

REFERENCES

1. Slesarenko, A.P. and Kotulskiy, D.A. (2000), "Regionalno-analiticheskiy i variatsionnyye metody v reshenii sopryazhennykh zadach konvektivnogo teploobmena", *Trudy IV Minskogo mezhdunarodnogo foruma*, vol. .3, pp. 135-142.
2. Petukhov, B.S. (1967), "Teploobmen i soprotivleniye pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh", Energiya, Moscow.
3. Petukhov, B.S., Genin, L.G. and Kovalev, S.A. (1974), "Teploobmen v yadernykh energeticheskikh ustanovkakh", Atomizdat, Moscow.
4. Rvachev, V.L. (1982), "Teoriya R-funktsii i nekotoryye yeye prilozheniya", Nauk. dumka, Kiev.
5. Maksimenko-Sheyko, K.V. (2009), "R-funktsii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh ob'ektov i fizicheskikh poley", IPMash NAN Ukrainy, Kharkov.

УДК 539.3

**ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
БАГАТОКЛИНОВОГО КОМПОЗИТУ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ**

Махоркін М. І., к. ф.-м. н.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів, 79060, Україна*

mahorkin@ukr.net

Запропоновано методику з'ясування напружено-деформованого стану багатоклинових композитів за допомогою постановки узагальненої задачі сопряження. Отримано аналітичні вирази для напружень та переміщень у багатоклиновій системі як функції лише чотирьох невідомих, що визначаються у явному вигляді з відповідних крайових умов. Отримані вирази апробовано при визначенні напруженого стану навантаженої зосередженими силами триклинкової системи.

Ключові слова: багатоклиновий композит, порядок сингулярності, асимптотики напружень, плоска задача теорії пружності.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
МНОГОКЛИНЬЕВОГО КОМПОЗИТА ПРИ УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Махоркин Н. И., к. ф.-м. н.

*Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН
Украины, ул. Наукова 3-б, 79060, Львов, Украина*

mahorkin@ukr.net

Предложена методика определения напряженно-деформированного состояния составных клиньев с помощью постановки обобщенной задачи сопряжения. Получены аналитические выражения для напряжений и перемещений в многоклиньевой системе как функции только четырех неизвестных, которые определяются в явном виде из соответствующих краевых условий. Полученные выражения апробированы при определении напряженного состояния нагруженной сосредоточенными силами триклиньевой системы.

Ключевые слова: многоклиньевой композит, порядок сингулярности, асимптотики напряжений, плоская задача теории упругости.

DETERMINATION OF STRESSED-STRAINED STATE OF MULTI-WEDGE COMPOSITE UNDER CONDITIONS OF THE PLANE PROBLEM OF ELASTICITY THEORY

Makhorkin M. I., Ph.D. in Physics and Maths

*Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,
3b Naukova str, 79060 Lviv, Ukraine*

mahorkin@ukr.net

The procedure is offered, giving the possibility to clarify the stressed-strained state of composite system is offered. The system consists of an arbitrary number n of connected wedges S_i with apex angle α_i and it contains numerous defects on the lines of their connection.

The basis of the procedure makes up the method of generalized conjugation problem, method of jump function and apparatus of generalized functions. So the system is considered as whole entity, its physical-mechanical characteristics and parameters of the stressed-strained state are presented in the form of generalized functions

$$p(\varphi) = p_1 + \sum_{i=1}^n (p_{i+1} - p_i) S_+(\varphi - \varphi_i) \quad (\varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i; \quad p_i = \{u_i, v_i, \nu_i, \mu_i\} - \text{displacements and elastic constants}$$

in the i -th wedge; $S_+(x)$ – Heviside unit function) and the radially located defects ones are modeled by the jumps of stresses and displacements. By such approach of determination the stressed-strained state in a multi-wedge composite me reduced to finding the solution of the boundary-value problem for a system of two partly degenerated differential equations. The solution of this system is found by the method of Mellin integral transform in the transforms. The preference of this procedure is that the transforms of stresses and displacements for an arbitrary number of components of a wedge system are written in terms of four functions which are determined from the boundary conditions.

By means of the procedure offered the expressions of transforms of stresses and strains in the three-wedge system loaded on the edges by concentrated forces are constructed. Using them the order of singularity of stresses and distribution of asymptotics of normal stresses $\sigma_{\varphi\varphi}$ in the vicinity of the system vertex are calculated for different values of its geometric and mechanical parameters.

Key words: multi-wedge composite, singularity order, stresses asymptotics, plane problem of elasticity.

ВСТУП

У царині механіки руйнування важливе місце займає вивчення напружено-деформованого стану в багатоклинових композитах [1-6]. Такі композити широко використовують у мікроелектроніці та при моделюванні міжфазних включень у композитних матеріалах і з'єднань зерен у полікристалічних структурах. Наразі вивчення напружено-деформованого стану таких систем переважно зводиться до з'ясування порядку сингулярності в околі точки сходження клинів [1, 3]. Дослідження ж розподілу поля напружень обмежуються околom верхини тріщини, що виходить на пряmolінійну межу поділу двох середовищ [2, 6]. Це зумовлено використанням для розв'язування поставленої задачі класичного методу спряження, методу комплексних потенціалів Колосова-Мухелішвілі чи методу власних функцій [1, 2, 4], що призводило до громіздких виразів та унеможливило запис прозорого аналітичного виразу для напружень та деформацій у багатоклиновій системі як єдиного цілого.

