

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ТРИЩИНОЮ АБО ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАННЯХ

Попов В. Г., д. ф.-м. н., професор

*Одеська національна морська академія,
вул. Дідріхсона, 8, м. Одеса, 65029, Україна*

dr.vg.popov@gmail.com

Розв'язано задачу з визначення напруженого стану при крутильних коливаннях півпростору навколо циліндричних дефектів (тріщина або тонке жорстке включення), які виходять на його поверхню. Метод розв'язання ґрунтується на використанні розривних розв'язків рівнянь крутильних коливань і полягає у зведенні вихідних граничних задач до інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків кутового переміщення або дотичного напруження.

Ключові слова: крутильні коливання, півпростір, циліндр, тріщина, тонке включення, сингулярне інтегральне рівняння.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ИЛИ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Попов В. Г., д. ф.-м. н., профессор

*Одесская национальная морская академия,
ул. Дидрихсона, 8, г. Одесса, 65029, Украина*

dr.vg.popov@gmail.com

Решена задача по определению напряженного состояния в полупространстве при крутильных колебаниях около цилиндрических дефектов (трещина или тонкое жесткое включение), выходящих на его поверхность. Метод решения основывается на применении разрывных решений уравнения крутильных колебаний и состоит в сведении исходной краевой задачи к интегральным уравнениям относительно неизвестных скачков углового перемещения или касательного напряжения.

Ключевые слова: крутильные колебания, полупространство, цилиндр, трещина, тонкое включение, сингулярное интегральное уравнение.

THE STRESS STATE OF HALF SPACE WITH A CYLINDRICAL CRACK OR THIN INCLUSION UNDER TORSION OSCILLATION

Popov V. G., D.Sc. in Physics and Math., Professor

*Odessa national maritime academy,
Didrikson str. 8, Odessa, 65029, Ukraine*

dr.vg.popov@gmail.com

Formulated and solved the boundary value problem by definition stress state in elastic half space which contains a thin inhomogeneity (defect) cylindrical form under torsion oscillations formulated and solved. It may be a crack, the surface of which coincides with a circular cylinder or a thin rigid inclusion mid surface coincides with the surface of the cylinder. It is assumed that the defect in the crossing surface, half space, and torsion oscillations occur as a result of axisymmetrical tangential stress of this surface. Because space is only axisymmetrical torsion strain, then you need to determine angular displacement from the appropriate equation. Conditions on the surface defect is determined by its type. In the case of crack is that its surface is free from stresses. In addition to the surface of the crack the angular displacement has discontinues. If the defect is inclusion, it is assumed that between him and half space performed the conditions of perfect coupling. Also on the surface of this inclusion has discontinues, tangential stress. The unknown angle of inclusion torsion is determined from the equation of motion.

The method of the solution the formulated boundary value problems is used of the discontinuous solutions of equations of torsion oscillations. It is the presentation of angular displacement in the form of two terms. The first of them is the discontinuous solution equation for angular displacement whiz jumps on the defects surface. Another term is the solution of the same equation is continuous on the defects surface and such that provides performance of boundary conditions on the surface of half space. After constructing these solutions initials boundary problem obtained to integral equations of the relatively unknown jumps displacements or tangential stress. The singular component of this equation

contains singular integral of Cauchy in the case of crack. When a defect is the inclusion of the resulting equation has a logarithmic singularity. After separating out root singularity of the solutions of these equations it's has been solve numerical by the mechanical kvadrature method. The result of this solution is the approximate formula for stress intensity factor (SIF) and amplitude angle of turn of inclusion.

Using the obtained approximate formulas generated computer study of dependence of dimensionless SIF from undimensional frequency at different ratios between the radius and the length of the defect. Results of the numerical analysis show that there are frequencies which are maximally values SIF. The values of these maxima even more so the smaller the ratio of the length of the cylinder to its radius. The frequency at which SIF reaches maximum will be the smaller the larger this ratio. In the case of crack maximum values SIF to seven times higher than those observed at static load half space. In the case of inclusion of this excess can reach 40-50 times. Thus in terms of load action on half space harmonic torsion load sharply increases the concentration of stresses around cylindrical defects that going out to the surface. The most powerful hubs stresses are oblong defects, in which experiencing resonant highs value of SIF.

Key words: torsion oscillations, half space, cylinder, crack, thin inclusion, singular integral equation.

