

9. Zhao, Y.H. and Weng, G.J. (1990), "Effective Elastic Moduli of Ribbon-Reinforced Composite", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 112, pp. 158-167.
10. Pasternak, Ya.M. and Sulim, G.T. (2014), "Plane Problem of Elasticity for an Anisotropic Body with Doubly Periodic Systems of Thin Inhomogeneities", *Mechanics of Solids*, vol. 49, no. 2, pp. 162-174.
11. Pan'kov, A.A. (2012), "Elektromagnitoupругie polya i effektivnye svojstva p'ezokompozitov s kvaziperiodicheskimi strukturami", *Mekhanika kompositnykh materialov i konstrukziy*, vol. 18, no. 3, p. 345-358.
12. Kaloerov, S.A., Baeva, A.I. and Boronenko, O.I. (2007), "Dvumernye zadachi elektro i magnitoupругosti dlya mnogosvyaznykh oblastey", Yugo-Vostok, Donetsk.
13. Fil'shtinskij, L.A., Barzdokas, D.I. and Fil'shtinskij, M.L. (2010), "Aktual'nye problemy svyazannykh fizicheskikh poley v deformiruemykh telakh. Matematicheskiy apparat fizicheskikh i inzhenernykh nauk", vol. 1, NITS RKHD, Moscow, Izhevsk.

УДК 539.377

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ДВОХЕЛЕМЕНТНОЇ ПРИЗМАТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З РІЗНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Хапко Б. С., к. ф.-м. н.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, м. Львів, 79060, Україна*

bogdan.khapko@gmail.com

Досліджено термонапружений стан тонкої призматичної оболонки спричинений різницею температур довкілля, і залежних від координати коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях. Задачу теплопровідності для оболонки зведено до взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра та Фредгольма другого роду. Побудовано числову схему розв'язку інтегральних рівнянь з використанням методу квадратурних формул. Для знаходження функції напружень та прогину використано скінченні інтегральні перетворення Фур'є. Наведено результати числового аналізу розподілу температурних характеристик, прогину, моментів та зусиль.

Ключові слова: теплопровідність, оболонка, лам, кусково-постійні коефіцієнти тепловіддачі, прогин, зусилля, моменти.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С РАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ТЕПЛОТДАЧИ

Хапко Б. С., к. ф.-м. н.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
ул. Научная, 3б, г. Львов, 79060, Україна*

bogdan.khapko@gmail.com

Исследовано термонапряжённое состояние тонкой призматической оболочки, вызванное разницей температур окружающей среды и зависимость от координаты коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях. Задачу теплопроводности для оболочки сведено к взаимосвязанной системе интегральных уравнений с интегральными операторами Вольтерра и Фредгольма второго рода. Построено числовую схему решения интегральных уравнений с использованием метода квадратурных формул. Для нахождения функции напряжений и прогиба использовано конечные интегральные преобразования Фурье. Приведены результаты численного анализа распределения температурных характеристик, прогиба, моментов и усилий.

Ключевые слова: теплопроводность, оболочка, излом, кусочно-постоянные коэффициенты теплоотдачи, изгиб, усилия, моменты.

THERMOSTRESSED STATE OF PRISMATIC SHELL COMPOSED OF TWO ELEMENTS WITH DIFFERENT HEAT-TRANSFER COEFFICIENTS

Khapko B. S., Ph.D. in Physics and Maths

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
The National Academy of Sciences of Ukraine,
Naukova str., 3b, L'viv, 79060, Ukraine*

bogdan.khapko@gmail.com

The problem of determining the thermostressed state in a thin shallow prismatic shell composed of two flat elements is considered taking into account the convective heat exchange with the surrounding environment at front surfaces of the shell. The heat-transfer coefficients at the front surfaces are coordinate-dependent. With the use of the propositions of heat conduction in thin elements of constructions, a model for describing temperature field in a prismatic shell, caused by the difference between the temperatures of the surrounding environment at the front surfaces, is proposed. Utilizing the method of variation of constants, an approach for reducing the heat conduction boundary value problem for the shell with a break to a system of integral equations with Volterra and Fredholm integral operators of the second kind for the functions that are linear combinations of the integral characteristics of the shell temperature (the mean temperature and the temperature moment) is developed. A numerical scheme for solving the system of integral equations is constructed using the quadrature method. In particular, Simpson's quadrature formulae are utilized to evaluate the integrals, and the system of integral equations with Volterra and Fredholm integral operators of the second kind is reduced to a system of linear algebraic equations. To determine the thermostressed state in the shallow prismatic shell, the complex stress function is given through the stress function and the deflection. The shell with breaks is simply supported by rigid vertical diaphragms at its edges. The edges with the break of the mid-surface are thermally insulated, and the temperature of the surrounding environment is zero at the other edges. The finite Fourier integral transforms are employed to determine the stress function and the deflection. The numerical results for distributions of the mean temperature, temperature moment, deflection, moments and stresses are given for various values of the heat-transfer coefficient at the bottom front surface of the second element of the shell. It is revealed that a decrease in the heat-transfer coefficient up to zero (the case of thermal insulation) leads to a decrease in the mean temperature, bending moments and the absolute values of deflection and stresses, which is accompanied by shift of their maximum values towards the fold where the heat-transfer coefficient is constant. However, the values of the temperature moment increase, and this increase is especially noticeable in the region where the heat-transfer coefficient varies.

Key words: heat conduction, shell, break, piecewise constant heat-transfer coefficients, deflection, stresses, moments.