У роботі адаптовано метод узагальненої задачі спряження [7-9] для кусково-однорідних структур, у яких пружні сталі змінюються залежно від полярної координати φ (багатоклинових систем) за умов плоскої задачі теорії пружності. Запропонована методика дала змогу записати єдині аналітичні вирази для напружень та переміщень у багатоклиновій системі з довільною кількістю елементів, як функції лише чотирьох невідомих, що визначаються у явному вигляді з крайових умов.

ПОСТАНОВКА УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ

Розглянемо напружено-деформований стан багатоклинового композиту (рис. 1), що складається з кутового вирізу з розхилом кута $\alpha_{n+1} \geq 0$ та довільної кількості « n » різнорідних ізотропних клинів S_i ($i=1, 2, \dots, n$) з кутами розхилу α_i ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = 2\pi$). На поверхнях зчеплення клинів $\varphi = \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$ розташовані тонкі стрічкові

включення $r \in [a_i, b_i]$. Береги вирізу перебувають під дією навантаження, що реалізує в системі умови плоскої задачі теорії пружності $u = u(r, \varphi)$, $v = v(r, \varphi)$, $w = 0$.

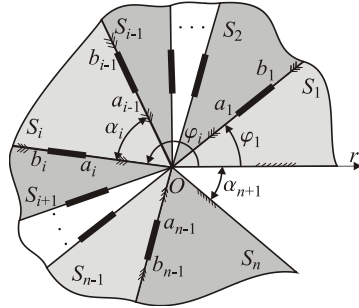


Рис. 1. Загальна схема багатоклинової системи

Розглядаємо систему як єдину область $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, складену із підобластей S_i з поверхнями поділу $\varphi = \varphi_i$. У межах кожної із областей S_i виконуються рівняння рівноваги [10], а на лініях зчеплення $\varphi = \varphi_i$ виконуються умови спряження

$$\begin{aligned} \left. (\sigma_{\varphi\varphi}^{[i+1]} - \sigma_{\varphi\varphi}^{[i]}) \right|_{\varphi=\varphi_i} &= f_{\sigma_i}(r) N_i(r), \quad \left. (\sigma_{r\varphi}^{[i+1]} - \sigma_{r\varphi}^{[i]}) \right|_{\varphi=\varphi_i} = f_{\tau_i}(r) N_i(r), \\ \left. (u_{i+1} - u_i) \right|_{\varphi=\varphi_i} &= f_{u_i}(r) N_i(r), \quad \left. (v_{i+1} - v_i) \right|_{\varphi=\varphi_i} = f_{v_i}(r) N_i(r), \end{aligned} \quad (1)$$

де $f_{\sigma_i}(r)$, $f_{\tau_i}(r)$ та $f_{u_i}(r)$, $f_{v_i}(r)$ відповідно функції стрибка напружень та переміщень (за їх допомогою моделюється [10] наявність радіальних дефектів на лініях з'єднання клинів); $S_{\pm}(x) = \{1 (x > 0); 0,5 \mp 0,5 (x = 0); 0 (x < 0)\}$ – асиметрична одинична функція Гевісайда [8]; $N_i(r) = [S_-(r - a_i) - S_+(r - b_i)]$ – функція проміжку; $i = \overline{1, n-1}$.

Згідно з методом постановки узагальненої задачі спряження [7] функції переміщень $u_i(r, \varphi)$, $v_i(r, \varphi)$ та сталі в областях S_i коефіцієнти μ_i , λ_i продовжимо на всю область S у вигляді [7, 8]:

$$f = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} [f_{i+1} - f_i] S_+(\varphi - \varphi_i), \quad f \sim \{u(r, \varphi), v(r, \varphi), \lambda(\varphi), \mu(\varphi)\}. \quad (2)$$

Якщо використати зв'язок між узагальненими та класичними похідними [8], то замість системи $2n$ рівнянь рівноваги з умовами спряження (1) прийдемо до системи двох частково вироджених диференціальних рівнянь з кусково-постійними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi} [\partial_r v + r^{-1} (v - \partial_{\varphi} u)] - r (\lambda + 2\mu) \mu^{-1} \partial_r [\partial_r u + r^{-1} (u + \partial_{\varphi} v)] &= -r^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} C_{u1}^i \delta_+'(\varphi - \varphi_i) - \\ - \left\langle r^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} C_{u2}^i - \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ [1 - (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1}) \mu_{i+1}^{-1}] \partial_r C_{v1}^i + [1 + (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1}) \mu_{i+1}^{-1}] r^{-1} C_{v1}^i \right\} \right\rangle \delta_+'(\varphi - \varphi_i), \\ \partial_{\varphi} [\partial_r u + r^{-1} (u + \partial_{\varphi} v)] + r \mu (\lambda + 2\mu)^{-1} \partial_r [\partial_r v + r^{-1} (v - \partial_{\varphi} u)] &= r^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} C_{v1}^i \delta_+'(\varphi - \varphi_i) + \\ + \left\langle r^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} C_{v2}^i + \sum_{i=1}^{n-1} \left[(1 + \mu_{i+1} (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^{-1}) \partial_r C_{u1}^i - \mu_{i+1} (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^{-1} r^{-1} C_{u1}^i \right] \right\rangle \delta_+'(\varphi - \varphi_i), \end{aligned} \quad (3)$$

