h_y}\right]}{(2k-1)^2},$$

при  $h_x = h_y$ .

Тогда уравнение топливной кассеты имеет вид  $\omega \equiv \omega_b \wedge_0 \overline{\omega_{tv}} \geq 0, \omega_{tv} \equiv f_1 \geq 0$ .

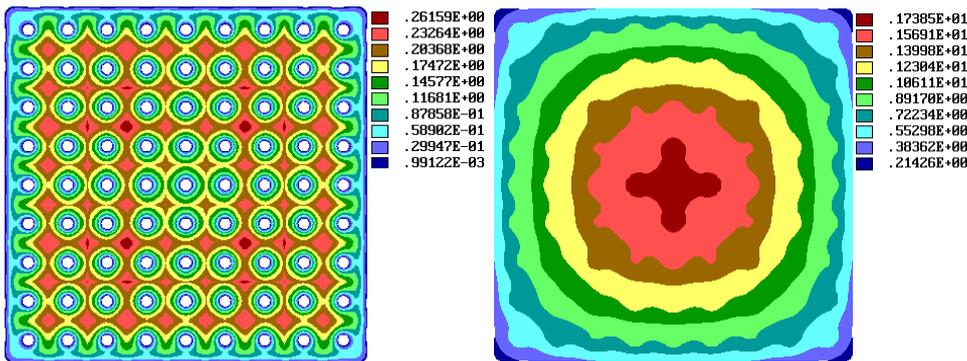


Рис. 8. Картины распределения скорости и температуры в квадратной кассете с ТВЭЛами, расположенными по коридорной схеме

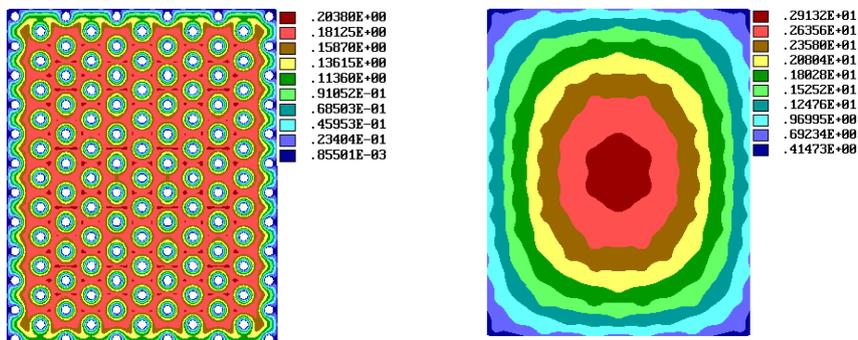


Рис. 9. Картины распределения скорости и температуры в прямоугольной кассете с ТВЭЛами, расположенными по шахматной схеме

### ВЫВОДЫ

Показано, что метод R-функций является эффективным методом решения задач расчета физических полей в элементах конструкций ядерных энергетических установок сложной формы. Разработанные конструктивные средства построения уравнений границ областей с трансляционным и циклическим типами симметрии позволили существенно уменьшить количество операций с последующей автоматизацией этого процесса, а, следовательно, уменьшить и время решения задач. Проведенные исследования позволяют конструкторам выбирать те или иные виды упаковок в зависимости от технических требований. При этом существенным является расчет температурного поля для кассеты в целом. Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Кроме того, работа с математической моделью процесса и вычислительный эксперимент дает возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать свойства и поведение процесса в различных ситуациях. В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на современные численные методы, подробно и глубоко их изучать. Достоверность аналитической идентификации геометрических объектов подтверждена их визуализацией. Достоверность методов расчета, результатов и выводов подтверждена сравнением со сведениями, известными в литературе, анализом численной сходимости решений и вычислением невязки.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Слесаренко А. П. Регионально-аналитический и вариационные методы в решении сопряженных задач конвективного теплообмена / А.П. Слесаренко, Д.А. Котульский // Теплообмен ММФ-2000, Труды IV Минского международного форума (Беларусь, Минск, май 2000). – Минск : ИТМО АН Беларуси, 2000. – Т. 3. С. 135-142.
2. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах / Б.С. Петухов. – М. : Энергия, 1967. – 412 с.
3. Петухов Б. С. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б.С. Петухов, Л.Г. Генин, С.А. Ковалев. – М. : Атомиздат, 1974. – 367 с.
4. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К.В. Максименко-Шейко. – Харьков : ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.

## REFERENCES

1. Slesarenko, A.P. and Kotulskiy, D.A. (2000), "Regionalno-analiticheskiy i variatsionnyye metody v reshenii sopryazhennykh zadach konvektivnogo teploobmena", *Trudy IV Minskogo mezhdunarodnogo foruma*, vol. .3, pp. 135-142.
2. Petukhov, B.S. (1967), "Teploobmen i soprotivleniye pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh", Energiya, Moscow.
3. Petukhov, B.S., Genin, L.G. and Kovalev, S.A. (1974), "Teploobmen v yadernykh energeticheskikh ustanovkakh", Atomizdat, Moscow.
4. Rvachev, V.L. (1982), "Teoriya R-funktsii i nekotoryye yeye prilozheniya", Nauk. dumka, Kiev.
5. Maksimenko-Sheyko, K.V. (2009), "R-funktsii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh ob'ektov i fizicheskikh poley", IPMash NAN Ukrainy, Kharkov.

УДК 539.3

**ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ  
БАГАТОКЛИНОВОГО КОМПОЗИТУ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ  
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ**

Махоркін М. І., к. ф.-м. н.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова 3-б, Львів, 79060, Україна*

mahorkin@ukr.net

Запропоновано методику з'ясування напружено-деформованого стану багатоклинових композитів за допомогою постановки узагальненої задачі сопряження. Отримано аналітичні вирази для напружень та переміщень у багатоклиновій системі як функції лише чотирьох невідомих, що визначаються у явному вигляді з відповідних крайових умов. Отримані вирази апробовано при визначенні напруженого стану навантаженої зосередженими силами триклинної системи.

*Ключові слова: багатоклиновий композит, порядок сингулярності, асимптотики напружень, плоска задача теорії пружності.*

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
МНОГОКЛИНЬЕВОГО КОМПОЗИТА ПРИ УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Махоркин Н. И., к. ф.-м. н.

*Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН  
Украины, ул. Наукова 3-б, 79060, Львов, Украина*

mahorkin@ukr.net

Предложена методика определения напряженно-деформированного состояния составных клиньев с помощью постановки обобщенной задачи сопряжения. Получены аналитические выражения для напряжений и перемещений в многоклинневой системе как функции только четырех неизвестных, которые определяются в явном виде из соответствующих краевых условий. Полученные выражения апробированы при определении напряженного состояния нагруженной сосредоточенными силами триклинневой системы.

*Ключевые слова: многоклинневой композит, порядок сингулярности, асимптотики напряжений, плоская задача теории упругости.*