ВСТУП

Тонкостінні елементи конструкцій з нерегулярними серединними поверхнями використовують у будівельній індустрії та техніці. До таких слід віднести конструкції у вигляді пологих оболонок, складених з плоских елементів. Надання складок є одним зі способів збільшення їхньої загальної жорсткості, особливо, якщо матеріал, з якого побудоване тіло, має невеликий модуль пружності. Це є раціональні просторові накриття промислових і цивільних споруд, а також окремі елементи конструкцій машинобудівної техніки, які працюють в умовах нерівномірного теплового навантаження. Такі конструкції по лініях спряження мають злами серединної поверхні. При їх розрахунку можна використовувати метод поділу конструкції на окремі елементи, але це призводить до громіздких виразів для рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, та умов на контурі і необхідності спростити розв'язки для окремих елементів по поверхнях поділу.

Теоретичні дослідження пологих оболонок з ламаною формою серединної поверхні для будівельної механіки, під дією силового навантаження розроблялися в роботах [1-4], а під дією теплового навантаження – в [5-8]. В [2] досліджувались пружні пластинчаті системи, які мали розриви жорсткості, кривини, а також навантаження. Для опису нерегулярної поверхні одним рівнянням і для отримання її диференціальних характеристик, у роботі [3] використовували елементи теорії узагальнених функцій. Термонапружений стан пологої призматичної оболонки за різних кутів зламу досліджено в роботі [7]. Рівняння теплопровідності для тонкої оболонки зі зламами вздовж координатних ліній за змінних коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь отримано в [8].

Задачі теплопровідності і термoprужності для пластин і оболонок, які перебувають під дією теплового навантаження за різних постійних коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих

Фізико-математичні науки

Отформатовано: Цвет шрифта: Авто

Отформатовано: украинский

Отформатовано: украинский

Отформатовано: украинский

Отформатовано: украинский

Отформатовано: украинский

Отформатовано: украинский

Отформатовано: украинский

поверхнях, а також для кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі, але однакових на цих поверхнях, розглядались у працях [9-13]. Врахування впливу кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі на різних лицевих поверхнях на напружено-деформований стан пластинок та пологих оболонок досліджено в роботах [14-16].

Це дослідження присвячене розрахунку складеної призматичної пологої оболонки з двох плоских елементів за теплового навантаження. Для розрахунку термопружного стану пологих оболонок з ломаною поверхнею, як єдиного цілого, використали теорію узагальнених функцій і метод кінцевих інтегральних перетворень Фур'є. У цій роботі запропоновано спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для оболонки зі зломом до системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольєрра та Фредгольма другого роду відносно функцій, що є лінійними комбінаціями інтегральних характеристик температури. Виявлено збурення температурного поля і згинних моментів на лініях зламів та зменшення прогину та згинних моментів за зменшення коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента оболонки.

ФОРМУЛОВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо тонку пологу призматичної форми оболонку товщиною $2h$ зі сторонами r і b . На лицевих поверхнях $z = \pm h$ кожного з двох пластинчатих елементів, з яких утворена оболонка (рис. 1), відбувається конвективний теплообмін з середовищем температури t_c^\pm за різних коефіцієнтів тепловіддачі з них

$$\mu^\pm(x) = \mu_1^\pm + (\mu_2^\pm - \mu_1^\pm) S_-(x - x_1),$$

де $S_-(x - x_1) = \begin{cases} 1, & x \geq x_1, \\ 0, & x < x_1 \end{cases}$ – функція Гевісайда.

Серединну поверхню оболонки опишемо рівнянням $z(x, y) = \text{tg } \alpha_{01} x - (\text{tg } \alpha_{01} - \text{tg } \alpha_{02})(x - x_1 + |x - x_1|)/2$, де $\text{tg } \alpha_{01}$, $\text{tg } \alpha_{02}$ – кутові коефіцієнти направляючої першого (1) і другого (2) елементів; $x = x_1$ – лінія спряження двох елементів (лінія зламу); $b = x_1 (\text{tg } \alpha_{02} - \text{tg } \alpha_{01}) / \text{tg } \alpha_{02}$; $\theta = \pi - \alpha_{02} + \alpha_{01}$ – кут зламу, який приймаємо малим. Диференціальні характеристики середньої поверхні пологої оболонки, коли її грані мають однакові розміри, запишемо так [5]: $k_1 = -2 \text{tg } \alpha_{01} \delta(x - x_1)$, $k_{12} = 0$, $k_2 = 0$. Оболонка на торцях $x = 0, b$ обмінюється теплом з зовнішнім середовищем температури t_c^1 і t_c^2 та коефіцієнтами тепловіддачі \bar{b}_1 і \bar{b}_2 відповідно. На торцях $y = 0, r$ вона теплоізолювана. Згідно з гіпотезою про лінійний за товщиною призматичної оболонки розподіл температури [11],

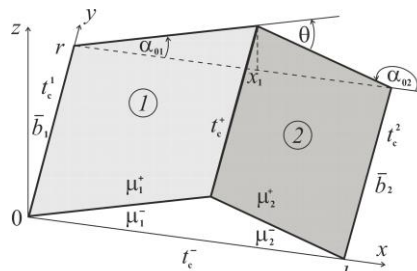


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

$t(x, z) = T_1(x) + \frac{z}{h} T_2(x)$

стаціонарне температурне поле в ній виражається через інтегральні температурні характеристики – середню температуру $T_1(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t(x, z) dz$ і температурний момент $T_2(x) = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t(x, z) dz$, які визначаються із системи диференціальних рівнянь [8]:

$$h^2 \frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} - \eta_1^+ T_1(x) - \eta_1^- T_2(x) = [(\eta_2^+ - \eta_1^+) T_1(x) + (\eta_2^- - \eta_1^-) T_2(x)] S_-(x - x_1) +$$