де $C_{u1}^i = f_{ui}(r)N_i(r)$, $C_{v1}^i = f_{vi}(r)N_i(r)$, $\partial_i^k = \frac{\partial^k}{\partial l^k}$, $l = \{r, \varphi\}$, $k = \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} C_{u2}^i &= r\mu_{i+1}^{-1}f_{ui}(r)N_i(r) - r\mu_{i+1}^{-1}\left[(\mu_{i+1} - \mu_i)\left(\partial_r v|_{\varphi_{i-0}} - vr^{-1}|_{\varphi_{i-0}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{i+1}\left(\partial_r [f_{vi}(r)N_i(r)] - r^{-1}f_{vi}(r)N_i(r)\right) + r^{-1}(\mu_{i+1} - \mu_i)\partial_\varphi u|_{\varphi_{i-0}}\right], \\ C_{v2}^i &= r(\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^{-1}\left\{f_{\sigma i}(r)N_i(r) - \left[(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\left(\partial_r u|_{\varphi_{i-0}} + r^{-1}u|_{\varphi_{i-0}}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2r^{-1}(\mu_{i+1} - \mu_i)u|_{\varphi_{i-0}} + \lambda_{i+1}\left(\partial_r [f_{ui}(r)N_i(r)] + r^{-1}f_{ui}(r)N_i(r)\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r^{-1}\left[(\lambda_{i+1} - \lambda_i) + 2(\mu_{i+1} - \mu_i)\right]\partial_\varphi v|_{\varphi_{i-0}} + 2r^{-1}\mu_{i+1}f_{ui}(r)N_i(r)\right\}. \end{aligned}$$

Для однозначності задачі, система рівнянь (3) доповнюється відповідними крайовими умовами, що описують характер навантаження (першої, другої та мішаної крайової задачі).

Систему диференціальних рівнянь (3) разом із крайовими умовами назвемо узагальненою задачею спряження [7] щодо клинового композиту з тонкими радіальними дефектами при плоскій деформації. Зазначимо, що рівняння (3) записано для випадку плоскої деформації. Якщо в них формально замінити сталі Ляме λ , μ на λ^* , μ^* ($\mu^* = \mu$, $\lambda^* = 2\lambda\mu(2\mu - \lambda)^{-1}$), то ці рівняння будуть описувати плоский напружений стан багатоклинової системи.

ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СФОРМУЛЬОВАНОЇ ЗАДАЧІ

Після застосування до (3) інтегрального перетворення Мелліна в просторі зображень отримано таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \mu \tilde{u}'' - (\lambda + 2\mu)p^+ p^- \tilde{u} - [\mu(3+p) + \lambda p^+] \tilde{v}' &= -\sum_{i=1}^{n-1} \mu \tilde{C}_{u1}^i(p) \delta'_+(\varphi - \varphi_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \{p^+(\lambda + 2\mu) - p^-\mu\} \tilde{C}_{v1}^i(p) \delta_+(\varphi - \varphi_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu \tilde{C}_{u2}^i(p) \delta_+(\varphi - \varphi_i), \\ (\lambda + 2\mu) \tilde{v}'' - \mu p^+ p^- \tilde{v} + [\lambda p^- + \mu(3-p)] \tilde{u}' &= -\sum_{i=1}^{n-1} [(\lambda + 3\mu)p + \mu] \tilde{C}_{v1}^i(p) \delta_+(\varphi - \varphi_i) + \\ &+ (\lambda + 2\mu) \left[\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_{v1}^i(p) \delta'_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_{v2}^i(p) \delta_+(\varphi - \varphi_i) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{v2}^i(p) &= (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1})^{-1} \left\{ \tilde{f}_{\sigma i}(p+1) - (\lambda_{i+1} - \lambda_i)(1-p) \tilde{u}'|_{\varphi_{i-0}} - 2(\mu_{i+1} - \mu_i) \tilde{u}'|_{\varphi_{i-0}} - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{i+1}(1-p) \tilde{f}_{ui}(p) - 2\mu_{i+1} \tilde{f}_{ui}(p) [(\lambda_{i+1} - \lambda_i) + 2(\mu_{i+1} - \mu_i)] \tilde{v}'|_{\varphi_{i-0}} \right\}, \\ \tilde{C}_{u2}^i(p) &= \mu_{i+1}^{-1} \left[\tilde{f}_{\sigma i}(p+1) + (\mu_{i+1} - \mu_i)(1+p) \tilde{v}'|_{\varphi_{i-0}} + \mu_{i+1}(1+p) \tilde{f}_{vi}(p) - (\mu_{i+1} - \mu_i) \tilde{u}'|_{\varphi_{i-0}} \right], \\ \tilde{C}_{u1}^i(p) &= \tilde{f}_{ui}(p), \quad \tilde{C}_{v1}^i(p) = \tilde{f}_{vi}(p), \quad p^\pm = 1 \pm p. \end{aligned}$$

Тут $\tilde{b} = \tilde{b}(p, \varphi) = \int_0^\infty b(r, \varphi) r^{p-1} dr$ – перетворення Мелліна відповідних функцій $b \sim \{u, v, f\}$

[11]; $\tilde{b}' = \partial_\varphi \tilde{b}(p, \varphi)$ – узагальнена похідна по змінній φ від відповідної функції [8].