ВСТУП

Однією з важливих задач, які виникають при створенні сучасних машин і споруд, є забезпечення їх міцності за наявності в них технологічних дефектів у вигляді тріщин або тонких включень. Проектування конструкцій з урахуванням у них тріщин або тонкостінних включень вимагає використання критеріїв, які визначають граничну рівновагу тіла, що містить вказані дефекти. Один з найпоширеніших таких критеріїв базується на аналізі напруженого стану в околі дефекту за допомогою коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН). Але теоретичне визначення КІН вимагає розв'язання відповідних граничних задач теорії пружності. Причому ці задачі суттєво ускладнюються у випадку роботи конструкцій в умовах динамічного, зокрема гармонічного, навантаження і дефектів складної форми. Ще більш складними стають ці задачі при розгляді взаємодії дефекту з границею тіла, особливо у випадку виходу дефекту на границю. Тому розв'язки подібних задач сьогодні практично відсутні.

У поданій роботі розв'язується задача з визначення напруженого стану в пружному півпросторі, де знаходиться циліндричний дефект (тріщина або тонке жорстке включення) при крутильних коливаннях. Відомі розв'язки подібних задач у випадку необмеженого тіла. Так задачі рівноваги необмеженого тіла з циліндричною тріщиною розглянуто в [1, 2]. Напружений стан у необмеженому тілі при ударних навантаженнях навколо пів нескінченної тріщини визначено в [3, 4], а навколо циліндричних включень у [5, 6].

ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ

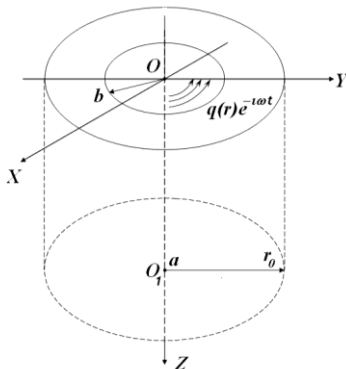


Рис. 1. Циліндричний дефект у півпросторі

Нехай пружний півпростір містить тонку неоднорідність (дефект) циліндричної форми, яка перетинає його поверхню. Це може бути тріщина, поверхня якої співпадає з круговим циліндром

$$0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq z \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{рис. 1}).$$

Або це тонке жорстке включення, серединна поверхня мало співпадає з поверхнею вказаного циліндра товщини $h \ll a$.

У півпросторі відбуваються крутильні коливання внаслідок дії на поверхню півпростору гармонічного навантаження, зосередженого на крузі $0 \leq r \leq b$ і інтенсивності $q(r)e^{-i\omega t}$. Далі множник

$e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу відкинута і розглядаються тільки комплексні амплітуди.

Оскільки в півпросторі відбуваються тільки вісесиметрична деформація крутіння, то відмінним від 0 є лише кругове переміщення, яке задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \kappa_2^2 u = 0, \quad \kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad c_2^2 = \frac{G_1}{\rho_1}, \quad (1)$$

де G_1 , ρ_1 – модуль зсуву і густина матеріалу півпростору, ω – частота коливань. Граничні умови на поверхні півпростору формуються у вигляді рівності:

$$\tau_{\theta z}(r, 0) = \begin{cases} q(r), & 0 \leq r \leq b, \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (2)$$

Умови на поверхні дефекту визначаються його типом. У випадку тріщини вважатимемо, що її береги вільні від напружень, тобто:

$$\tau_{\theta z}(r_0, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq a. \quad (3)$$

Окрім того, на бічній поверхні тріщини має розрив кутове переміщення, стрибок якого позначимо

$$u(r_0 + 0, z) - u(r_0 - 0, z) = \chi_2(z), \quad z \in [0, a]. \quad (4)$$

Якщо дефектом є включення, то вважається, що між ним і півпростором здійснені умови повного зчеплення, з яких випливає рівність:

$$u(r_0, z) = \alpha \cdot r_0, \quad z \in [0, a], \quad (5)$$

де α – невідомий кут повороту включення. Також на поверхні такого включення має розрив дотичне напруження, стрибок якого позначимо:

$$\tau_{\theta r}(r_0 + 0, z) - \tau_{\theta r}(r_0 - 0, z) = \chi_1(z), \quad z \in [0, a]. \quad (6)$$

