

5. Shiryaev, A.N. (1980), *Veroyatnost'* [Probability], Moscow.
6. Levin, B.R. (1989), *Teorticheskiye osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Fundamentals of Statistical Radio Engineering], Radio i Svyaz, Moscow.
7. Kowalewski, Z.L. (2005), "Creep analysis of M1E copper and PA6 aluminum alloy subjected to prior plastic deformation", *Journal of theoretical and applied mechanics*, vol. 43, no. 2, pp. 241-256, ISSN: 1429-2955.
8. Lokoshchenko, A.M., Martynenko, A.I. and Platonov, D.O. (2004), "Analysis of criteria of long-term strength in complex tension with consideration for correction of test results", *Proceedings of II International Conference on Problems of Dynamics and Strength for Gas Turbine Manufacture*, 25-27 May, 2004, Kiev, pp. 119-121.

УДК 534.1:539.3

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Сметанкіна Н. В., д. т. н., провідний науковий співробітник

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України,
вул. Дм. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046, Україна*

nsmetankina@yandex.ru

Запропоновано метод дослідження нестационарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні. Метод ґрунтується на розвиненні шуканих функцій у тригонометричні ряди. Динамічна поведінка оболонок досліджується в рамках теорії першого порядку. Теоретичні результати добре узгоджуються з експериментальними даними.

Ключові слова: шарувата оболонка, складна форма, нестационарні коливання, удар.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Сметанкина Н. В., д. т. н., ведущий научный сотрудник

*Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина*

nsmetankina@yandex.ru

Предложен метод исследования нестационарных колебаний слоистых незамкнутых цилиндрических оболочек со сложной формой плана при ударном нагружении. Метод основан на разложении искомым функций в тригонометрические ряды. Динамическое поведение оболочек исследуется в рамках теории первого порядка. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: слоистая оболочка, сложная форма, нестационарные колебания, удар.

MODELLING OF VIBRATIONS OF LAMINATED CYLINDRICAL SHELLS OF A COMPLEX SHAPE AT IMPACT LOADING

Smetankina N. V., D. Sc. in Engineering, Leading Research Associate

*A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of NAS of Ukraine,
Dm. Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine*

nsmetankina@yandex.ru

Laminated structures are advantageous as compared with homogeneous ones. Hence, they are used widely in mechanical engineering. Calculating dynamic response parameters for impact loading is a key effort in analysing vibrations of composite structures.

A review of recent studies shows that numerical methods are used widely to analyse nonstationary vibrations of laminated structures subjected to impact loads. The finite element method is used most often. The analytical solution of these problems is given only for laminated plates and shells with a canonical plan-view shape. The paper suggests an analytical approach to investigating vibrations of a laminated shell with a complex shape in plan view under impact loading.

A constant-thickness non-closed cylindrical laminated shell is considered. It comprises isotropic layers with constant thickness and various physical and mechanical properties. The number of layers and their layout is arbitrary. In the coordinate surface, it occupies the complex domain limited by boundary Γ . An indenter with a semispherical end of impacts the outer surface of the shell's first layer. The indenter is dropped onto the shell from some height. Contact approach is found by solving Hertzian problem on ball indentation into an elastic semispace.

The behaviour of a laminated shell is described by the first-order theory accounting for transverse shear strain, thickness reduction and normal element rotation inertia in each layer. The equations of motion of a laminated shell affected by impact load, well as the respective boundary conditions on boundary Γ are derived by Hamilton's variational principle. The problem of investigating nonstationary vibrations of a laminated shell subjected to an impact load is reduced to integrating a system of motion equations for a shell with account of boundary conditions jointly with the indenter equation of motion and the condition of joint displacement of the indenter and shell.

The analytical solution of the problem is obtained by the immersion method. According to this method, a non-closed cylindrical laminated shell is immersed into an auxiliary enveloping cylindrical shell with the same composition of layers. It is loaded within domain Ω similar to that for the primary shell. An auxiliary shell is one whose contour shape and boundary conditions yield a simple analytical solution. In this case, the auxiliary shell is a simply supported non-closed cylindrical laminated with rectangular plan-view shape, allowing to find the problem solution as trigonometric series.