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (4) шукаємо у такому вигляді:

$$\tilde{u}(p, \varphi) = \tilde{u}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{u}_i S_+ (\varphi - \varphi_{i-1}), \quad \tilde{v}(p, \varphi) = \tilde{v}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} [\tilde{v}_i - \tilde{R}_{i-1}] S_+ (\varphi - \varphi_{i-1}), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \tilde{u}_i &= \tilde{A}_i \cos \beta + \tilde{B}_i \sin \beta + \tilde{C}_i \cos \alpha + \tilde{D}_i \sin \alpha, \quad \tilde{v}_i = \tilde{v}_i^* (\tilde{B}_i \cos \beta - \tilde{A}_i \sin \beta) - \tilde{C}_i \sin \alpha + \tilde{D}_i \cos \alpha, \\ \tilde{v}_i^* &= [\lambda_i p^- + \mu_i (3-p)] [\lambda_i p^+ + \mu_i (3+p)]^{-1}, \quad \tilde{A}_i = A_i(p), \quad \tilde{B}_i = B_i(p), \quad \tilde{C}_i = C_i(p), \quad \tilde{D}_i = D_i(p), \\ \alpha &= \varphi p^-, \quad \beta = \varphi p^+, \quad \tilde{R}_i = \tilde{R}_i(p, \varphi) = (\tilde{v}_{i+1}^* - \tilde{v}_i^*) \left[\left(\tilde{A}_i + \sum_{k=2}^i \tilde{A}_k \right) \sin \beta - \left(\tilde{B}_i + \sum_{k=2}^i \tilde{B}_k \right) \cos \beta \right]. \end{aligned}$$

Підставивши подання (5), у рівняння (4) та скориставшись означенням загального розв'язку системи диференціальних рівнянь, одержимо систему $4(n-1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих функцій $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i$ ($i = \overline{1, n}$). Внаслідок розв'язування отриманої системи з'ясовано, що всі значення $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i$ $i = \overline{2, n}$, не залежно від кількості елементів системи, рекурентно виражаються через чотири невідомі функції $\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, \tilde{D}_1$ так:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{i+1} &= (p^- - p^+ \tilde{v}_{i+1}^*)^{-1} (p^- R_{1i} + R_{4i}) \cos \beta_i + (p^+ - p^- \tilde{v}_{i+1}^*)^{-1} (p^- R_{1i} - R_{3i}) \sin \beta_i, \\ \tilde{B}_{i+1} &= (p^- \tilde{v}_{i+1}^* - p^+)^{-1} (p^- R_{2i} - R_{3i}) \cos \beta_i - (p^+ \tilde{v}_{i+1}^* - p^-)^{-1} (p^- R_{1i} + R_{4i}) \sin \beta_i, \\ \tilde{C}_{i+1} &= (v_{i+1}^* - p^-)^{-1} (R_{4i} + p^+ \tilde{v}_{i+1}^* R_{1i}) \cos \alpha_i - (p^+ - p^- \tilde{v}_{i+1}^*)^{-1} (p^+ R_{2i} - R_{3i} \tilde{v}_{i+1}^*) \sin \alpha_i, \\ \tilde{D}_{i+1} &= (p^+ - p^- \tilde{v}_{i+1}^*)^{-1} (p^+ R_{2i} - R_{3i} \tilde{v}_{i+1}^*) \cos \alpha_i + (p^+ \tilde{v}_{i+1}^* - p^-)^{-1} (R_{4i} + p^+ R_{1i} \tilde{v}_{i+1}^*) \sin \alpha_i. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{де } L_i &= (\tilde{v}_{i+1}^* - \tilde{v}_i^*) \left[\left(\tilde{A}_i + \sum_{k=2}^i \tilde{A}_k \right) \sin \beta_i - \left(\tilde{B}_i + \sum_{k=2}^i \tilde{B}_k \right) \cos \beta_i \right], \quad R_{1i} = \tilde{C}_{u1}^i, \quad R_{2i} = \tilde{C}_{v1}^i + L_i, \quad R_{3i} = \tilde{C}_{u2}^i, \\ M_i &= p^+ (\tilde{v}_{i+1}^* - \tilde{v}_i^*) \left[\left(\tilde{A}_i + \sum_{k=2}^i \tilde{A}_k \right) \cos \beta_i + \left(\tilde{B}_i + \sum_{k=2}^i \tilde{B}_k \right) \sin \beta_i \right], \quad \alpha_i = \varphi_i p^-, \quad \beta_i = \varphi_i p^+, \quad R_{4i} = \tilde{C}_{v2}^i + M_i. \end{aligned}$$

Для визначення невідомих $\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, \tilde{D}_1$ використовують крайові умови, які в просторі зображень за Мелліном мають такий вигляд:

$$1) \text{ за умов першої крайової задачі теорії пружності (на берегах вирізу задані напруження) -} \\ \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{\sigma}_0(p+1), \quad \tilde{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{\tau}_0(p+1), \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{\sigma}_{n+1}(p+1), \quad \tilde{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{\tau}_{n+1}(p+1); \quad (7)$$

$$2) \text{ за умов другої крайової задачі (на берегах кутового вирізу задані переміщення) -} \\ \tilde{u} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{u}_0(p), \quad \tilde{u} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{u}_{n+1}(p), \quad \tilde{v} \Big|_{\varphi=0} = v_0(p), \quad \tilde{v} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = v_{n+1}(p); \quad (8)$$

3) у випадку змішаної задачі теорії пружності можливі декілька комбінацій крайових умов на берегах вирізу сформовані з величин

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{\sigma}_0(p+1), \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{\sigma}_{n+1}(p+1), \quad \tilde{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{\tau}_0(p+1), \quad \tilde{\sigma}_{r\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{\tau}_{n+1}(p+1), \\ \tilde{u} \Big|_{\varphi=0} = \tilde{u}_0(p), \quad \tilde{u} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \tilde{u}_{n+1}(p), \quad \tilde{v} \Big|_{\varphi=0} = v_0(p), \quad \tilde{v} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = v_{n+1}(p). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут зображення напружень відповідно до закону Гука мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{rr} &= M[r\sigma_{rr}] = \lambda(\{\partial_\varphi \tilde{v}\} - \tilde{v}) - (\lambda + 2\mu)p\tilde{u}, \\
\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= M[r\sigma_{\varphi\varphi}] = \lambda[(1-p)\tilde{u} + \{\partial_\varphi \tilde{v}\}] + 2\mu(\{\partial_\varphi \tilde{v}\} - p\tilde{u}), \\
\tilde{\sigma}_{zz} &= M[r\sigma_{zz}] = \lambda[(1-p)\tilde{u} + \{\partial_\varphi \tilde{v}\}], \quad \tilde{\sigma}_{r\varphi} = M[r\sigma_{r\varphi}] = \mu[\{\partial_\varphi \tilde{u}\} - (p+1)\tilde{v}],
\end{aligned} \tag{10}$$

де $\{\partial_\varphi \tilde{u}\}$, $\{\partial_\varphi \tilde{v}\}$ – похідні узагальнених функцій (5) у класичному сенсі [8].

