

6. Nahmein, E.L. and Nuller, B.M. (1986), "Contact of an elastic half-plane with partially exfoliated stamp", *Applying mathematics and mechanics*, p. 50, vol. 4, pp. 663-673.
7. Loboda, V.V. (1991), "About interfacial crack with contact zones", *Gidroaeromehanika i teoriya uprugosti*, pp. 78-86.
8. Parton, V.Z. and Kudryavcev, B.A. (1988), *Elektromagnitoupругost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [Electromagnetoelasticity piezoelectric and conductive bodies], Nauka, Moscow.

УДК 393.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА КРАЙОВОЮ РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент,
Звізло І. С., к. ф.-м. н.

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru

У роботі досліджується двовісний згин нескінченної ізотропної пластини з круговим отвором та крайовою радіальною тріщиною. При розв'язуванні задачі вважалося, що береги тріщини приходять у гладкий контакт на верхній основі пластини по області постійної ширини по всій її довжині. Розв'язок задачі побудований з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів і зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно стрибків переміщень у плоскій задачі та кутів повороту нормалі до серединної площини в задачі згину на берегах тріщини, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності контактної зусилля між берегами тріщини та коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, контакт берегів, контактне зусилля.

ДВУХОСНИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И КРАЕВОЙ РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., профессор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент,
Звизло И. С., к. ф.-м. н.

*Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru

В работе исследуется двухосный изгиб бесконечной изотропной пластины с круговым отверстием и краевой радиальной трещиной. При решении задачи считалось, что берега трещины приходят в гладкий контакт на верхней основе пластины по области постоянной ширины по всей ее длине. Решение задачи построено с использованием методов теории функций комплексного переменного и комплексных потенциалов и сведено к системе сингулярных интегральных уравнений относительно скачков перемещений в плоской задаче и углов поворота в задаче изгиба на берегах трещины, которая решена численно с помощью метода механических квадратур. Проведен численный анализ задачи и построены графические зависимости контактного усилия между берегами трещины, коэффициентов интенсивности моментов и усилий.

Ключевые слова: трещина, изгиб, изотропная пластинка, комплексные потенциалы, контакт берегов, контактное усилие.

BIAXIAL BENDING THE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE AND EDGE RADIAL CRACKS WITH THE WIDTH OF THE CONTACT AREA IT'S SHORES

Opanasovich V. K., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Professor,
Zvizlo I.S., Ph. D. in Physics and Maths

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru

We investigate the biaxial bending infinite isotropic plate with a circular hole and the edge of the radial crack. To solve the problem it was thought that the crack edges come into smooth contact at the top plate based on the area of constant width along its entire length. Solution of the problem is constructed using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials and reduced to a system of singular integral equations in the jumping displacement in the plane problem and the angles of rotation in the bending problem on the crack, which is solved numerically using the method of mechanical quadratures. A numerical analysis of the problem, on which constructed a graph of the contact force, intensity factors moments and efforts.

Key words: crack, bending, isotropic plate, complex potentials, contact shores, the contact force.

ВСТУП

Пластини широко застосовуються в машинобудуванні та інших галузях техніки. Їх дієздатність і експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів та отворів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчатих елементів важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність та механічні характеристики конструкції.

Формулювання та методи розв'язування плоских задач та задач згину пластин з тріщинами без урахування контакту їх берегів наведено в монографіях [1-5]. З фізичних міркувань зрозуміло, що контакт берегів тріщиноподібних дефектів впливає на напружено-деформований стан пластини, тому задачі з його дослідження є актуальними. Вперше аналітичний розв'язок задачі про згин пластини з однією тріщиною, береги якої гладко контактують по лінії по її усій довжині, побудовано Шацьким І.П. [6], а дещо пізніше аналогічні результати отримали Young M., Sun C. [7]. Задачі згину пластини з коловою межею поділу матеріалів (отвір, шайба) та з однією або двома тріщинами з урахуванням лінійчасного контакту їх берегів розв'язано в працях [8-10]. Напружено-деформований стан пластини з тріщиною, береги якої гладко контактують по області постійної ширини (смуговий контакт), за згину дослідили Slepyan L.I., Dempsey J.P., Shekhtman I.I. [11, 12], Опанасович В.К. [13]. Вплив кругового або еліптичного отвору на напружено-деформований стан пластини з однією прямолінійною тріщиною за смугового контакту її берегів вивчено в [14, 15].