Невідомий кут повороту включення визначається з рівнями руху, який у нашому випадку має вигляд:

$$2\pi r_0^2 \int_0^a \chi_1(\eta) d\eta = -\alpha \omega^2 I_0, \quad (7)$$

де I_0 – момент інерції включення, що дорівнює:

$$I_0 = \frac{\pi \rho_0 r_0^3 a h}{2} (4 + \varepsilon^2), \quad (8)$$

де ρ_0 – густина включення, h – його товщина, $\varepsilon = h/a$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ТРІЩИНИ

Представимо переміщення в півпросторі у вигляді двох складових:

$$u(r, z) = u_0(r, z) + u_1(r, z). \quad (9)$$

Першій доданок є розривним розв'язком рівняння (1) зі стрибком (4) на поверхні тріщини, для якого на поверхні півпростору має виконуватися рівність:

$$\tau_{\theta r}^{-1}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (10)$$

Другий доданок – це розв'язок рівняння (1), неперервний на поверхні тріщини, і такий, що відповідна складова дотичного напруження:

$$\tau_{\theta r}^0(r, z) = G \frac{\partial u_0}{\partial z}$$

на поверхні півпростору задовольняє умову (2).

Розв'язок $u_0(r, z)$ легко знаходиться шляхом застосування інтегрального перетворення Ганкеля [7] і визначається формулами:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^0(r, z) &= -\frac{1}{G_1} \int_0^{\infty} \frac{\lambda Q(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2} z} I_1(\lambda r) d\lambda, \\ \tau_{rz}^0(r, z) &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 Q(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2} z} I_2(\lambda r) d\lambda, \end{aligned} \quad (11)$$

де $Q(\lambda)$ – є перетворення Ганкеля функції $q(r)$ з (2), яке дорівнює:

$$Q(\lambda) = \int_0^b r q(r) I_1(\lambda r) dr. \quad (12)$$

Розривний розв'язок рівняння (1) зі стрибком (4), який на поверхні півпростору задовольняє нульові умови (10), може бути легко знайдено, оскільки побудовано такий розв'язок для необмеженого тіла [3, 4]. Отримано формули:

$$\begin{aligned} u_1(r, z) &= -r_0 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^a \chi_2(\eta) [F_{20}(\eta - z, r) + F_{20}(\eta + z, r)] d\eta; \\ \tau_{\theta r}^1(r, z) &= -r_0 G_1 \int_0^a \chi_2(\eta) [F_{22}(\eta - z, r) + F_{22}(\eta + z, r)] d\eta; \end{aligned} \quad (13)$$

$$F_{22}(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q_2(\beta) G_{22}(\beta, r) \cos \beta x d\beta; \quad F_{20}(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_{20}(\beta, r) \cos \beta x d\beta.$$

В останніх формулах використано позначення

$$G_{ji}(\beta, r) = \begin{cases} I_j(q_2 r) K_i(q_2 r_0), & 0 \leq r < r_0 \\ I_i(q_2 r_0) K_j(q_2 r), & r > r_0 \end{cases} \quad (14)$$

$$q_2 = \sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}.$$

Отже, формули (9), (11), (13) визначатимуть переміщення і напруження в півпросторі за умови, що визначено невідомий стрибок переміщень $\chi_2(z)$. Для цього слід задовольнити умову (3) на поверхні тріщини. Після підстановки в (3) вищевказаних формул прийдемо до інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка переміщень. Після здійснення у цьому рівнянні інтегрування частинами, парного продовження $\chi_2'(z)$ і правої частини на проміжок $z \in [-a, a]$ і введення позначень:

$$\eta = a\tau, \quad z = a\zeta, \quad \varphi_2(\tau) = \chi_2'(a\tau), \quad (15)$$

це рівняння набуває вигляду:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) L_2(\tau - \zeta) d\tau = f_2(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1, \quad (16)$$

де

$$L_2(Y) = 2\gamma\kappa_0^2 \int_0^\infty \frac{(u^2-1)}{u} I_2(\kappa_0 p_2) K_2(\kappa_0 p_2) \sin \gamma \kappa_0 u Y du, \quad Y = \tau - \zeta,$$

$$f_2(\zeta) = -\frac{\tau_{rc}^0(r_0, a|\zeta)}{G_1} = -\frac{\kappa_2}{G_1} \int_0^\infty \frac{u^2 Q(u\kappa_2)}{p_2} e^{-p_2 \kappa_2 |\zeta|} I_2(\kappa_0 u) du;$$

$$p_2 = \sqrt{u^2 - 1}, \quad \gamma = \frac{a}{r_0}, \quad \kappa_0 = a\kappa_2.$$