Отже, у випадку кожної крайової задачі для з'ясування чотирьох функцій $A_1(p)$, $B_1(p)$, $C_1(p)$, $D_1(p)$ масмо систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь, записану на основі умов (7)-(9) і подання (5). Зазначимо, що з крайових умови, при $\varphi = 0$, зразу ж визначаються $C_1(p)$ через $A_1(p)$ і $D_1(p)$ через $B_1(p)$ у явному вигляді.

Переміщення і напруження в композиті визначаються за формулою оберненого перетворення Мелліна в такому вигляді:

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \tilde{\Phi}(p, \varphi) r^{-p} dp, \tag{11}$$

де $\tilde{\Phi}(p, \varphi) = \{\tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}, \tilde{\sigma}_{zz}, \tilde{\sigma}_{r\varphi}, \tilde{u}, \tilde{v}\}$ – зображення Мелліна напружень та переміщень, записані відповідно до (5), (10).

Якщо функції стрибка невідомі, то для їх з'ясування слід використати умови взаємодії дефекту та оточуючого матеріалу [10]. Підставивши подання (11) у ці умови, одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибка.

НАПРУЖЕНО ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТРИКЛИНОВИХ СИСТЕМ

Розглянемо триклинову систему ($n=3$), навантажену на берегах у точках з координатами $r = r_0$, $\varphi = 0$, φ_3 зосередженими силами $\vec{P} = \vec{T} + \vec{Q}$ за відсутності включень (рис. 2).

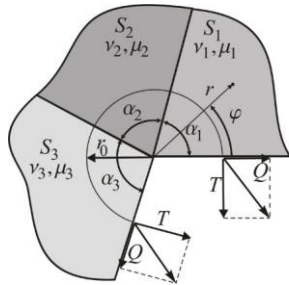


Рис. 2. Схема триклинової системи

Відтак функції стрибка напружень та переміщень в умовах спряження (1) дорівнюють нулю, а трансформанти крайових умов (7) мають такий вигляд:

$$\tilde{\sigma}_0(p+1) = \tilde{\sigma}_0 = Qr_0^p, \quad \tilde{\sigma}_4(p+1) = \tilde{\sigma}_4 = Qr_0^p, \quad \tilde{\tau}_0(p+1) = \tilde{\tau}_0 = Tr_0^p, \quad \tilde{\tau}_4(p+1) = \tilde{\tau}_4 = Tr_0^p; \tag{12}$$

Підстановка в умови (12) подань зображень напружень (10), з урахування рекурентних співвідношень (6) та правил диференціювання узагальнених функцій, приводить до системи чотирьох рівнянь для визначення коефіцієнтів $\tilde{A}_1(p)$, $\tilde{B}_1(p)$, $\tilde{C}_1(p)$, $\tilde{D}_1(p)$. З умови при $\varphi = 0$ отримано, що $\tilde{C}_1 = \tilde{\tau}_0(2\mu p)^{-1} - \tilde{A}_1 p^-(3-4\nu_1+p)^{-1}$, $\tilde{D}_1 = \tilde{\sigma}_0(2\mu p)^{-1} + \tilde{B}_1 p^+(3-4\nu_1+p)^{-1}$

(v_i – коефіцієнт Пуассона матеріалу відповідного клина), а з умови при $\varphi = \varphi_3$ систему двох алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}\tilde{t}_0 g_\sigma + \tilde{\sigma}_0 f_\sigma + A_\sigma \tilde{A}_1 + B_\sigma \tilde{B}_1 &= \tilde{\sigma}_4, \\ \tilde{t}_0 g_\tau + \tilde{\sigma}_0 f_\tau + A_\tau \tilde{A}_1 + B_\tau \tilde{B}_1 &= \tilde{\tau}_4,\end{aligned}\quad (13)$$

з якої, за методом Крамера, знайдено вигляд \tilde{A}_1 та \tilde{B}_1 . Виразів для g_σ , g_τ , f_σ , f_τ , A_σ , A_τ , B_σ , B_τ не наводимо за обмеженістю місця. Відтак напружено деформований стан триклинової системи повністю визначено у вигляді (11) з урахуванням (5), (6) та (10).

Знаходження інтегралів (11) зазвичай ускладнене, тому для обчислення оригіналів використовують теорему про лишки. Відтак вирази для переміщень та напружень подано у вигляді:

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \tilde{\phi}(p, \varphi) r^{-p} dp = \sum_{k=0}^n r^{-p_k} \phi_k(\varphi), \quad \sigma(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \tilde{\sigma}(p, \varphi) r^{-p} dp = \sum_{k=0}^n r^{-(p_k+1)} \sigma_k(\varphi), \quad (14)$$

де $\sigma_k(\varphi) = \text{Res}(\tilde{\sigma}(p, \varphi), p_k)$, $\phi_k = \text{Res}(\tilde{\phi}(p, \varphi), p_k)$, $\sigma = \{\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}\}$, $\phi = \{u, v\}$.