To satisfy actual boundary conditions, additional distributed compensating loads, the intensity of which are to be found, are applied to the auxiliary shell over the boundary Γ . The compensating loads appear in the motion equations as curvilinear distributions. Based on the condition of satisfying boundary conditions on the boundary Γ , we form a system of integral equations for determining the intensities of compensating loads. Displacements and loads are expanded in the auxiliary shell domain in trigonometric series for functions satisfying simply supported conditions. The compensating loads are expanded into a series along the boundary Γ . Hence, the system of integral equations is transformed to a system of algebraic equations with respect to the expansion coefficients of the compensating loads. The system of motion equations jointly with the equation of motion of the indenter is integrated by a method of expanding the solution into Taylor's series.

The method potentialities are demonstrated by calculating the strains and stresses in non-closed cylindrical five-layer shells. Experiments are based on the dynamic wide-range strain measurement technique. A good match of theoretical and experimental results confirms the feasibility and effectiveness of the method offered. The developed approach can be easily extended to impulse loading and impact applied to shells of complex shape in plan view with arbitrary boundary conditions.

Key words: laminated shell, complex shape, non-stationary vibrations, impact.

1. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Шаруваті оболонки є одними з основних конструктивних елементів різноманітних конструкцій та приладів, які можуть піддаватися інтенсивним динамічним навантаженням [1, с. 3; 2, с. 290].

Найпоширенішими методами дослідження динамічної поведінки шаруватих оболонок складної форми є чисельні методи, наприклад, методи скінченних та граничних елементів. Теоретичні методи менш розроблені, що пов'язано зі складністю математичних моделей, які описують процес деформування таких оболонок при інтенсивних короткочасних впливах. Для розрахунку напружено-деформованого стану оболонок складної форми в плані також застосовуються методи, засновані на прийомі використання відомих аналітичних розв'язків у простих областях для одержання розв'язків в областях складних конфігурацій, наприклад, метод контурних рядів [3, с. 219]. Але найчастіше за допомогою цих методів розв'язуються задачі про статичне деформування та вільні коливання однорідних оболонок. Питання нестационарної динаміки шаруватих оболонок залишаються недостатньо вивченими, що потребує подальшого розвитку та удосконалення методів розрахунку таких оболонок.

2. АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Розрахунок параметрів динамічного відгуку при ударному навантаженні є важливим напрямком дослідження коливань шаруватих конструкцій. У статті [4, с. 218] за допомогою методу скінченних елементів розглянуті шаруваті кругові пластини при ударному впливі.

Встановлено, що такі пластини мають більш високий опір удару, ніж монолітні пластини рівної маси. Результати скінченно-елементного моделювання добре погоджуються з експериментальними даними.

У роботі [5, с. 1673] запропоновано аналітичну модель ударної взаємодії ударника та шаруватих шарнірно опертих прямокутних панелей. Переміщення, напруження та деформації в шарах обчислювалися методом скінченних елементів.

У статті [6, с. 395] досліджено перехідні процеси в шарнірно опертих шаруватих композитних циліндричних та сферичних оболонкових панелях при низькошвидкісному ударі в гідротеплових середовищах. Скінченно-елементний аналіз проведено в рамках геометрично нелінійної теорії. Модель зіткнення заснована на модифікованому контактному законі Герца.

3. НЕВИРІШЕНІ ПРОБЛЕМИ ТА ЦІЛІ СТАТТІ

Аналіз наведених робіт дозволяє зробити висновок, що для дослідження нестационарних коливань шаруватих конструкцій при ударному навантаженні найчастіше використовуються чисельні методи, а саме, метод скінченних елементів. В аналітичному вигляді розв'язок таких задач одержано тільки для шаруватих пластин і оболонок канонічної форми в плані. Отже, розробка методів розв'язання задач нестационарної динаміки шаруватих оболонок зі складною формою плану, що дозволяють подати розв'язок в аналітичній формі, є актуальним питанням.

У статті [7, с. Р. 051004-5] розглянуто задачу про нестационарні коливання шаруватої пластини складної форми в плані при ударному навантаженні. У цій роботі запропоновано метод розв'язання задачі про нестационарні коливання шаруватих незамкнених циліндричних оболонок складної форми в плані, який дає можливість одержати розв'язок задачі у вигляді розвинень у тригонометричні ряди.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ПРО УДАРНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ШАРУВАТОЇ ОБОЛОНКИ

Розглядається шарувата незамкнена циліндрична оболонка радіуса R . Оболонка складається з I ізотропних шарів постійної товщини h_i та займає на координатній поверхні (зовнішня поверхня першого шару) область Ω , що обмежена контуром $\Gamma: x_\Gamma = x(s), y_\Gamma = y(s)$ (s – поточна довжина дуги). Координата x змінюється вздовж твірної, координата y – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки. Додатний напрям осі Oz збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Удар наноситься індентором масою M з напівсферичною кінцевою частиною радіуса r , який скидається з висоти H на зовнішню поверхню першого шару оболонки. Швидкість його зіткнення з оболонкою визначається за формулою:

$$V_z = \sqrt{2gH},$$

де g – прискорення вільного падіння. Розглядається низькошвидкісний удар, коли деформації оболонки залишаються пружними.