Для вилучення сингулярної складової ядра інтегрального рівняння (16) слід скористатися асимптотичним розвиненням:

$$I_l(\kappa_0 p_2) K_l(\kappa_0 p_2) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\kappa_0 u} + \frac{A_{1l}}{(\kappa_0 u)^3} + \frac{A_{2l}}{(\kappa_0 u)^5} + O((\kappa_0 u)^{-7}) \right], \quad l=1, 2. \quad (17)$$

Це розв'язання отримано за допомогою відомих формул [8] для модифікованих циліндричних функцій. З (17) випливає, що функція, яка визначається вищенаведеним інтегралом, може бути представлена у вигляді:

$$L_2(Y) = \frac{1}{Y} + Q_2(Y), \quad Q_2(Y) = O(Y \ln|Y|), \quad Y \rightarrow 0.$$

За допомогою останньої формули рівняння переписується у вигляді:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \zeta} + Q_2(\tau - \zeta) \right] d\tau = f_2(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1. \quad (18)$$

До рівняння (18) необхідно додати ще рівність:

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) d\tau = 0, \quad (19)$$

яка випливає з (15) із того, що $\chi_2(a) = 0$.

Наближений розв'язок (18) шукається у вигляді:

$$\varphi_2(\tau) = \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad (20)$$

і будується методом, викладеним у [9]. Згідно з цим методом (18), (19) замінюються системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \varphi_{2m} \left[\frac{1}{\tau_m - \zeta_k} + Q_2(\tau_m - \zeta_k) \right] = f_{2k}, \quad k=1, 2, \dots, n-1,$$

$$\sum_{m=1}^n a_m \varphi_{2m} = 0, \quad (21)$$

де

$$\tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \quad m=1, 2, \dots, n, \quad - \text{корені многочлена Чебишева,}$$

$$\zeta_k = \cos \frac{\pi k}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \psi_{2m} = \psi(\tau_m), \quad f_{2k} = f(\zeta_k).$$

Після розв'язання системи (21) функція $\psi_2(\tau)$ у поданні (20) наближається інтерполяційним многочленом:

$$\psi_2(\tau) \approx \psi_2^{(n-1)}(\tau), \quad \psi_2^{(n-1)}(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{2m}(\tau) \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)}. \quad (22)$$

Для механіки руйнування найбільший інтерес становить коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), який визначається згідно з формулою:

$$K = \sqrt{a} \lim_{\zeta \rightarrow 1+0} \sqrt{\zeta - 1} \tau_{\theta r}(r_0, a\zeta). \quad (23)$$

Після підстановки у (23) напружень з формули (13) і здійснення граничного переходу за допомогою (20), (22) для наближеного обчислення КІН, отримано формулу

$$K = \frac{G_1 \sqrt{a}}{2\sqrt{2n}} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{2m} \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2}, \quad \gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}. \quad (24)$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ТОНКОГО ВКЛЮЧЕННЯ

У цьому випадку теж слід використовувати для переміщень подання (9). Але в цьому поданні друга складова має бути розривним розв'язком рівняння (1) зі стрибком напружень (6) на серединній поверхні включення, який задовольняє умову (10) на поверхні півпростору. Оскільки для необмеженого тіла відповідний розривний розв'язок рівняння (1) побудовано [5, 6], то легко знаходимо, що

$$u_1(r, z) = \frac{r_0}{\pi} \int_0^a \chi_1(\eta) [F_{11}(r, \eta - z) + F_{11}(r, \eta + z)] d\eta, \quad (25)$$

де

$$F_{11}(r, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty G_{11}(\beta, r) \cos \beta x d\beta,$$

а $G_{11}(\beta, r)$ знаходиться згідно з (14).