У роботі досліджується двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором та радіальною крайовою тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі, на основі якого побудовані відповідні графічні залежності контактної зусилля, коефіцієнтів інтенсивності моментів та критичного навантаження.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та крайову радіальну тріщину завдовжки $2l$, вільну від зовнішнього навантаження. Виберемо в серединній площині пластини початок декартової системи координат $Ox\bar{z}$, направивши вісь $O\bar{z}$ перпендикулярно до неї, причому початок координат O співпадає з центром кругового отвору, а вісь Ox направлена по тріщині. У площині Oxy

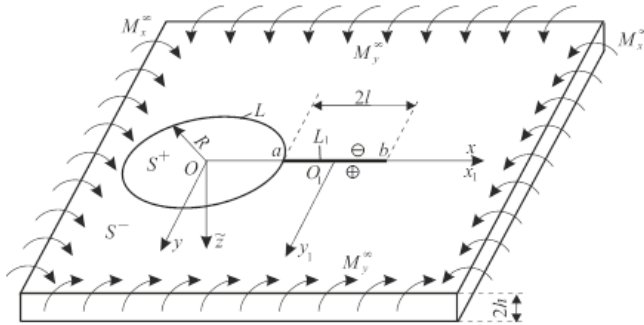


Рис. 1. Схема навантаження пластини

введемо полярну систему координат r і θ з полюсом у точці O і полярною віссю Ox і всім величинам, які відносяться до цієї системи координат, будемо приписувати відповідно індекси r і θ . Пов'яжемо з центром тріщини декартову систему координат $O_1x_1y_1$ (див. рис. 1). Точки площини Oxy , що співпадають з кінцями тріщини, позначимо через a і b , область у середині кругового отвору – через S^+ , зовні – через S^- , лінію, де розміщена тріщина, – через L_1 , а межу кругового отвору – через L . Пластина на нескінченності згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ , під дією яких береги тріщини приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 на верхній основі пластини [13].

Оскільки береги тріщини контактують, то розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину пластини (класична теорія); при таких крайових умовах

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1y_1}^\pm = 0, \quad P^\pm = 0, \quad M_{y_1}^\pm = h\beta N, \quad \partial_{x_1}[v_{II}] + \alpha h[\partial_{x_1y_1}^2 w] = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad P_r = 0, \quad M_r = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{x_1y_1}$, $\sigma_{y_1y_1}$ і σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень у декартовій та полярній системі координат відповідно, а u_{II} і v_{II} – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі, M_r і M_{y_1} – згинальні моменти, P і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили; $\partial_s f = \partial f / \partial s$; $[f] = f^+ - f^-$, значками «+» і «-» позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y_1 \rightarrow \pm 0$; константи α і β мають вигляд [13]:

$$\alpha = 0.5\{1 + (1 - \gamma^2)\}, \quad \beta = 1 - \gamma/3, \quad \gamma = h_1/h. \quad (3)$$

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [4] та класичної теорії згину пластин [5], аналогічно як у [8], розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної площини в задачі згину $Y(\eta)$ та стрибків переміщень на берегах тріщини в плоскій задачі $G(\eta)$, яка набула вигляду:

$$\int_{-1}^1 \{K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi)\} Y_1(\eta) d\eta - \frac{\varepsilon^2 c'}{X^2} = c', \quad \xi \in [-1, 1], \quad (4)$$

$$\int_{-1}^1 \{L(\eta, \xi) - K(\eta, \xi)\} Y_2(\eta) d\eta + \frac{2\beta\tilde{m}}{\pi} \int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi)\} G_1(\eta) d\eta = P(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi)\} G_2(\eta) d\eta = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (6)$$