Отформатировано: украинский

Отформатировано: украинский

Отформатировано: украинский

Отформатировано: украинский

Отформатировано: украинский

Отформатировано: украинский

Отформатировано: украинский

Отформатировано: не выше на / ниже на

$$\begin{aligned}
& + \frac{h}{2} \theta \delta(x - x_1) T_2(x) - (\eta_1^+ t_1 + \eta_1^- t_2) - [(\eta_2^+ - \eta_1^+) t_1 + (\eta_2^- - \eta_1^-) t_2] S_-(x - x_1), \\
& h^2 \frac{d^2 T_2(x)}{dx^2} - 3(1 + \eta_1^+) T_2(x) - 3\eta_1^- T_1(x) = 3[(\eta_2^+ - \eta_1^+) T_2(x) + (\eta_2^- - \eta_1^-) T_1(x)] S_-(x - x_1) + \\
& + \frac{3h}{2} \theta \delta(x - x_1) T_1(x) - 3(\eta_1^+ t_2 + \eta_1^- t_1) - 3[(\eta_2^+ - \eta_1^+) t_2 + (\eta_2^- - \eta_1^-) t_1] S_-(x - x_1) \quad (1)
\end{aligned}$$

за крайових умов

$$\frac{dT_l}{dx} - b_1(T_l - T_{l1}^c) = 0, \text{ при } x = 0; \frac{dT_l}{dx} + b_2(T_l - T_{l2}^c) = 0, \text{ } x = b; \quad l = 1, 2. \quad (2)$$

Тут $T_{l1}^c = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_c' dz$, $T_{l2}^c = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z t_c' dz$, $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$, $t_{1,2}(x) = \frac{t_c^+ \pm t_c^-}{2}$, $\eta_i^\pm = \bar{\mu}_i^+ \pm \bar{\mu}_i^-$; $\bar{\mu}_i^+ = h\mu_i^+/2\lambda$, $\bar{\mu}_i^- = h\mu_i^-/2\lambda$ – безрозмірні коефіцієнти тепловіддачі на лицевих поверхнях $z = h$ та $z = -h$ відповідно, $b_l = hb_l/\lambda$ – безрозмірні коефіцієнти тепловіддачі на торцях $x = 0$ та $x = b$ відповідно, λ – коефіцієнт теплопровідності.

Увівши безрозмірну координату $\eta = x/h$ і заміни [11]

$$\lambda_0 T_1 = \lambda_2 (F_1 - \lambda_1 F_2), \quad \lambda_0 T_2 = \lambda_2 F_2 - F_1, \quad \eta_1 = x_1/h, \quad (3)$$

систему диференціальних рівнянь (1) частково розділимо. У лівій частині першого рівняння отриманої системи залишимо шукану функцію $F_1(\eta)$, а другого – $F_2(\eta)$. У правій частині цих рівнянь перенесемо члени, до яких входять функції $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$, помножені на функцію Гевісайда, або Дірака. Функції $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$ у правих частинах отриманих рівнянь вважатимемо відомими. Тоді кожне з цих диференціальних рівнянь розв'язуємо методом варіації сталої. Врахувавши перетворені крайові умови (2), визначимо сталі інтегрування, підставляючи які в знайдені загальні розв'язки кожного із рівнянь, отримаємо систему інтегральних рівнянь. До правої частини цих рівнянь входять невідомі функції $F_1(\eta_1)$, $F_2(\eta_1)$. Беручи функції $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$ у знайдених інтегральних рівняннях на лінії зламу $\eta = \eta_1$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь. Розв'язуючи цю систему і підставляючи знайдені функції $F_1(\eta_1)$, $F_2(\eta_1)$ в інтегральні рівняння, отримаємо систему інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерра і Фредгольма другого роду для визначення невідомих функцій $F_1(\eta)$ і $F_2(\eta)$ у вигляді:

$$\begin{aligned}
& F_l(\eta) - \int_0^p [R_{l1}(\eta, s) F_1(s) + R_{l2}(\eta, s) F_2(s)] S_-(s - \eta_1) ds - \\
& - \frac{1}{a_l} \int_0^\eta [d_{l1} F_1(s) + d_{l3} F_2(s)] S_-(s - \eta_1) sh[a_l(\eta - s)] ds = R_{l3}(\eta), \quad l = 1, 2. \quad (4)
\end{aligned}$$

Позначення R_{l1}, R_{l2}, R_{l3} через їх громіздкість тут не наведені. Вирази для сталих a_l, d_{l1}, d_{l3} можна знайти у [849]. Розв'язуючи систему інтегральних рівнянь (4) методом квадратурних формул [17], із співвідношень (3) знаходимо середню температуру $T_1(\eta)$ і температурний момент $T_2(\eta)$, необхідні для визначення термонапруженого стану в розглядуваній оболонці.

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ОБОЛОНКИ

Для визначення термонапруженого стану пологої призматичної оболонки зі зломом на лінії $\eta = \eta_1$ комплексну функцію напружень $\Phi(\eta, \xi)$ подамо через функцію напружень $\varphi(\eta, \xi)$ та прогин $w(\eta, \xi)$ у вигляді $\Phi(\eta, \xi) = w(\eta, \xi) + i\varphi(\eta, \xi)/E_0$. Вважаємо, що на торцях $\eta = 0$ і $\eta = p$ оболонка вільно оперта на жорсткі вертикальні діафрагми та на них задана нульова температура середовища, для цього в граничних умовах (2) b_l спрямуємо у нескінченність та покладемо $T_{l1}^c = 0$ і $T_{l2}^c = 0$, $l = 1, 2$. Тоді комплексна функція напружень $\Phi(\eta, \xi)$ визначається із ключового рівняння [5]

$$\left(\frac{d^4}{d\eta^4} + \frac{d^4}{d\eta^2 d\xi^2} + \frac{d^4}{d\xi^4} \right) \Phi(\eta, \xi) + ia^2 h^2 \theta \frac{\partial^2 \Phi(\eta, \xi)}{\partial \xi^2} \delta(\eta - \eta_1) = -\alpha_t a^2 h^2 \left(i \frac{d^2 T_1(\eta)}{d\eta^2} + \nu_0 \frac{d^2 T_2(\eta)}{d\eta^2} \right), \quad (5)$$