Передбачається, що область взаємодії індентора та оболонки є круг радіуса $a(t)$ із центром у точці з координатами (x_0, y_0) . Радіус області контакту обчислюється за формулою:

$$a(t) = \left[\frac{3}{16} F(t)(\theta_1 + \theta) \right]^{1/3},$$

де

$$\theta_1 = \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}, \quad \theta = \frac{4(1-\nu^2)}{E};$$

$F(t)$ – сила контактної взаємодії індентора й оболонки, t – час, E_1 та ν_1 – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу першого шару оболонки, E та ν – відповідні характеристики матеріалу індентора.

Рівняння руху індентора має вигляд:

$$M z_{,tt} = M g - F(t), \quad z(0) = 0, \quad z_{,t}(0) = V_z, \quad (1)$$

де $z = z(t)$ – переміщення індентора.

Умова сумісності переміщення індентора й оболонки записується в вигляді:

$$w_0 + \alpha_c - z \geq 0. \quad (2)$$

Тут α_c – контактне зближення індентора й оболонки в точці дотику (x_0, y_0) , $w(x_0, y_0, t)$ – прогин зовнішньої поверхні першого шару оболонки в точці (x_0, y_0) .

Контакт індентора й оболонки відбувається при перетворенні нерівності (2) на рівність

$$w_0 + \alpha_c - z = 0. \quad (3)$$

Контактне зближення α_c визначається з розв'язку задачі Герца [8, с. 365] про вдавнення кулі в пружний півпростір

$$\alpha = \kappa_1 F^{2/3},$$

де

$$\kappa_1 = \left[\frac{9(\theta_1 + \theta)^2}{256r} \right]^{1/3}.$$

5. МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині та інерції обертання нормального елемента в межах кожного шару:

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \overline{1, I}, \quad (4)$$

де $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$; $u_k = u_k(x, y, t)$ ($k = 1, 2, 3$) – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$ ($k = 1, 2$) – кути повороту нормального елемента в i -му шарі навколо координатних осей Ox і Oy ; $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$ – обтиснення нормального елемента в i -му шарі.

З варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [9, с. 109] одержимо рівняння руху оболонки під впливом навантаження \mathbf{P}

$$[\mathbf{\Omega}^p] \mathbf{U}_{,tt} - [\mathbf{\Lambda}] \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0, \quad (5)$$

і систему граничних умов на контурі Γ

$$[\mathbf{B}^\Gamma] \mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (6)$$

де $[\mathbf{Q}^p]$ та $[\mathbf{A}]$ – симетричні матриці; $\mathbf{U} = \{u_j(x, y, t)\}$, $\mathbf{P}^\Gamma = \{p_j^\Gamma(x, y, t)\}$, $\mathbf{P} = \{p_j(x, y, t)\}$,
 $p_j = 0, j \neq 3, p_3 = p_z(x, y, t)$; p_z – контактний тиск, $B_{ij}^\Gamma = \chi_i^1 B_{ij}^u + \chi_i^2 B_{ij}^\sigma$, $i, j = \overline{1, 3I+3}$.

Вигляд елементів матриці $[\mathbf{B}^\Gamma]$ та вектора граничних навантажень \mathbf{P}^Γ залежить від граничних умов на контурі оболонки. Надаючи різних значень коефіцієнтам χ_i^1 та χ_i^2 (6), можна моделювати необхідні граничні умови на контурі оболонки.

Метод розв'язання задачі (5), (6) базується на методі занурення заданої складної області в область канонічної форми [9, с. 149]. Вихідна оболонка занурюється в допоміжну оболонку, форма і граничні умови якої обираються так, щоб розв'язок задачі можна було одержати в аналітичній формі. Розв'язок має найбільш простий вигляд, якщо як допоміжну обрати прямокутну в плані шарнірно оперту оболонку. Тоді розв'язок вихідної задачі можна записати у вигляді розвинень у тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови шарнірного опирання.