Полюсами підінтегральної функції є корені рівняння такого вигляду:

$$\Delta = B_\sigma A_\tau - A_\sigma B_\tau = 0. \quad (15)$$

Зазначимо, що корінь характеристичного рівняння (15) $p=0$ не є особливою точкою підінтегральної функції тому, під час застосування теореми про лишки, вибрано значення $s=0$ і інтегрування зведено на уявну вісь. При цьому, якщо нас цікавить поле напружень в околі точки сходження клинів ($r < r_0$), слід вибирати полюси, що лежать ліворуч від прямої інтегрування ($\text{Re } p_k < 0$) [11]. У протилежному разі вибираємо полюси, що лежать праворуч від прямої інтегрування ($\text{Re } p_k > 0$).

Під час досліджень обмежуються, як правило, вивченням асимптотичної поведінки напружень у малому околі точки сходження клинів. Оскільки сингулярність напружень визначається співвідношенням $\lambda = \text{Re } p + 1$, для з'ясування цих асимптотик напруженого стану достатньо обчислити лишки у полюсах p_i , котрі забезпечують максимальну сингулярність поля напружень. Зважаючи на те, що в околі точки сходження клинів лишки обчислюємо в полюсах із від'ємною дійсною частиною ($\text{Re } p < 0$), такими полюсами будуть корені рівняння (15) із дійсною частиною, що належить проміжку $(-1, 0)$.

Отримані результати у часткових випадках повністю збігаються із відомими в літературі дослідженнями інших авторів, зокрема з результатами [1, 2, 6, 11].

ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ЇХ АНАЛІЗ

За отриманими співвідношеннями здійснено числові дослідження максимального порядку сингулярності $\lambda^* = 1 - p^*$ ($p^* = p_1^* \pm i p_2^*$, $\text{Re } p^* = \min\{-\text{Re}(p_i) > 0\}$, p_i – корінь характеристичного рівняння (15)) та розподілу асимптотики нормальних напружень $\sigma_{\varphi\varphi}$ в околі вершини системи.

Результати досліджень коренів характеристичного рівняння (15) для різних геометричних конфігурацій триклинової системи (рис. 2) подані на рис. 3 (суцільні лінії відповідають значенням дійсних частин, а штрихові – уявних). Оскільки дослідження показали, що зміна коефіцієнтів Пуассона клинів у діапазоні $0,2 < v_i < 0,35$ та відношення модулів зсуву крайніх клинів системи мало впливає на числові значення порядку сингулярності напружень,

то обчислення здійснювалися для таких співвідношень механічних характеристик матеріалів: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,25$, $\mu_3/\mu_1 = 10$.

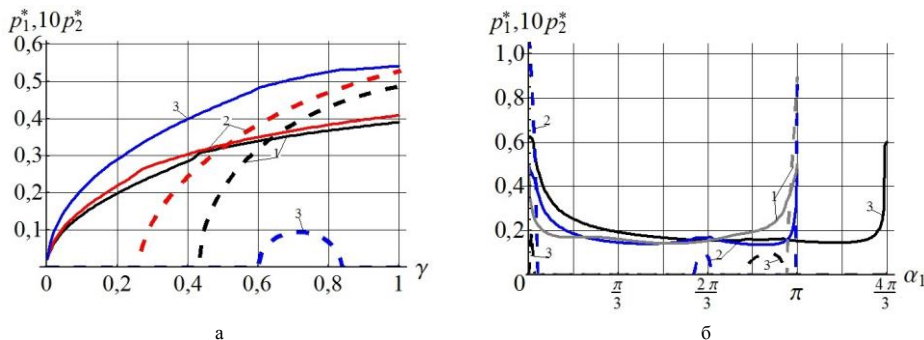


Рис. 3. Дійсна p_1^* та уявна p_2^* частини кореня характеристичного рівняння, що забезпечує максимальну сингулярність напружень в околі вершини системи

Поведінка коренів характеристичного рівняння залежно від відношення модулів зсуву $\gamma = \mu_2/\mu_1 \in (0,1)$ зображена на рис. 3 а. Лінії 1 відповідають кореням характеристичного рівняння, складеного для клинової системи з розхилом кутів $\alpha_1 = \alpha_3 = \pi/2$, $\alpha_2 = \pi$ (міжфазна тріщина, що виходить під прямим кутом на прямолінійну межу поділу матеріалів, ці результати збігаються з поданими в [1, 2]); лінії 2 і 3 – системам з розхилом кутів $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2\pi/3$ (міжфазна тріщина, що виходить на ламану межу поділу матеріалів) та $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$ відповідно.

На рис. 3 б зображена залежність значення кореня характеристичного рівняння (15) від зміни кута розхилу клина S_1 , зафіксованого відношення $\mu_2/\mu_1 = 0,1$ для таких випадків: міжфазна тріщина, що виходить на ламану межу поділу матеріалів ($\alpha_3 = \alpha_1$, $\alpha_2 = 2\pi - 2\alpha_1$) – лінії 1; тріщина, що виходить під кутом на прямолінійну межу поділу матеріалів ($\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \pi - \alpha_1$) – лінія 2; міжфазна тріщина, яка виходить із кутової точки межі поділу матеріалів, що зламана під кутом $\alpha = \alpha_2 = 2\pi/3$ ($\alpha_2 = 2\pi/3$, $\alpha_3 = 4\pi/3 - \alpha_1$) – лінія 3.