за крайових умов

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \text{ і } \eta = p,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 0 \text{ і } \xi = d, \quad (6)$$

де $E_0 = \frac{2Eh}{a^2}$, $a^2 = \frac{1}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}$, $\nu_0 = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}$, E – модуль Юнга, α_t , ν – коефіцієнти лінійного температурного розширення і Пуассона відповідно, $\xi = y/h$, $d = r/h$.

До правих частин рівняння (5) входять другі похідні від температурних характеристик $\frac{d^2 T_1}{d\eta^2}$ і $\frac{d^2 T_2}{d\eta^2}$. Визначимо їх з системи рівнянь (1) та підставимо в рівняння (5), у результаті отримаємо

$$\left(\frac{d^4}{d\eta^4} + \frac{d^4}{d\eta^2 d\xi^2} + \frac{d^4}{d\xi^4} \right) \Phi(\eta, \xi) + ia^2 h^2 \theta \frac{\partial^2 \Phi(\eta, \xi)}{\partial \xi^2} \delta(\eta - \eta_1) = -\alpha_t a^2 h^2 \{ i [R_1(\eta) - R_2(\eta) S_-(\eta - \eta_1) + \theta_1 \delta(\eta - \eta_1) T_2(\eta_1)] + \nu_0 [R_3(\eta) - R_4(\eta) S_-(\eta - \eta_1) + 3\theta_1 \delta(\eta - \eta_1) T_1(\eta_1)] \}. \quad (7)$$

Тут $\theta_1 = \frac{\theta}{2}$,

$$R_1(\eta) = \eta_1^+ (T_1(\eta) - t_1) + \eta_1^- (T_2(\eta) - t_2), \quad R_2(\eta) = (\eta_2^+ - \eta_1^+) (T_1(\eta) - t_1) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (T_2(\eta) - t_2),$$

$$R_3(\eta) = 3(1 + \eta_1^+) (T_2 - t_2) + 3\eta_1^- (T_1 - t_1) + 3t_2,$$

$$R_4(\eta) = 3[(\eta_2^+ - \eta_1^+) (T_2 - t_2) + (\eta_2^- - \eta_1^-) (T_1 - t_1)].$$

Для розв'язання крайової задачі (7), (6) скористаємося скінченними інтегральними перетвореннями Фур'є [7,8]:

Отформатировано: не выше на / ниже на

Отформатировано: украинский

Отформатировано: русский

$$\bar{\Phi}^*(\alpha_m, \beta_n) = \frac{1}{pd} \int_0^p \int_0^d \Phi(\eta, \xi) \sin(\beta_n \xi) \sin(\alpha_m \eta) d\xi d\eta, \quad (8)$$

де $\alpha_m = \frac{m\pi}{l}$ і $\beta_n = \frac{n\pi}{d}$; $n, m = \overline{1, \infty}$.

Застосувавши інтегральні перетворення (8) по координаті η і ξ до рівняння (7) та задовольнивши крайові умови (6), і розв'язавши отриману рівність відносно зображення $\bar{\Phi}^*(\alpha_m, \beta_n)$, одержимо

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^*(\alpha_m, \beta_n) = & i \frac{l\beta_n^2 h^2 a^2 \theta}{l(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \Phi^*(\eta_1, \beta_n) \sin \alpha_m \eta_1 - \\ & - \frac{\alpha_l a^2 h^2 [(-1)^{n+1} + 1]}{d\beta_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \left\{ i \left[\theta_1 T_2(\eta_1) \sin \alpha_m \eta_1 + \frac{1}{p} \int_0^p \{R_1(\eta) - R_2(\eta) S_-(\eta - \eta_1)\} \sin \alpha_m \eta d\eta \right] + \right. \\ & \left. + \frac{v_0}{p} \int_0^p [R_3(\eta) - R_4(\eta) S_-(\eta - \eta_1)] \sin \alpha_m \eta d\eta + 3v_0 \theta_1 T_1(\eta_1) \sin \alpha_m \eta_1 \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Перший доданок правої частини рівняння (9) містить зображення по координаті ξ комплексної функції $\Phi(\eta, \xi)$ на лінії зламу $\eta = \eta_1$. Тому для знаходження зображення $\Phi^*(\eta_1, \beta_n)$ спочатку застосуємо до цього рівняння обернене перетворення Фур'є за координатою η , отримаємо:

$$\Phi^*(\eta, \beta_n) - i\Phi^*(\eta_1, \beta_n) D_1(\eta, \beta_n) = -iD_2(\eta, \beta_n) - D_3(\eta, \beta_n), \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} C_1(\eta, \beta_n) &= \frac{h^2 a^2 \theta}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \sin \alpha_m \eta_1 \sin \alpha_m \eta, \\ C_2(\eta, \beta_n) &= \frac{\alpha_l a^2 h^2}{d} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n+1} + 1]}{\beta_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \left[\theta_1 T_2(\eta_1) \sin \alpha_m \eta_1 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{p} \int_0^p \{R_1(\eta) - R_2(\eta) S_-(\eta - \eta_1)\} \sin \alpha_m \eta d\eta \right], \\ C_3(\eta, \beta_n) &= \frac{\alpha_l a^2 h^2}{d} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(-1)^{n+1} + 1]}{\beta_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \left\{ \frac{v_0}{p} \int_0^p [R_3(\eta) - R_4(\eta) S_-(\eta - \eta_1)] \sin \alpha_m \eta d\eta + \right. \\ & \quad \left. + 3v_0 \theta_1 T_1(\eta_1) \sin \alpha_m \eta_1 \right\} \sin \alpha_m \eta. \end{aligned}$$