Щоб забезпечити виконання вихідних граничних умов (6), до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження $\mathbf{Q}^{\text{comp}} = \{q_j^{\text{comp}}(x, y, t)\}$, $j = \overline{1, 3I+3}$, які неперервно розподілені вздовж контуру Γ . Так, задача про коливання оболонки складної форми з довільними граничними умовами зводиться до задачі про коливання прямокутної в плані шарнірно опертої оболонки. Компенсуючі навантаження входять у рівняння руху допоміжної оболонки у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{3I+3} \int_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) \delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma) ds, \quad j, k = \overline{1, 3I+3},$$

де $\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)$ – двовимірна δ -функція.

Елементи матриці ζ_{jk} , що не дорівнюють нулю, мають вигляд

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{3+i, 3+i} = \zeta_{3+I+i, 3+I+i} = y'_\Gamma, \quad \zeta_{33} = \zeta_{3+2I+i, 3+2I+i} = 1,$$

$$\zeta_{12} = \zeta_{3+i, 3+I+i} = x'_\Gamma, \quad \zeta_{21} = \zeta_{3+I+i, 3+i} = -x'_\Gamma, \quad i = \overline{1, I},$$

$$\text{де } x'_\Gamma = \frac{dx_\Gamma}{ds}, \quad y'_\Gamma = \frac{dy_\Gamma}{ds}.$$

З умови задоволення вихідних граничних умов на контурі Γ (6) формується система інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі компенсуючі навантаження,

$$[\mathbf{B}^\Gamma] \mathbf{U}[\mathbf{Q}^{\text{comp}}(x, y, t)] = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (7)$$

Метод розв'язання системи (7) полягає в тому, що функції переміщень (4), заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в подвійні тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови допоміжної оболонки:

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y),$$

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{\text{comp}}(t) C_{jmn}(x, y), \quad j = \overline{1, 3I+3},$$

де

$$C_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad C_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}, \quad C_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

$$C_{3+i mn} = C_{1mn}, \quad C_{3+I+i mn} = C_{2mn}, \quad C_{3+2I+i mn} = C_{3mn},$$

$$p_{jmn}(t) = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B p_j(t) C_{jmn}(x, y) dx dy,$$

$$p_{jmn}^{\text{comp}}(t) = \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) C_{jmn}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) ds;$$

$$j = \overline{1, 3I+3}, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, m^*}, \quad n = \overline{1, n^*};$$

A – довжина твірної допоміжної оболонки, B – довжина дуги цієї оболонки.

Розв'язок рівняння руху індентора (1) одержимо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Далі функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру Γ

$$q_j^{\text{comp}}(s, t) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{j\alpha\mu}(t) b_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 3I+3},$$

де

$$b_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad b_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)], \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \oint_{\Gamma} d\tilde{s}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi, \quad \mu = \overline{0, \mu^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови на контурі Γ (6), також розвиваються в ряд уздовж контуру Γ . У результаті система (7) на кожному кроці за часом перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру Γ . Система рівнянь руху (5) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [9, с. 144]. Отже, після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду:

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \pi_{jk}^{mn} \sum_{l=1}^{3I+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \theta_{kl\alpha\mu}^{mn} q_{l\alpha\mu}(t) + \varepsilon_{jmn}(t) \right) C_{jmn}(x, y), \quad j = \overline{1, 3I+3},$$

де π_{jk}^{mn} , $\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}$, ε_{jmn} – елементи матриць, отриманих у результаті чисельних перетворень.

Після обчислення компенсуючих навантажень визначаються переміщення (4), деформації і напруження у шарах вихідної оболонки.

6. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

З метою підтвердження вірогідності чисельних результатів, проведено порівняння розрахункових і експериментальних даних для п'ятишарової вільно опертої оболонки при ударі індентором з органічного скла. Контур оболонки описаний рівняннями кривих Ламе

$$\Gamma: \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c + \left(\frac{y}{\beta}\right)^c = 1,$$

де $\alpha = 0,3$ м, $\beta = 0,14$ м, $c = 10$. Оболонка має такі геометричні параметри: $R = 5$ м, $h_1 = 5$ мм, $h_2 = 3$ мм, $h_3 = 15$ мм, $h_4 = 2$ мм, $h_5 = 20$ мм.

Шари мають такі механічні характеристики: $E_i = 6,12 \cdot 10^4$ МПа, $i = 1, 3, 5$, $E_i = 280$ МПа, $i = 2, 4$ (модулі пружності); $\nu_i = 0,22$, $i = 1, 3, 5$, $\nu_i = 0,39$, $i = 2, 4$ (коефіцієнти Пуассона); $\rho_i = 2500$ кг/м³, $i = 1, 3, 5$, $\rho_i = 1200$ кг/м³, $i = 2, 4$ (густина матеріалів шарів).