Подані на рис. 3 результати досліджень свідчать, що: порядок сингулярності напружень у триклиновій системі буде тим менший, чим ближчими за значеннями будуть механічні характеристики клинів S_1 та S_2 або S_3 та S_2 , при цьому його мінімальне значення залежить від конкретної геометричної конфігурації системи та наявності в ній вирізу; наявність комплексних коренів більшою мірою залежить від співвідношення механічних характеристик системи, а меншою від їх геометричних характеристик; при фіксованих механічних характеристиках системи для широкого діапазону значень розхилів кутів системи сингулярність напружень буде в межах $0,9 < \lambda < 0,7$ (рис. 3 б).

Поведінку асимптотики поля напружень у малому околі вістря системи визначає член ряду (14), котрий містить максимальне значення порядку сингулярності, тобто

$$\sigma(r) = r^{-(1+p^*)} \sigma^*(\varphi), \quad (16)$$

де p^* – корінь характеристичного рівняння (15) з максимальною від'ємною дійсною частиною; $\sigma^*(\varphi) = \text{Res}(\tilde{\sigma}(p, \varphi), p^*)$ $\sigma(\varphi) = \{\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\varphi}\}$ – функція, котра описує розподіл поля напружень за полярним кутом φ .

Використовуючи знайдені з (13) значення $\tilde{A}_1(p)$, $\tilde{B}_1(p)$, $\tilde{C}_1(p)$, $\tilde{D}_1(p)$, на основі співвідношень (5), (10) записано вирази трансформант напружень у вигляді (2). Відтак, вираз, що описує поведінку асимптотик напружень в околі точки сходження клинів, записано у вигляді (16).

На рис. 4 подано вигляд розподілу асимптотики нормального напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^*(\varphi)$ за полярним кутом φ поблизу вістря навантаженої на берегах ($\varphi=0, \varphi_3$, $r_0=1$) одиничною силою $T=1$, $Q=0$ триклинової системи (рис. 2), за різних її геометричних конфігурацій. При обчисленнях приймали: $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0,25$, $\mu_3/\mu_1=10$, $\mu_2/\mu_1=0,1$.

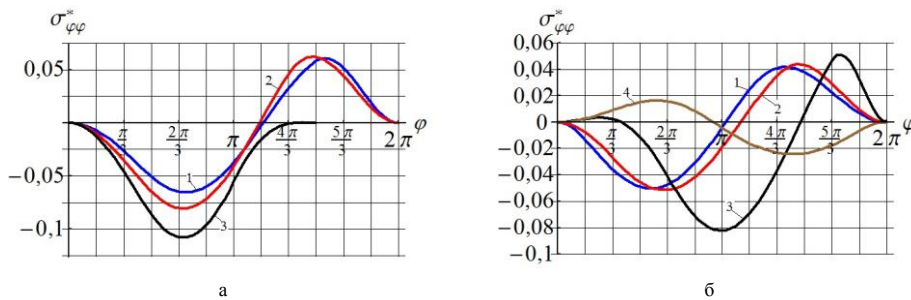


Рис. 4. Розподіл асимптотики нормального напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^*(\varphi)$ за кутовою координатою

На рис. 4 а подано розподіли асимптотик напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^*(\varphi)$ для таких систем: міжфазна тріщина, що виходить на прямолінійну межу поділу матеріалів ($\alpha_1=\alpha_3=\pi/2$, $\alpha_2=\pi$) – крива 1; міжфазна тріщина, що виходить в точку сходження трьох клинів з кутами розхилу – $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=2\pi/3$ – крива 2; три клини з кутами розхилу $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\pi/2$ – крива 3.

Розподіли асимптотик напружень $\sigma_{\varphi\varphi}^*(\varphi)$ для міжфазної тріщини, що виходить на прямолінійну межу поділу матеріалів під кутом α ($\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\pi$, $\alpha_3=\pi-\alpha$), зображено на рис. 4 б. Тут крива 1 відповідає значенню $\alpha=\pi/6$, крива 2 – $\alpha=\pi/3$, крива 3 – $\alpha=2\pi/3$, крива 4 – $\alpha=5\pi/6$.

З графіків, поданих на рис. 4 видно, що максимальними напруження будуть в клині S_2 , причому, за наявності в системі міжфазної тріщини, максимальні за модулем напруження в клинах S_1 та S_2 будуть більшими в клині з більшим модулем зсуву. За наявності вирізу локальний екстремум у клині із найбільшим модулем зсуву значно зменшується. Максимальні напруження у клинах S_1 та S_2 діють на лініях спаю. У випадку міжфазної тріщини, що виходить на прямолінійну межу поділу матеріалів, спостерігається така ж тенденція стосовно місця дії максимальних напружень у матеріалі клинів.

ВИСНОВКИ

Запропоновано методику з'ясування напружено-деформованого стану багатоклинових композитів за допомогою постановки узагальненої задачі спряження. За її допомогою записано аналітичні вирази для напружень та переміщень у багатоклиновій системі як функції лише чотирьох невідомих, що визначаються в явному вигляді з відповідних крайових умов. Отримані вирази були апробовані в задачі про визначення напруженого стану навантаженої зосередженими силами триклинової системи (достовірність отриманих результатів підтвердилася їх збігом у часткових випадках з відомими [1, 2, 6, 11]).