Далі в рівнянні (10) беремо $\eta = \eta_1$ та розв'язуємо його, виділивши дійсну і уявну частину в чисельнику і знаменнику отриманої рівності. Далі помноживши чисельник та знаменник на спряжене до комплексного числа у знаменнику, отримаємо:

$$\Phi^*(\eta_1, \beta_n) = - \frac{C_1(\eta_1, \beta_n) C_2(\eta_1, \beta_n) + C_3(\eta_1, \beta_n)}{1 + C_1^2(\eta_1, \beta_n)} + i \frac{C_1(\eta_1, \beta_n) C_3(\eta_1, \beta_n) - C_2(\eta_1, \beta_n)}{1 + C_1^2(\eta_1, \beta_n)}. \quad (11)$$

Підставивши вираз (11) для $\Phi^*(\eta_1, \beta_n)$ у формулу (10) для $\Phi^*(\eta, \beta_n)$, отримаємо

$$\Phi^*(x, \beta_n) = -C_3(\eta, \beta_n) - C_1(\eta, \beta_n) \frac{C_1(\eta_1, \beta_n)C_3(\eta_1, \beta_n) - C_2(\eta_1, \beta_n)}{1 + C_1^2(\eta_1, \beta_n)} - i \left[\frac{C_1(\eta_1, \beta_n)C_2(\eta_1, \beta_n) + C_3(\eta_1, \beta_n)}{1 + C_1^2(\eta_1, \beta_n)} C_1(\eta, \beta_n) + C_2(\eta, \beta_n) \right]. \quad (12)$$

Застосувавши до рівності (12) обернене перетворення Фур'є за координатою ξ , знайдемо комплексну функцію напружень $\Phi(\eta, \xi)$:

$$\Phi(\eta, \xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[C_3(\eta, \beta_n) + C_1(\eta, \beta_n) \frac{C_1(\eta_1, \beta_n)C_3(\eta_1, \beta_n) - C_2(\eta_1, \beta_n)}{1 + C_1^2(\eta_1, \beta_n)} \right] \sin \beta_n \xi - i \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{C_1(\eta_1, \beta_n)C_2(\eta_1, \beta_n) + C_3(\eta_1, \beta_n)}{1 + C_1^2(\eta_1, \beta_n)} C_1(\eta, \beta_n) + C_2(\eta, \beta_n) \right] \sin \beta_n \xi.$$

Зусилля і моменти в оболонці визначаються через функції $\varphi(\eta, \xi)$ і $w(\eta, \xi)$ за формулами:

$$N_1(\eta, \xi) = E_0 \frac{\partial^2 \varphi(\eta, \xi)}{h^2 \partial \xi^2}, \quad N_2(\eta, \xi) = E_0 \frac{\partial^2 \varphi(\eta, \xi)}{h^2 \partial \eta^2},$$

$$M_1(\eta, \xi) = -D_2 \left[\frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\alpha_t (1+\nu)}{h} T_2(\eta, \xi) \right],$$

$$M_2(\eta, \xi) = -D_2 \left[\frac{1}{h^2} \left(\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\alpha_t (1+\nu)}{h} T_2(\eta, \xi) \right], \quad D_2 = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}.$$

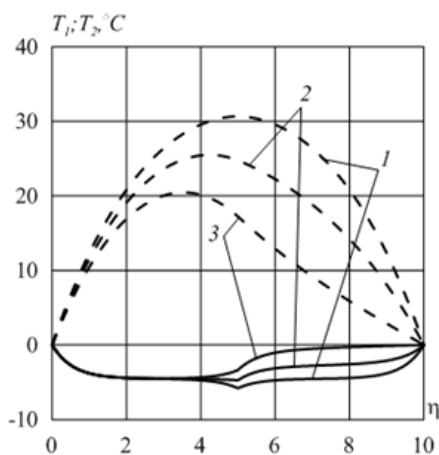


Рис. 2. Розподіл температурних характеристик T_1 (штрихові) і T_2 (суцільні) за зміни коефіцієнта теплопровідності $\bar{\mu}_2 = 0, 5; 0, 25; 0$

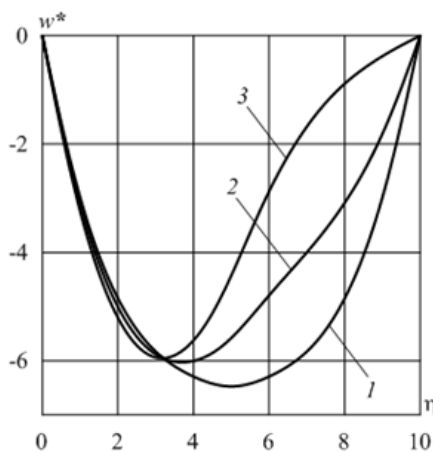


Рис. 3. Розподіл нормованого прогину w^* за зміни коефіцієнта теплопровідності $\bar{\mu}_2 = 0, 5; 0, 25; 0$