Отже, для остаточного визначення переміщення півпростору залишилося знайти невідомий стрибок дотичних напружень на поверхні включення. Для цього з умови (5), що залишилася незадовільненою, після підстановки туди (9), (11) і (25) отримаємо інтегральне рівняння. Це рівняння після парного продовження $\chi_1(z)$ і правої частини на проміжок $[-a, a]$ і переходу до позначень:

$$\eta = a\tau, \quad z = a\zeta, \quad \varphi_1(\tau) = \frac{\chi_1(a\tau)}{G_1} \quad (26)$$

наступного вигляду

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^1 \varphi_1(\tau) L_1(\tau - \zeta) d\tau = \alpha + f_1(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1, \quad (27)$$

$$L_1(Y) = -2\gamma\kappa_0 \int_0^\infty I_1(\kappa_0 p_2) K_1(\kappa_0 p_2) \cos(\gamma\kappa_0 u Y) du, \quad Y = \tau - \zeta,$$

$$f_1(\zeta) = \frac{u_0^0(r_0, a|\zeta)}{r_0} = -\frac{\kappa_2}{G_1 r_0} \int_0^\infty \frac{Q(u\kappa_2)}{p_2} e^{-p_2 \kappa_0 |\zeta|} I_1(\kappa_0 u) du.$$

З асимптотичного розвинення (17) і вищенаведеного інтеграла впливає таке представлення для ядра інтегрального рівняння

$$L_1(Y) = \gamma \ln|Y| + Q_1(Y), \quad Q_1(Y) = O(Y^2 \ln|Y|), \quad Y \rightarrow 0.$$

Враховуючи останню формулу, інтегральне рівняння (27) приведемо до вигляду:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) [\gamma \ln|\tau - \zeta| + Q_1(\tau - \zeta)] d\tau = \alpha + f_1(\zeta). \quad (28)$$

До рівняння (28) необхідно додати рівність для визначення невідомого кута повороту включення, отриману з (7), (8) після переходу до позначень (26)

$$\alpha = -\frac{1}{m_0 \kappa_0^2} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) d\tau, \quad m_0 = \frac{\varepsilon(4 + \varepsilon^2)}{2\rho}, \quad \varepsilon = \frac{h}{r_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad (29)$$

ρ_1, ρ_0 – відповідно густини півпростору і включення. До цієї рівності перетворюється рівняння (7).

Наближений розв'язок рівняння (28) теж шукається у вигляді (20) і будується аналогічним методом. Згідно з цим методом (28), (29) замінюються такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \varphi_{1m} [\gamma C_{km} + Q_1(\tau_m - y_k)] &= \alpha + f_{1k}, \quad k=1, 2, \dots, n; \\ \alpha &= -\frac{1}{m_0 \kappa_0^2} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{1m}, \end{aligned} \quad (30)$$

де $y_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k=1, 2, \dots, n$, $f_{1k} = f_1(y_k)$.

При отриманні системи (30) для інтегралу з логарифмічною особливістю використано наступну квадратурну формулу [10]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\psi_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \ln|\tau - y_k| d\tau &= \sum_{m=1}^n a_m C_{km} \psi_{1m}, \\ C_{km} &= -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^{-1} \cos \frac{j\pi(2m-1)}{2n} \cos \frac{jk\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Для оцінки концентрації напружень навколо включень у півпросторі введено до розгляду коефіцієнт при особливості стрибка напружень:

$$K = G_1 \sqrt{a} \lim_{\zeta \rightarrow 1+0} \sqrt{\zeta - 1} \varphi_1(\zeta),$$

який далі називатиметься коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН) для включення. Наближене значення цього коефіцієнту може бути обчислено за формулою:

$$K = \frac{G_1 \sqrt{a}}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_m \operatorname{ctg} \gamma_m / 2. \quad (31)$$

ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ

За допомогою отриманих наближених формул (24) і (31) проведено комп'ютерне дослідження почастотної залежності КІН для тріщини і включення при різних співвідношеннях між геометричними розмірами. При проведенні розрахунків припускалося, що навантаження на поверхні півпростору (2) дорівнює:

$$q(r) = G_1 \frac{r}{r_0}.$$

Тоді

$$Q(\lambda) = \frac{G_1 b^2}{\lambda r_0} I_2(\lambda b),$$

а праві частини в рівняннях (16), (27) мають вигляд:

$$f_2(\zeta) = -\kappa_0 b_0^2 \int_0^{\infty} \frac{u}{\rho_2} e^{-\gamma \kappa_0 \rho_2 |\zeta|} I_2(\kappa_0 b_0 u) I_1(u \kappa_0) du,$$

$$f_1(\zeta) = b_0^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho_2} e^{-\gamma \kappa_0 \rho_2 |\zeta|} I_2(\kappa_0 b_0 u) I_1(u \kappa_0) du, b_0 = \frac{b}{r_0}.$$