де

$$P(\xi) = A - \tilde{\kappa}A + B + \frac{\varepsilon^2}{X^2} (A - \tilde{\kappa}A + B - B/\tilde{\kappa}) + \frac{\varepsilon^2 B}{\tilde{\kappa}X^4} (2X^2 - 3\varepsilon^2),$$

$$K(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\tilde{\kappa}}{\eta - \xi} + \frac{\tilde{\kappa}}{X} + \frac{\varepsilon^2}{2\tilde{\kappa}(TX - \varepsilon^2)} \left(\frac{2\tilde{\kappa}^2}{X} + \frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)} + \frac{2TX^3 - 3\varepsilon^2 TX + \varepsilon^4}{TX^2(TX - \varepsilon^2)^2} (T^2 - \varepsilon^2) \right) \right\},$$

$$L(\eta, \xi) = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \left\{ \frac{T^2 - \varepsilon^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} - \frac{2}{X^3} - \frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} - \frac{1}{TX^2} + \frac{X^2(2TX - \varepsilon^2) - 3\varepsilon^2 TX + 2\varepsilon^4}{X^3(TX - \varepsilon^2)^2} \right\},$$

$$R(\eta, \xi) = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{1}{X} + \frac{\varepsilon^2}{2(TX - \varepsilon^2)} \left(\frac{2}{X} + \frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)} + \frac{2TX^3 - 3\varepsilon^2 TX + \varepsilon^4}{TX^2(TX - \varepsilon^2)^2} (T^2 - \varepsilon^2) \right),$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} + \frac{2}{X^3} + \frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} + \frac{1}{TX^2} - \frac{X^2(2TX - \varepsilon^2) - 3\varepsilon^2 TX + 2\varepsilon^4}{X^3(TX - \varepsilon^2)^2} \right\},$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}, \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad A = -\frac{\rho+1}{4D(1+\nu)}, \quad B = \frac{1-\rho}{2} \tilde{m}, \quad \rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty}, \quad D = \frac{2}{3(1-\nu^2)}, \quad \tilde{m} = -\frac{1}{D(1-\nu)},$$

$$T = 1 + \varepsilon + \eta, \quad X = 1 + \varepsilon + \xi, \quad \varepsilon = R/l,$$

$$y(x) Eh^3 / M_y^\infty = Y(x) = Y_1(x) + iY_2(x), \quad y(x) = (1 + \tilde{\kappa})^{-1} [\partial_x w + i\partial_y w],$$

$$\frac{h^2 g'(x)}{M_y^\infty} = G(x) = G_1(x) + iG_2(x), \quad g'(x) = \frac{2\mu}{(1+\kappa)i} [\partial_x (u_n + iv_n)], \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$ – дійсні функції; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Зауважимо, що ядра $R(\eta, \xi)$ і $S(\eta, \xi)$ співпадають з відповідними ядрами, отриманими в монографії [3] за допомогою іншого підходу. Крім того, якщо формально поставити $\tilde{\kappa} = 1$, то ядра цієї системи сингулярних рівнянь пов'язані залежностями $\pi L(\eta, \xi) = -S(\eta, \xi)$ і $\pi K(\eta, \xi) = -R(\eta, \xi)$.

Зауважимо, що на підставі останнього співвідношення в (1) функції $G_1(\eta)$ і $Y_2(\eta)$ пов'язані

$$G_1(\eta) + \frac{\alpha(1+\tilde{\kappa})}{(1+\kappa)(1+\nu)} Y_2(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (7)$$

Для визначення сталі c' використаємо однозначність прогину пластини при обході кругового отвору та тріщини

$$c' + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{Y_1(\eta) d\eta}{T} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \eta Y_1(\eta) d\eta = 0. \quad (8)$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ) $K = K_1 - iK_2$ та зусиль (КІЗ) $k = k_1 - ik_2$ можна обчислити за формулами [2]:

$$k^{\pm} = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)g'(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)/l},$$

$$K^{\pm} = \mp 4Eh^3(3+\nu)(3(1-\nu^2))^{-1} \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)y(x)).$$

Оскільки для крайової тріщини КІМ та КІЗ у вершині a [2]

$$k^a = 0, \quad K^a = 0,$$

то

$$Y(-1) = 0, \quad G(-1) = 0. \quad (9)$$

Зведене контактне зусилля між берегами тріщини обчислимо за формулою

$$N^*(\xi) = \frac{hN(\xi)}{M_y^\infty} = 2 \int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi)\} G_1(\eta) d\eta, \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (10)$$

Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь (4)-(9) за допомогою методу механічних квадратур [3] зведена до такої системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $U_i(\eta_m)$, ($i = \overline{1,4}$) та c' :

$$\frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M (K(\eta_m, \xi_r) + L(\eta_m, \xi_r)) U_1(\eta_m) = c' \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{X_r^2} \right), \quad r = \overline{1, M-1},$$

$$\frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ (L(\eta_m, \xi_r) - K(\eta_m, \xi_r)) U_2(\eta_m) + \frac{2\beta\tilde{m}}{\pi} (R(\eta_m, \xi_r) + S(\eta_m, \xi_r)) U_3(\eta_m) \right\} = P(\xi_r), \quad r = \overline{1, M-1},$$

$$\sum_{m=1}^M (R(\eta_m, \xi_r) - S(\eta_m, \xi_r)) U_4(\eta_m) = 0, \quad r = \overline{1, M-1}, \quad (11)$$

$$\frac{\alpha(1+\tilde{\kappa})}{(1+\kappa)(1+\nu)} U_2(\xi_r) + U_3(\xi_r) = 0, \quad r = \overline{1, M-1},$$

$$c' + \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \frac{U_1(\eta_m)}{T_m} + \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \eta_m U_1(\eta_m) = 0,$$

де $\eta_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$, $\xi_r = \cos \frac{\pi r}{M}$, $T_m = 1 + \varepsilon + \eta_m$, $X_r = 1 + \varepsilon + \xi_r$,

$$Y_i(\eta) = \frac{U_i(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad G_i(\eta) = \frac{U_{2+i}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Зведені КІМ K^* та КІЗ k^* обчислювалися за формулою [3]

$$K^* = \frac{K}{M_y^\infty \sqrt{l}} = \mp \frac{2i(3+\nu)}{3(1-\nu^2)} u(\pm 1),$$

$$k^* = \frac{hk}{M_y^\infty \sqrt{l}} = \mp v(\pm 1),$$

де

$$\begin{aligned}
 u(1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} (U_1(\eta_m) + iU_2(\eta_m)) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \\
 u(-1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} (U_1(\eta_m) + iU_2(\eta_m)) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \\
 v(1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} (U_3(\eta_m) + iU_4(\eta_m)) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \\
 v(-1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} (U_3(\eta_m) + iU_4(\eta_m)) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi.
 \end{aligned} \tag{12}$$

12

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} U_j(\eta_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0, \quad j = \overline{1,4}. \tag{13}$$

Розв'язування задачі зведено до системи алгебраїчних рівнянь (11), (13).

Зведене контактне зусилля між берегами тріщини на основі (10) визначимо за формулою:

$$N^*(\xi_r) = \frac{2\pi}{M} \sum_{m=1}^M (R(\eta_m, \xi_r) - S(\eta_m, \xi_r)) U_3(\eta_m), \quad r = \overline{1, M-1}.$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

На основі розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (11)-(13) був проведений числовий аналіз задачі при $\nu = 0,3$ та $\gamma = 0,13$, який поданий на рис. 2-4.

На рис. 2 наведена графічна залежність зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ при різних значеннях $\varepsilon = R/l$ для $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 1$. Крива 1 побудована при $\varepsilon = 0,1$, крива 2 – при $\varepsilon = 0,5$, крива 3 – при $\varepsilon = 1$, крива 4 – при $\varepsilon = 2$, крива 5 – при $\varepsilon = 10$. Як бачимо з цього рисунка, при збільшенні ε величина N^* у ближній вершині тріщини ($\xi = -1$) зменшується, а в дальній ($\xi = 1$) – збільшується.

На рис. 3 подана графічна залежність зведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КІМ) K_1^{*b} у вершині b від ε , причому суцільними лініями позначені КІМ з урахуванням контакту берегів тріщини, а штриховими – без урахування контакту

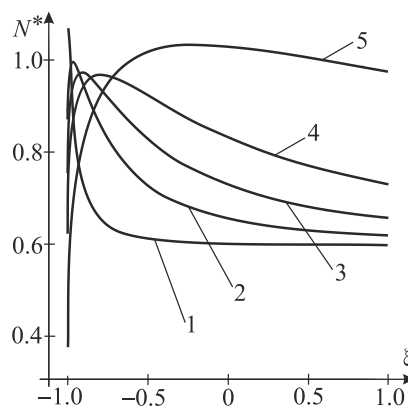


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля N^* між берегами тріщини

берегів тріщини. Криві 1 відповідають значенню $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty = 0$, криві 2 – $\rho = 1$, криві 3 – $\rho = 2$, криві 4 – $\rho = 5$. Як бачимо з цього рисунка, при збільшенні ε КІМ зростає, крім того, наявність моменту M_x^∞ призводить до його збільшення. Теж бачимо, що КІМ є меншими, якщо враховувати контакт берегів тріщини, ніж КІМ, коли контакт берегів тріщини не враховувати.