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ

Розглядали тонку призматичну оболонку з безрозмірними величинами $p = 10$, $d = 10$, $\eta_1 = 5$ та кутом зламу $\theta = 0,1$ за температури середовища рівної нулю на верхній лицевій поверхні оболонки $z = h$ і на торцях $\eta = 0$ та $\eta = 10$ ($t_c^+ = t_c^1 = t_c^2 = 0^\circ C$) та рівної сто градусів на нижній поверхні $z = -h$ ($t_c^- = 100^\circ C$). Вважали, що коефіцієнти тепловіддачі на верхніх лицевих поверхнях $z = h$ двох елементів однакові і дорівнюють $\bar{\mu}_1^+ = \bar{\mu}_2^+ = 0,5$; на нижній лицевій поверхні $z = -h$ коефіцієнт тепловіддачі першого елемента (1) оболонки рівний $\bar{\mu}_1^- = 0,5$ та розглядали різні значення коефіцієнта тепловіддачі на нижній лицевій поверхні другого елемента: $\bar{\mu}_2^- = 0,5$; $\bar{\mu}_2^- = 0,25$; $\bar{\mu}_2^- = 0$. На рис. 2-4 криві 1-3 ілюструють розподіли температурних характеристик, прогину, моментів зусиль по лінії $\xi = 5$. Зауважимо, що крива 1 відповідає однаковим коефіцієнтам тепловіддачі на лицевих поверхнях, $\bar{\mu}_1^+ = \bar{\mu}_2^+ = \bar{\mu}_1^- = \bar{\mu}_2^- = 0,5$; крива 2 – зменшенню тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента вдвічі $\bar{\mu}_2^- = 0,25$; крива 3 – повній термоізоляції на ній $\bar{\mu}_2^- = 0$.

Штриховими лініями на рис. 2 показано розподіл середньої температури T_1 , а суцільними – температурного моменту T_2 за тих же значень коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента оболонки. За однакових коефіцієнтів тепловіддачі з нижньої поверхні обох елементів оболонки $\bar{\mu}_1^- = \bar{\mu}_2^- = 0,5$ (крива 1) максимальне значення середньої температури T_1 досягається на лінії зламу, а температурний момент T_2 досягає мінімуму на цій лінії. Коли коефіцієнт тепловіддачі з нижньої поверхні другого елемента оболонки стає вдвічі меншим (крива 2), то T_1 зменшується, а максимальне значення T_1 знаходиться в першому елементі і зміщується на 0,075 довжини оболонки від лінії зламу в напрямку до її торця, а T_2 підвищується в другому елементі та в околі лінії зламу першого елемента, залишаючись мінімальним на лінії зламу. У випадку повної теплоізоляції нижньої лиевої поверхні другого елемента оболонки середня температура далі зменшується, міняючи опуклість у другому елементі і досягає максимуму на віддалі 0,145 довжини оболонки від лінії зламу. Значення температурного моменту в цьому випадку підвищується, а його мінімальне значення зміщується в перший елемент оболонки на 0,2 її довжини від лінії зламу.

На рис. 3 спостерігається зменшення абсолютної величини нормованого прогину $w^* = 10^5 w / (\alpha_r t_c^- h)$ оболонки зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні її другого елемента. За однакових коефіцієнтів тепловіддачі на всіх лицевих поверхнях прогин симетричний відносно до лінії зламу (крива 1) і досягає на ній максимуму. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі до $\bar{\mu}_2^- = 0,25$ (крива 2) і аж до теплоізоляції нижньої поверхні другого елемента оболонки $\bar{\mu}_2^- = 0$ (крива 3) абсолютна величина прогину зменшується, досягаючи максимальних значень на лініях $\eta = 3,7$ та $\eta = 3,2$ її першого елемента відповідно.

Нормований згинальний момент $M_1^* = 10^3 M_1 h / (\alpha_r t_c^- D_2)$, коли коефіцієнти тепловіддачі оболонки однакові (крива 1 рис. 4а), зростає, досягаючи максимуму на лінії зламу. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента оболонки він зменшується і міняє опуклість за теплоізоляції (крива 3) у межах другого елемента. Розподіл

Отформатовано: Цвет шрифта: Авто

нормованого моменту $M_2^* = 10^3 M_2 h / D_2$ (рис. 4б) якісно аналогічний до розподілу моменту M_1^* . Мінімальних значень моменти досягають на торцях.

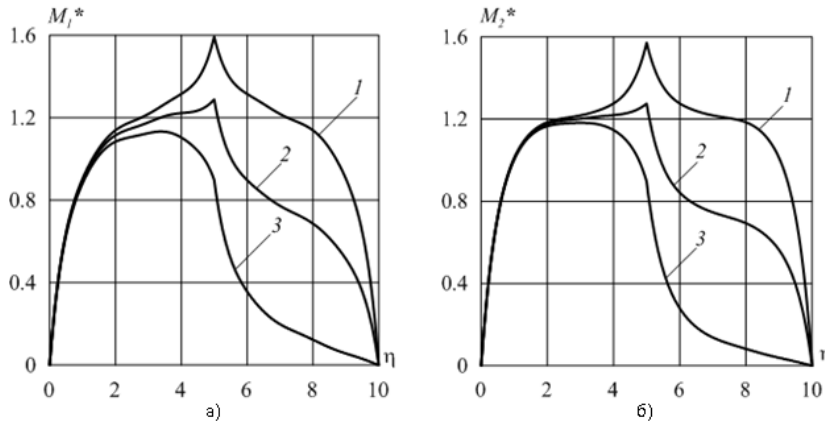


Рис. 4. Розподіл нормованих моментів M_1^* (а) і M_2^* (б) за зміни коефіцієнта тепловіддачі $\beta_1^* = 0,5; 0,25; 0$