Апробація засвідчила, що методика використання постановки узагальненої задачі спряження уможливило ефективне проведення комплексного вивчення напруженого стану в околі вершин тріщин та гострокінцевих вирізів багатокomпонентних систем. У подальшому цю методику доцільно використовувати при прогнозуванні розвитку процесів руйнування в багатокomпонентних системах, що містять злами межі поділу матеріалів у випадку анізотропних матеріалів чи матеріалів функціонально градієнтних за полярним кутом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carpinteri A. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear problems / A. Carpinteri, M. Paggi // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2007. – Vol. 74. – Pp. 59-74.
2. Carpinteri A. On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials // A. Carpinteri, M. Paggi / *International Journal of Fracture*. – 2006. – Vol. 135. – Pp. 267-283.
3. Shang L. Y. Evaluation of fracture mechanics parameters for free edges in multi-layered structures with weak singularities // L.Y. Shang, Z.L. Zhang, B. Skallerud / *Int. J. Solids and Structures*. – 2009. – Vol. 46, №5. – Pp. 1134-1148.
4. Ghadiri M. Analysis of bonded anisotropic wedges with interface crack under anti-plane shear loading // M. Ghadiri, A.R. Shahani / *Applied Mathematics and Mechanics*. – 2014. – Vol. 35, Iss. 5. – Pp. 637-654.
5. Linkov A. Plane elasticity problem for a multi-wedge system with a thin wedge / A. Linkov, L. Rybarska-Rusinek // *Int. J. Solids and Structures*. – 2010. – 47, №24. – Pp. 3297-3304
6. Дудик М. В. Напряженно-деформированное состояние у вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела сред / М.В. Дудик, Ю.В. Дихтяренко, Г.А. Хазин // *Вісник Одеського національного університету. Математика. Механіка*. – 2013. – Т. 18, Вип. 3. – С. 59-68.
7. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів : СПОЛІОМ, 2003. – 318 с.
8. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М. : Наука, 1984. – 368 с.
9. Makhorkin M. On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation/ M. Makhorkin, H. Sulym // *Civil and environmental engineering reports*. – 5. – 2010. – Pp. 235-251.
10. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями : Монографія / Г.Т. Сулим. – Львів : ДВІЦ НТШ, 2007. – 716 с.
11. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М. : Наука, 1963. – 368 с.

REFERENCES

1. Carpinteri, A. and Paggi, M. (2007), “Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear problems”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 74, pp. 59-74.
2. Carpinteri, A. and Paggi, M. (2006), “On the asymptotic stress field in angularly nonhomogeneous materials”, *International Journal of Fracture*, vol. 135, pp. 267-283.

3. Shang, L.Y., Zhang, Z.L. and Skallerud, B. (2009), "Evaluation of fracture mechanics parameters for free edges in multi-layered structures with weak singularities", *Int. J. Solids and Structures*, vol. 46, no. 5, pp. 1134-1148.
4. Ghadiri, M. and Shahani, A.R. (2014), "Analysis of bonded anisotropic wedges with interface crack under anti-plane shear loading", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 35, iss. 5, pp. 637-654.
5. Linkov, A. and Rybarska-Rusinek, L. (2010), "Plane elasticity problem for a multi-wedge system with a thin wedge", *Int. J. Solids and Structures*, 47, no. 24, pp. 3297-3304.
6. Dudyk, M.V., Dikhtjarenko, Ju.V. and Hazin, G.A. (2013) "Tensely-deformed state at the tops of crack of the normal tearing away, going out an angular point border of division of environments", *Visnyk Odeskogo nacionalnogo universitetu. Matematyka. Mekhanika*, vol. 18, iss. 3, pp. 59-68.
7. Kushnir, R.M., Nykolyshyn, M.M. and Osadchuk, V.A. (2003), *Pruzhyj ta pruzhno-plastychnyj granynnyj stan obolonok z defektamy* [There is the resilient and resiliently-plastic maximum state of shells slipshod], SPOLOM, Lviv, Ukraine.
8. Podstrigach, Ja.S., Lomakin, V.A. and Koljano, Ju.M. (1984), *Termouprugost tel neodnorodnoj struktury* [Thermoelasticity of bodies of heterogeneous structure], Nauka, Moscow.
9. Makhorkin, M. and Sulym, H. (2010), "On determination of the stress-strain state of a multi-wedge system with thin radial defects under antiplane deformation", *Civil and environmental engineering reports*, 5, pp. 235-251.
10. Sulym, G.T. (2007), *Osnovy matematychnoi teorii termopruzhnoi rivnovagy deformivnyh tverdikh til z tonkomy vkljuchennjamy: Monografija* [Bases of mathematical theory of termopruzhnoi equilibrium of the deformed solids with the thin including: Monograph], DVC NTSh, Lviv, Ukraine.
11. Ufliand, Ja.S. (1963), *Integralnye preobrazovanija v zadachah teorii uprugosti* [Integral transformations are to the tasks of theory of resiliency], Nauka, Moscow.

УДК 539.3

ЕЛЕКТРОПРОВІДНА ТРІЩИНА МІЖ РІЗНОРІДНИМИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ

Онопрієнко О. Д., магістр, Лобода В. В., д. ф.-м. н., професор

*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

djgrking@gmail.com

У роботі розглядається біматеріальне тіло з міжфазною тріщиною. Знаходяться основні характеристики його напружено-деформованого стану при різних властивостях матеріалів, а також залежно від зовнішнього навантаження. Як зовнішнє навантаження вибираються розтягуючі та зсувні напруження, а також електричне поле. Зокрема, розглядається міжфазна тріщина у випадку нескінченного п'єзоелектричного біматеріалу. Вважається, що тріщину заповнено електропровідною рідиною і враховується контакт берегів тріщини, а також електричне поле в зоні контакту.

Ключові слова: міжфазна тріщина, п'єзоелектрик, біматеріал, зона контакту, електричне поле.