Індентор має такі механічні та геометричні характеристики: $E = 5,7 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 0,38$, $\rho = 1200$ кг/м³ (густина матеріалу індентора), $M = 0,215$ кг, $r = 0,03$ м. Висота скидання індентора $H = 1$ м.

Удар завдається по зовнішній поверхні першого шару в точку з координатами (x_0, y_0) . Деформація обчислюється та вимірюється в точці з такими ж координатами на зовнішній поверхні п'ятого шару. Експериментальні дані одержані методом динамічної широкосмугової тензометрії [7, с. 051004-6]. Теоретична та експериментальна залежності добре узгоджуються між собою, що підтверджує вірогідність результатів розрахунку.

На рис. 1 показані теоретична (суцільна лінія) і експериментальна (штрихова лінія) залежності деформації ε_x^5 оболонки від часу. Також на рисунку наведено розрахункову схему оболонки.

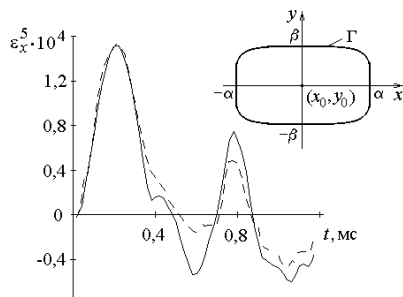


Рис. 1. Деформація ε_x^5 у п'ятишаровій оболонці при ударі

Як чисельний приклад, розглянуто коливання п'ятишарової вільно опертої оболонки. Форма плану оболонки наведена на рис. 2. Механічні характеристики шарів співпадають з характеристиками попередньо розглянутої оболонки. Оболонка має такі геометричні параметри: $R = 2$ м, $l_1 = 0,62$ м, $l_2 = 0,68$ м, $l_3 = 0,64$ м, $l_4 = 0,75$ м, $R_1 = 0,05$ м, $R_2 = 0,03$ м, $R_3 = 0,04$ м, $R_4 = 0,045$ м, $h_1 = 5$ мм, $h_2 = h_4 = 4$ мм, $h_3 = 15$ мм, $h_5 = 6$ мм.

Удар завдається індентором з органічного скла масою $M = 0,123$ кг та радіусом головної частини $r = 0,03$ м по зовнішній поверхні першого шару, висота скидання індентору $H = 1$ м.

На рис. 3 наведені залежності напружень σ_x^5 (суцільна лінія) та σ_y^5 (штрихова лінія) від часу в точці C (рис. 2) на зовнішній поверхні п'ятого шару.

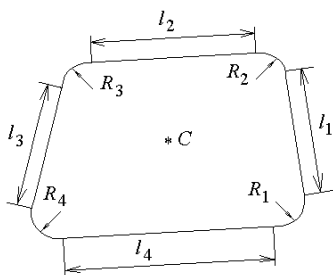


Рис. 2. Схема плану оболонки

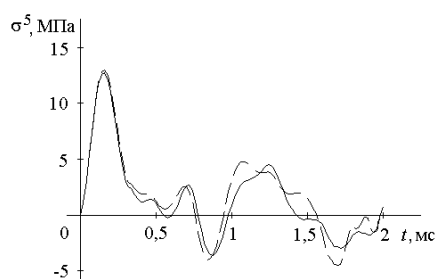


Рис. 3. Змінення в часі напружень

7. ВИСНОВКИ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ Й НАПРЯМКИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розроблено метод дослідження нестационарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій п'ятишарових вільно опертих оболонок при ударі інтенсором з напівсферичною кінцевою частиною. Добре узгодження теоретичних і експериментальних даних підтвердило вірогідність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу.