На рис. 2 і рис. 3 показано графіки залежності від безрозмірного хвильового числа κ_0 величини $k = |K|/|K_{cm}|$, де K_{cm} – значення КІН, що відповідає аналогічному статичному навантаженню. При розрахунках вважалось, що $b_0 = b/r_0 = 0.5$, а $\varepsilon = \varepsilon/h = 0.05$. Кожна крива на цих рисунках відповідає вказаному значенню відношення геометричних розмірів дефекту $\gamma = a/r_0$.

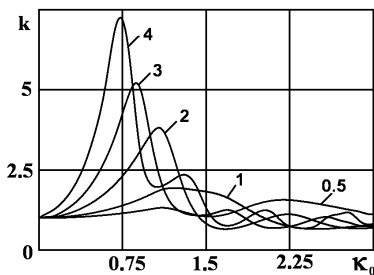


Рис. 2. Залежність безрозмірного КІН від безрозмірного хвильового числа у випадку тріщини

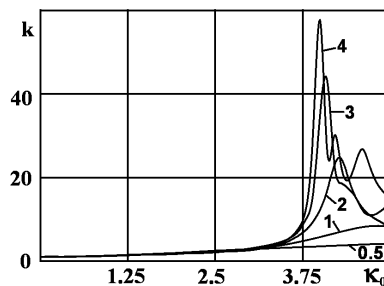


Рис. 3. Залежність безрозмірного КІН від безрозмірного хвильового числа у випадку тріщини

Графіки на рис. 2 побудовано для тріщини. Усі криві показують наявність максимуму відносного значення КІН. Величина цього максимуму буде більшою навколо циліндрів витягнутої форми. Частота, за якої КІН сягає максимуму, буде тим меншою, чим більша відносна довжина циліндра. На рис. 3 показана зміна КІН при зростанні хвильового числа у випадку, коли дефектом є включення. Тут теж спостерігається наявність частот, при яких КІН набуває максимуму, причому для витягнутих включень цей максимум має характер резонансу. В точках максимуму спостерігається перевищення статичного значення КІН у 40-50 разів.

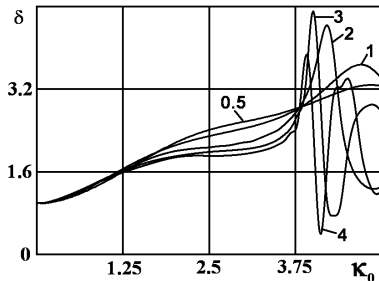


Рис. 4. Залежність амплітуди кута повороту від безрозмірного хвильового числа.

Також дослідження залежить від хвильового числа відносно кута повороту включення $\delta = |\alpha|/|\alpha_{cm}|$, де α_{cm} – кут повороту при статичному навантаженні. Відповідні графіки показано на рис. 4. Можна бачити, що при тих частотах, коли КІН сягає максимуму, спостерігається і максимум δ . Але потім відбувається швидке спадання амплітуди кута повороту до мінімуму.