На рис. 4 подана графічна залежність приведенного коефіцієнта інтенсивності моментів (КІМ) K_1^{*b} у вершині b від ρ при різних значеннях ε . Криві 1 відповідають значенню

$\varepsilon = R/l = 0,5$, криві 2 – $\varepsilon = 1$, криві 3 – $\varepsilon = 2$, криві 4 – $\varepsilon = 5$. Як бачимо з цього рисунка, криві є лінійними, чого можна було сподіватися в силу лінійності $P(\xi)$ від відносного зовнішнього навантаження ρ , а КІМ зростають при збільшенні згинного моменту M_x^∞ .

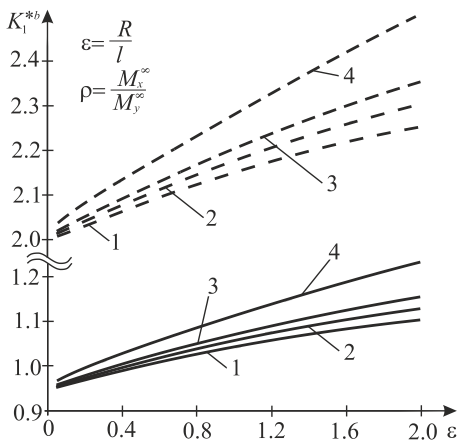


Рис. 3. Графічна залежність зведеного коефіцієнту інтенсивності моментів K_1^{*b} від відносного радіуса отвору ε

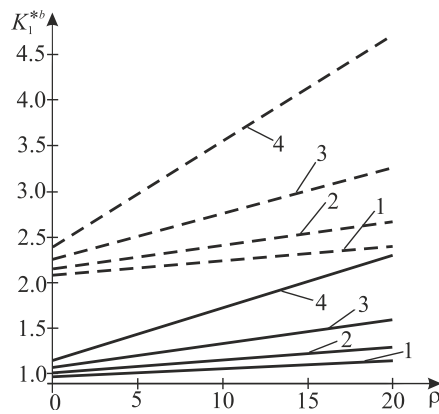


Рис. 4. Графічна залежність зведеного коефіцієнту інтенсивності моментів K_1^{*b} від відносного зовнішнього навантаження ρ

Зауважимо, що приведені КІЗ і КІМ у вершині b пов'язані між собою співвідношенням $k_1^{*b}/K_1^{*b} = 3(1+\nu)/(\alpha(3+\nu))$, тому графічні залежності для k_1^{*b} не наводяться. На основі числового аналізу можна стверджувати, що $K_2^{*b} = 0$ і $k_2^{*b} = 0$ при будь-яких параметрах сформульованої задачі. Зауважимо, що за відсутності контакту берегів тріщини результати для КІМ збігаються з результатами, наведеними в [16].

ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницький Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В.Панасюк. – К. : Наук. Думка, 1979. – 400 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Панасюк В. В. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин. – К. : Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М. : Изд-во “Наука”, 1966. – 708 с.
5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов. – Минск : Изд-во БГУ, 1975. – 256 с.
6. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
7. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.

8. Опанасович В. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 46-59.
9. Опанасович В. К. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.
10. Опанасович В. К. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з круговою шайбою та довільно розташованою тріщиною всередині шайби з урахуванням контакту її берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, М.С. Слободян // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 240-246.
11. Slepyan L. I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.I. Slepyan, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727-1749.
12. Dempsey J. P. Closure of a through crack in a plate under bending / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.L. Slepyan // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35. – P. 4077-4089.
13. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20(2). – С. 123-127.
14. Опанасович В. Згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян, В. Бедрій // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 222-230.
15. Опанасович В. К. Згин ізотропної пластини з еліптичним отвором та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В.К. Опанасович, М.С. Слободян, В.Я. Бедрій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 274-280.
16. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений : В 2-х томах. / Под ред. Ю. Мураками. – М. : Мир. – 1990. – 448 с.