Надалі метод можна застосувати до розрахунку оболонок з різною формою плану та різними граничними умовами при дослідженні коливань оболонкових елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією інтенсивних швидкоплинних навантажень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Librescu L. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey / L. Librescu, T. Hause // *Composite Structures*. – 2000. – Vol. 48, No. 1. – P. 1-17.
2. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells / E. Carrera // *Appl. Mech. Rev.* – 2003. – Vol. 56, No. 3. – P. 287-308.
3. Zielinski A. P. A contour series method applied to shells / A.P. Zielinski // *Thin-Walled Structures*. – 1985. – No. 3. – P. 217-229.
4. The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading / G.J. McShane, D.D. Radford, V.S. Deshpande, N.A. Fleck // *Europ. J. Mechanics -A/Solids*. – 2006. – Vol. 25, No. 2. – P. 215-229.
5. Malekzadeh K. Analytical prediction of low-velocity impact response of composite sandwich panels using new TDOF spring-mass-damper model / K. Malekzadeh, M.R. Khalili, R.K. Mittal // *J. Composite Materials*. – 2006. – Vol. 40, No. 18. – P. 1671-1689.
6. Naidu N. V. S. Nonlinear impact behaviour of laminated composite shells in hygrothermal environments / N.V.S. Naidu, P.K. Sinha // *Int. J. Crashworthiness*. – 2005. – Vol. 10, No. 4. – P. 389-402.
7. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, S.Yu. Sotrikhin, V.G. Yareschenko // *Trans. ASME. J. Appl. Mechanics*. – 2008. – Vol. 75, No. 5. – P. 051004-1-051004-9.
8. Nosier A. Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory / A. Nosier, R.K. Kapania, J.N. Reddy // *Computational Mechanics*. – 1994. – No. 13. – P. 360-379.
9. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкина. – Харьков : Міськдрук, 2011. – 376 с.

REFERENCE

1. Librescu, L. and Hause, T. (2000), "Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey", *Composite Structures*, vol. 48, no. 1, pp. 1-17.
2. Carrera, E. (2003), "Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells", *Appl. Mech. Rev.*, vol. 56, no. 3, pp. 287-308.
3. Zielinski, A.P. (1985), "A contour series method applied to shells", *Thin-Walled Structures*, no. 3, pp. 217-229.
4. McShane, G.J., Radford, D.D., Deshpande, V.S. and Fleck, N.A. (2006), "The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading", *Europ. J. Mechanics - A/Solids*, vol. 25, no. 2, pp. 215-229.

5. Malekzadeh, K., Khalili, M.R., Mittal, R.K. and Malekzadeh, K. (2006), "Analytical prediction of low-velocity impact response of composite sandwich panels using new TDOF spring-mass-damper model", *J. Composite Materials*, vol. 40, no. 18, pp. 1671-1689.
6. Naidu, N.V.S. and Sinha, P.K. (2005), "Nonlinear impact behaviour of laminated composite shells in hygrothermal environments", *Int. J. Crashworthiness*, vol. 10, no. 4, pp. 389-402.
7. Smetankina, N.V., Shupikov, A.N., Sotrikhin, S.Yu. and Yareschenko, V.G. (2008), "A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment", *Trans. ASME. J. Appl. Mechanics*, vol. 75, no. 5, pp. 051004-1-051004-9.
8. Nosier, A., Kapania, R.K. and Reddy, J.N. (1994), "Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory", *Computational Mechanics*, no. 13, pp. 360-379.
9. Smetankina, N.V. (2011), *Nestatsionarnoye deformovaniye, termouprugost i optimizatsiya mnogosloynnykh plastin i obolochek* [Nonstationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells], Miskdruk, Kharkov, Ukraine.

УДК 539.37

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОПЛАСТИЧНІЙ КОНІЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ

¹Сторожук Є. А., д. ф.-м. н., професор, ¹Чернишенко І. С., д. т. н., професор,
²Харенко С. Б.

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
буль. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна

²Національний університет державної податкової служби України,
буль. Університетська, 31, Ірпінь, 08201, Україна

stevan@ukr.net

Дано постановку і розвинуто методику чисельного розв'язання фізично нелінійних задач для конічних оболонок з двома круговими отворами при дії статичного навантаження. Досліджено пружнопластичний стан конічної оболонки, послабленої двома різними круговими отворами і навантаженої рівномірним внутрішнім тиском. Вивчено вплив пластичних деформацій і геометричних параметрів на концентрацію напружень в області отворів.

Ключові слова: конічна оболонка, кругові отвори, внутрішній тиск, пружнопластичний стан, концентрація напружень, скінченний елемент.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

¹Сторожук Е. А., д. ф.-м. н., профессор, ¹Чернышенко И. С., д. т. н., профессор,
²Харенко С. Б.

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

²Национальный университет государственной налоговой службы Украины,
ул. Университетская, 31, Ирпень, 08201, Украина

stevan@ukr.net

Дана постановка и развита методика численного решения физически нелинейных задач для конических оболочек с двумя круговыми отверстиями при действии статического нагружения. Исследовано упругопластическое состояние конической оболочки, ослабленной двумя разными круговыми отверстиями и