Абсолютна величина нормованого зусилля $N_1^* = 10^2 N_1 h / (\alpha_t t_c^- E_0)$ на рис. 5а за однакових коефіцієнтів тепловіддачі досягає максимуму на зламі оболонки. Зі зменшенням коефіцієнта тепловіддачі ці зусилля спадають, а їх максимум зміщується на перший елемент оболонки і досягається на лініях $\eta = 4,7$ та $\eta = 4,1$ відповідно. На рис. 5б наведено розподіл нормованого зусилля $N_2^* = 10^2 N_2 h^2 / (\alpha_t t_c^- E_0)$, який є симетричним відносно до лінії зламу і його абсолютна величина досягає максимуму на ній (крива 1) за однакових коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях оболонки. Коли коефіцієнт тепловіддачі на нижній поверхні другого елемента зменшився вдвічі, абсолютна величина зусилля N_2^* спадає в межах $3 < \eta < 10$ та дещо зростає в межах $0 < \eta < 3$, досягаючи максимуму на лінії $\eta = 3$ (крива 2). За теплової ізоляції нижньої поверхні другого елемента оболонки розподіл зусилля N_2^* міняє опуклість у його межах та спадає на відрізьку $2,25 < \eta < 7,7$, набуваючи в межах $7,7 < \eta < 10$ додатних значень, і досягає абсолютного максимуму на лінії $\eta = 2,25$.

Отформатовано: Цвет шрифта: Авто

Отформатовано: Цвет шрифта: Авто

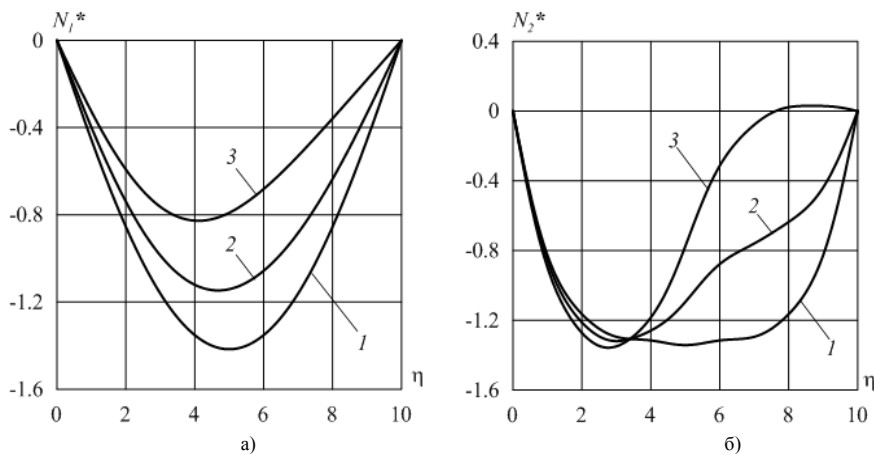


Рисунок 5. Розподіл зусиль N_1 (а) і N_2 (б) за зміни коефіцієнта тепловіддачі $\bar{\mu}_2^+ = 0,5; 0,25; 0$

ВИСНОВКИ

Розглядається задача про визначення термонапруженого стану в тонкій пологій складеній призматичній оболонці із двох плоских елементів при конвективному теплообміні з навколишнім середовищем на лицевих поверхнях. Коефіцієнти тепловіддачі на лицевих поверхнях залежні від координати. Використовуючи метод варіації сталої, розроблено спосіб зведення крайової задачі теплопровідності для оболонки зі зломом до системи інтегральних рівнянь з інтегральними операторами Вольтерри і Фредгольма другого роду. Для визначення термонапруженого стану пологої призматичної оболонки, комплексну функцію напружень подано через функцію напружень та прогин. На торцях оболонка зі зломом вільно оперта на жорсткі вертикальні діафрагми. Торці, де є злам серединної поверхні, теплоізовані, а на інших задана нульова температура середовища. Для знаходження функції напружень та прогину використано скінченні інтегральні перетворення Фур'є. Наведено результати числового аналізу розподілу середньої температури, температурного моменту, прогину, моментів та зусиль за різних значень коефіцієнта тепловіддачі на нижній лицевій поверхні другого елемента оболонки. Виявлено, що зменшення коефіцієнта тепловіддачі аж до теплоізоляції призводить до спадання середньої температури оболонки зі зломом, згинних моментів та абсолютних величин прогину і зусиль зі зміщенням максимальної їх величини в бік складки, де коефіцієнт тепловіддачі не змінювали. Однак, значення температурного моменту підвищуються, особливо на ділянці зміни коефіцієнта тепловіддачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Назаров А. Г. Некоторые контактные задачи теории оболочек / А.Г. Назаров // Доклады АН Арм. ССР. – 1948. – Т. 9. – № 2. – С. 61-66.
2. Вайнберг Д. В. Расчет пластин и оболочек с разрывными параметрами / Д.В. Вайнберг, И.З. Ройтфарб // Расчет пространственных конструкций. – М. : Стройиздат. – 1965. – Вып. 10. – С. 39-80.
3. Хлебной Я. Ф. Пространственные железобетонные конструкции. Расчет и конструирование / Я.Ф. Хлебной. – М., 1977. – 225 с.
4. Михайлов Б. К. Пластинки и оболочки с разрывными параметрами / Б.К Михайлов. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 196 с.