ВИСНОВКИ

Методом розривних розв'язків розв'язані віссиметричні задачі визначення концентрації напружень навколо циліндричних дефектів у пружному півпросторі при крутильних коливаннях. Показано, що в умовах дії на півпростір гармонійного крутильного навантаження різко збільшується концентрація напружень навколо циліндричних дефектів, що виходять на поверхню, порівняно з аналогічним статичним навантаженням. Встановлено існування частот, при яких значення КІН сягають максимуму. Величина цих максимумів тим більша, чим більше відношення довжини дефекту до його радіусу. Частота, за якою КІН сягає максимуму, буде тим меншою, чим більше це відношення. Найбільш сильними концентраторами напружень є витягнуті дефекти, за яких спостерігаються резонансні максимуми значення КІН. У випадку тріщини максимальні значення КІН до семи разів перевищують ті, що спостерігаються при дії статичного навантаження на поверхню півпростору. Якщо дефектом є тонке жорстке включення, то це перевищення може сягати 40-50 разів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, В.И. Сметанин, Б.В. Соболев. – М. : Наука, 1993. – 234 с.
2. Попов Г. Я. К решению задач о концентрации упругих напряжений возле цилиндрических дефектов / Г.Я. Попов, Б.К. Кебли // Прикладная механика. – 1997. – 33, №10. – С. 67-73.
3. Попов Г. Я. О коэффициенте интенсивности касательных напряжений у края полубесконечной трещины при ударном нагружении у края полубесконечной трещины при ударном нагружении ее берегов / Г.Я. Попов, Ю.А. Морозов, А.В. Усов // Проблемы прочности. – 1999. – №3. – С. 63-72.
4. Морозов Ю. А. Задача про концентрацію напружень біля напівнескінченної циліндричної тріщини / Ю.А. Морозов, Г.Я. Попов // машинознавство. – 1999. – №5. – С. 28-32.
5. Попов В. Г. Взаимодействие гармонической волны кручения с тонким жестким цилиндрическим включением / В.Г. Попов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – №5. – С. 75-81.
6. Попов В. Г. Дослідження концентрації напружень в околі включення у вигляді скінченної циліндричної оболонки під дією хвилі кручення / В.Г. Попов // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – 50, № 2. – С. 29-34.
7. Попов Г. Я. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень / Г.Я. Попов, В.В. Реут, Н.Д. Вайсфельд. – Одеса, 2005. – 184 с.
8. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1974. – 275 с.

9. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. – М. : Наука, 1985. – 253 с.
10. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / З.Т. Назарчук. –К. : Наукова думка, 1989. – 256 с.

REFERENCES

1. Aleksandrov, V.M., Smetanin, V.I. and Sobol, B.V. (1993), *Tonkiye koncentratory napryazheniy v uprugikh telakh* [The thin concentrators of stresses in the elastic bodies], Nauka, Moscow, Russia.
2. Popov, G.Ya. and Kebli, B.K. (1997), “For solve of the problems about stress concentration near cylindrical defects”, *Prikladnaya mehanika*, vol. 33, no. 10, pp. 67-63.
3. Popov, G.Ya., Morozov, Y.A. and Usov, A.V. (1999), “About the stress intensive factor of the tangential stress near edge of semi-infinity cylindrical crack under shock loaded its banks”, *Problemy prothnosti*, no. 3, pp. 63-72.
4. Morozov, Y.A. and Popov, G.Ya (1999), “The problem about stress concentration near semi-infinity cylindrical crack”, *Mashinoznavstvo*, no. 5, pp. 28-32.
5. Popov, V.G. (2004), “Interaction harmonic torsion waves with thin hard cylindrical inclusion”, *Izvestiya RAN, Mechanica tverdogo tela*, no. 5, pp. 75-81.
6. Popov, V.G. (2007), “Analysis of stress concentration near inclusion in the form of finite cylindrical shell under action of torsion wave”, *Mathematical method and physicommechanical fields*, vol. 50, no. 2, pp. 29-34.
7. Popov, G.Ya., Reyt, V.V. and Vaysfeld, N.D. (2005), *Rivnyannya matematychnoi fizyky. Metod integralnykh peretvoren* [Mathematical physic equations. Integral transformation method], Odessa, Ukraine.
8. Bateman, H. and Erdelyi, A. (1974), *Vyshiyie transcendentnye funktsii* [Higher transcendental functions], Nauka, Moscow, Russia.
9. Belotcerkovskiy, S.M. and Lifanov, I.K. (1985), *Thislennyye metody v singularnykh integralnykh uravneniyach I yich primeneniye v aerodinamike, teoriy uprugosti, electrodinamike* [Numerical methods for singular integral equation and its application to aerodynamics, theory of elasticity, electrodynamics], Nauka, Moscow, Russia.
10. Nazarchuk, Z.T. (1989), *Thislennoe issledovaniye difrarcy voln na cilindriteskikh strukturach* [Numerical analysis of diffraction waves by cylindrical structure], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

УДК 539.376

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Пошивалов В. П., д. т. н., профессор, Дояр И. А.

*Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, Днепропетровск, 49600, Украина*

vposhivalov@gmail.com, kosmik90@mail.ru

Разработан подход к прогнозированию долговечности конструкционных материалов при неизотермической ползучести в условиях одноосного стационарного нагружения. Построена стохастическая модель длительной прочности. Предложен метод идентификации констант ползучести материала. Разработано программное

Фізико-математичні науки