REFERENCES

1. Beregnitskiy, L.T., Delyavskiy, M.V. and Panasyuk, V.V. (1979), *Izhib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects type of cracks], Naukova dumka, Kiev.
2. Savruk, M.P. (1981), *Dvumernie zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks], Naukova dumka, Kiev.
3. Panasyuk, V.V., Savruk M.P. and Datsishin, A.P. (1976) *Rasprostranenie napryazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Distribution of stresses around cracks in plates and shells], Naukova dumka, Kiev.
4. Mushelishvili, N.I. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moscow.
5. Prusov, I.A. (1975), *Metod sopryazheniya v teorii plit* [The method of conjugation in the theory of plates], Izdatelstvo Beloruskogo universitetu, Minsk.
6. Shatskiy, I.P. (1988), “Plate bending, weakened cut with contacting shores”, *Dopovidi AN URSR, Seria A, Fiziko-matematichni ta tehichni nauki*, no. 7, pp. 49-51.
7. Young, M. and Sun, C. (1992), “Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates”, *International Journal of Fracture*, vol. 55, pp. 81-93.

8. Opanasovych, V. and Slobodyan, M. (2006), "Bilateral bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with considering of the contact it's shores", *Visnyk Lvivskogo Universitetu, Seria Mehaniko-Matematichna*, vol. 65, pp. 46-59.
9. Opanasovych, V.K. and Slobodyan, M.S. (2006), "Bilateral bending of the plate with a circular orifice and a two radial crack with considering of the contact it's shores", *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polia*, vol. 49, no. 3, pp. 106-119.
10. Opanasovych, V.K., Zvizlo, I.S. and Slobodyan, M.S. (2012), "Bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and an arbitrarily located crack inside the washer with taking into account contact it's shores", *Problemi obchislvalnoi mehaniki ta mitsnosti konstruktiv*, vol. 19, pp. 240-246.
11. Slepian, L.I., Dempsey, J.P. and Shekhtman, I.I. (1995), "Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43, pp. 1727-1749.
12. Dempsey, J.P., Shekhtman, I.I. and Slepian, L.L. (1998), "Closure of a through crack in a plate under bending", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, pp. 4077-4089.
13. Opanasovych, V.K. (2007), "Bending the plate with a through crack linear considering width of its contact surfaces", *Naukovi notatki Lutskogo tehničnogo universitetu*, vol. 20(2), pp. 123-127.
14. Opanasovych, V., Slobodyan, M. and Bedriy, B. (2012), "Bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with the width of the contact area of the shores", *Visnyk Lvivskogo Universitetu, Seria Mehaniko-Matematichna*, vol. 76, pp. 222-230.
15. Opanasovych, V.K., Slobodyan, M.S. and Bedriy, B.Y. (2012), "Bending isotropic plates with elliptic hole and crack width of range account contact it's banks", *Problemi obchislvalnoi mehaniki ta mitsnosti konstruktiv*, vol. 20, pp. 274-280.
16. Pod red. Yu. Murakami (1990), *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazheniy* [Handbook of stress intensity factor], Mir, Moscow.

УДК 393.3

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ ТА ПРЯМОЛІНІЙНОЮ НАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент,
Ярема Є. Б., магістр

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Университетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, slob@yandex.ru, evhenkozak@mail.ru

У роботі запропоновано підхід до дослідження напружено-деформованого стану пластинчастого елемента конструкції за наявності в ньому криволінійного отвору і прямолінійної наскрізної тріщини при заданому навантаженні на отворі та тріщині, а також заданому однорідному полі зусиль на нескінченності. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали Колосова-Мухелішвілі, розв'язок задачі зведено до сингулярного інтегрального рівняння на отворі, а на берегах прямолінійної тріщини крайові умови задовольняються аналітично. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень, який подано графічно, при різних значеннях параметрів задачі для кругового та еліптичного отворів.

Ключові слова: пластина, прямолінійна тріщина, криволінійний отвір, комплексні потенціали.