5. Швець Р. М. Про рівняння термопружності тонких пологих оболонок зі зломами серединної поверхні / Р.М. Швець, Б.С. Хапко // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 135-139.
6. Швець Р. М. Температурні поля і напруження у пологій оболонці зі зломами серединної поверхні / Р.М. Швець, Б.С. Хапко // *Мат. методи і фіз.- мех. поля.* – 1999. – Т. 42, № 2. – С. 62-69.
7. Хапко Б. С. Полога призматична оболонка в нерівномірному температурному полі / Б.С. Хапко // *Фіз.-хім. мех. матеріалів.* – 2005. – № 2. – С. 33-38.
8. Швець Р. Н. Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами при переменных коэффициентах теплоотдачи / Р.Н. Швець, Б.С. Хапко, А.И. Чиж // *Теорет. и прикл. механика.* – 2010. – Вып. 1(47). – С. 69-76.
9. Підстригач Я. С. Температурне поле в тонких пластинках при змінному коефіцієнті тепловіддачі з бокових поверхонь / Я.С. Підстригач, Ю.М. Коляно // *Доп. АН УРСР, Сер. А.* – 1971. – № 1. – С. 75-78.
10. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / [Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лозбень]. – К. : *Наук. думка*, 1977. – 158 с.
11. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швець. – К. : *Наук. думка*, 1978. – 344 с.
12. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакін, Ю.М. Коляно. – М. : *Наука*, 1984. – 368 с.
13. Sugano Y. Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk / Y. Sugano, R. Chiba, K. Hirose, K. Takahashi // *JSME international journal, Series A.* – 2004. – **47**, № 2. – P. 189-197.
14. Хапко Б. С. Термічний прогин смуги і прямокутної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі / Б.С. Хапко, А.І. Чиж // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 4. – С. 198-206.
15. Хапко Б. Температурне поле та прогин півбезмежної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі / Б. Хапко, А. Чиж // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2009. – Вип. 9. – С. 133-144.
16. Хапко Б. С. Про вплив змінних коефіцієнтів тепловіддачі на термонапруження у скінченній циліндричній оболонці / Б.С. Хапко, А.І. Чиж // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 2. – С. 195-203.
17. Верлань А. Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : *Наук. думка*, 1978. – 292 с.

REFERENCES

1. Nazarov, A.N. (1948), "Nekotorye kontaktnye zadachi teorii obolochek", *Doklady AN Arm. SSR*, vol. 9, no. 2, pp. 61-66.
2. Vaynberg, D.V. and Rojtfarb, Y.Z. (1965), "Raschet plastin i obolochek s razryvnymi parametrami", *Raschet prostranstvennykh konstrukcij*, issue 10, pp. 39-80.
3. Khlebnij, Ya. F. (1977), *Prostranstvennye zhelezobetonnye konstrukcii. Raschet y konstruirovaniye* [Three-Dimensional Reinforced-Concrete Structures. Numerical Analysis and Design], Stroyizdat, Moscow, Russia.
4. Mikhailov, B.K. (1980), *Plastinki i oblochki s razryvnymi parametrami* [Plates and Shells with Discontinuous Parameters], Izdatelstvo Leningradskogo. universiteta, Leningrad, Russia.

5. Shvets, R.M. and Khapko, B.S. (1997), "On equations of thermoelasticity for thin shells with breaks of median surface", *Mathematical methods and physicochemical fields*, **40**, no. 1, pp. 135-139.
6. Shvets, R.M. and Khapko, B.S. (1999), "Temperature fields and stresses in a gently sloping shell with breaks in the median surface", *Mathematical methods and physicochemical fields*, **42**, no. 2, pp. 62-69.
7. Khapko, B.S. (2005), "Shallow Prismatic Shell in a Nonuniform Temperature Field", *Physicochemical mechanics of materials*, no. 2, pp. 33-38.
8. Shvets, R.M., Khapko, B.S. and Chyzh, A.I. (2010), "Heat conduction equations for shells having breaks with variable heat transfer coefficients", *Theoretical and applied mechanics*, issue 1(47), pp. 69-76.
9. Pidstryhach, Ya.S. and Kolyano, Yu.M. (1971), "Temperaturne pole v tonkykh plastynkakh pry zminnomu koefitsiyenti teploviddachi z bokovykh poverkhon", *Dop. AN URSSR, Ser. A*, no. 1, pp. 75-78.
10. Podstrigach, Ya.S. , Kolyano, Yu.M., Gromovyk, V.I. and Lozben, V.L. (1977), *Termouprugost tel pri peremennykh koefitsiyentax teplootdachi* [Thermoelasticity of Bodies with Variable Heat-Transfer Coefficients], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
11. Podstrigach, Ya.S. and Shvec, R.N. (1978), *Termouprugost tonkich obolochek* [Thermoelasticity of thin shells], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.
12. Podstrigach, Ya.S., Lomakin, V.A. and Kolyano, Yu.M. (1984), *Termouprugost tel neodnorodnoj struktury* [Thermoelasticity of Bodies with a heterogeneous structure], Nauka, Moscow, Russia.
13. Sugano, Y., Chiba, R., Hirose, K. and Takahashi, K. (2004), "Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk", *JSME international journal, Series A*, 47, no. 2, pp. 189-197.
14. Khapko, B.S. and Chyzh, A.I. (2011), "Thermal bending of a strip and a rectangular plate with coordinate-dependent heat exchange coefficients", *J. Math. Sci.*, 174, no. 3, pp. 375-386.
15. Khapko, B. and Chyzh, A. (2009), "Temperature field and deflection of a semi-infinite plate with coordinate-dependent heat exchange coefficients", *Physico-mathematical modeling and informational technologies*, issue 9, pp. 133-144.
16. Khapko, B.S. and Chyzh, A.I. (2014), "On effect of variable heat exchange coefficients on thermal stresses in finite cylindrical shell", *Mathematical methods and physicochemical fields*, 57, no. 2, pp. 195-203.
17. Verlan, A.F. and Sizikov, V.S. (1978), *Metody resheniya integralnykh uravnenij s programmami dlya EVM* [Methods for the Solution of Integral Equations using Computer Programs], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.