

3. Musil, J. and Šuna, J. (2005), "The role of energy in formation of sputtered nanocomposite films", *Mater. Scien. Forum*, vol. 502, pp. 291-296.
4. Window, B. and Savvides, N.J. (1986), "Unbalanced magnetrons as sources of high ion fluxes", *Vac. Sci. Technol. A.*, vol. 4, no. 3, pp. 453-507.
5. Svadkovski, I.V. (2007), "Directions of magnetron sputtering systems developments", *BGUIR reports*, no. 2(18), pp. 112-121.
6. A patent for an invention №93833U, Ukraine, IPC C23C 14/00. Ion-plasma device "hybrid" type / Grishkevich A. D. ; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. – a201005613 ; Filed 11.05.2010 ; Publication Date 10.03.2011, Bull. №5.
7. A patent for utility model №38845U, Ukraine, IPC C23C 14/00. Plasma device / Grishkevich A. D.; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. - u200808700; Filed 01.07.2008 ; Publication Date 26.01.2009, Bull. №2.
8. A patent for an invention №93471, Ukraine, IPC C23C 14/35, 14/56. Ion-plasma installation / Grishkevich A. D, Grinyuk S. I.; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. – a201005669; Filed. 11.05.2010 ; Publication Date. 10.02.2010, Bull. №23.
9. A patent for utility model № 89038, Ukraine, IPC C23C 14/00. Ion-plasma device type for the integrated treatment of internal surfaces / Grishkevich A. D ; applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU. - u2013 12 584; Filed. 28.10. 2013 ; Publication Date. 24.01.2014, Bull. №1.
10. Application a201312581 Ukraine, IPC C23C 14/00. Unbalanced cylindrical sputtering magnetron system / Grishkevich A.D. ; Appl. 06.11 in 2013, applicant and assignee Institute of Technical Mechanics of NSAU and SSAU.
11. Firstov, S.A., Gorban, V.F. and Pechkovski, E.P. (2013), "Sovremennyye vozmojnyj metody instrumentalnogo indentirovaniya", vol. 18, no. 2-4, pp. 1933-1934.

УДК 539.3, 539.8

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

¹Земсков А. В., к. ф.-м. н., доцент, ²Тарлаковский Д. В., д. ф.-м. н., профессор

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), ул. Волоколамское ш., 4, Москва, 125993, Россия

²НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Мичуринский просп., 1, Москва, 119192, Россия

azemskov1975@mail.ru

Предлагается подход к решению начально-краевых задач упругой диффузии, основанный на построении интегральных соотношений, связывающих между собой правые части граничных условий различных типов. Предполагается, что одно из этих решений найдено. Тогда интегральные соотношения рассматриваются как уравнения относительно правых частей, эквивалентных другим условиям. Для их решения используются квадратурные формулы.

Ключевые слова: упругая диффузия, нестационарные задачи, преобразование Лапласа, упругий однокомпонентный слой, интегральные уравнения Вольтера.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ ДИФУЗІЇ З ДОВІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

¹Земсков А. В., к. ф.-м. н., доцент, ²Тарлаковський Д. В., д. ф.-м. н., професор

¹Московський авіаційний інститут (національний дослідний університет),
вул. Волоколамське ш., 4, Москва, 125993, Росія

²ІДІ механіки МДУ ім. М.В. Ломоносова,
Мічуринський просп., 1, Москва, 119192, Росія

azemskov1975@mail.ru

Пропонується підхід до розв'язання початково-крайових задач пружної дифузії, заснований на побудові інтегральних співвідношень, що зв'язують між собою праві частини граничних умов різних типів. Передбачається, що одне з цих рішень знайдено. Тоді інтегральні співвідношення розглядаються як рівняння щодо правих частин, еквівалентних іншим умовам. Для їх вирішення використовуються квадратурні формули.
Ключові слова: пружна дифузія, нестационарні задачі, перетворення Лапласа, пружний однокомпонентний шар, інтегральні рівняння Вольтера.

METHOD SOLVING FOR THE UNSTEADY PROBLEM OF THE ELASTIC DIFFUSION WITH ARBITRARY BOUNDARY CONDITIONS

¹Zemskov A. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,

²Tarlakovskiy D. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor

¹Moscow Aviation Institute (National Research University),
Volokolamsk highway, 4, Moscow, 125993, Russia

²Institute of Mechanics (Lomonosov Moscow State University),
Michurinsk boulevard, 1, Moscow, 119192, Russia

azemskov1975@mail.ru

Solving many of unsteady problems in continuum mechanics including elastic diffusion problems is associated with serious mathematical challenges. These are due to the need of Laplace transform conversion used to solve problems of this type. Depending on certain types of boundary conditions, solution for these problems may be produced using the Fourier trigonometric series, which significantly simplifies the originals' finding algorithm [1]. The disadvantage of this method is the restricted application area, which is due to the specifics of boundary conditions.

In order to overcome this disadvantage, it is proposed approach to solving initial-boundary problems is based on integral relations which connect right sides of boundary conditions of different types. One of these solutions is assumed to be found. In this case, integral relations are considered as equations as regard to right sides which are equivalent to other conditions. Quadrature formulas are used to solve these equations. In this case, it will be sufficient to solve a single (benchmark) problem while all other problems will be reduced to it using the relations given below. The proposed method is demonstrated through the example of a one-dimensional unsteady problem for elastic diffusion layer.

Key words: diffusion with elasticity, unsteady state problems, Laplace transform, elastic one-component layer, Volterra integral equations.

Пусть имеется однородный слой, ограниченный поверхностями $x_3 = 0$ и $x_3 = L$ ($Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат). Одномерные физико-механические процессы в среде описываются моделью связанной упругой диффузии [1, 2]:

$$\ddot{u} = u'' - \alpha \eta', \quad \dot{\eta} = D\eta'' - \Lambda u''; \quad (1)$$

$$\eta|_{x=0} = f_{11}^1(\tau), \quad u|_{x=0} = f_{21}^1(\tau), \quad \eta|_{x=L} = f_{12}^1(\tau), \quad u|_{x=L} = f_{22}^1(\tau); \quad (2)$$

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \eta|_{\tau=0} = 0, \quad (3)$$

где штрих обозначает производную по пространственной переменной x , а точки – производные по времени τ .

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины в (1)-(3) (при одинаковом начертании они обозначены звездочкой, которая в остальных формулах опускается):

$$x = \frac{x_3}{L}, \quad u = \frac{u_3}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{n_0}, \quad c^2 = \frac{C_{3333}}{\rho}, \quad \alpha = \frac{n_0 \alpha_{33}}{C_{3333}}, \quad D = \frac{D_{33} g}{cL},$$

$$\Lambda = \frac{\Lambda_{3333}}{n_0 cL}, \quad \Lambda_{3333} = \frac{n_0 \alpha_{33} D_{33}}{RT_0}, \quad f_{1k}^{1*}(\tau) = \frac{f_{1k}^1(\tau)}{n_0}, \quad f_{2k}^{1*}(\tau) = \frac{f_{2k}^1(\tau)}{L} \quad (k=1,2),$$

где t – время; u_3 – перемещение вдоль оси Ox_3 ; T_0 – температура среды; $\eta = n - n_0$ – приращение концентрации; n_0 и n – начальная и текущая концентрации вещества; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; α_{ij} – коэффициенты, определяемые типом кристаллической решётки и характеризующие относительное объёмное изменение за счёт диффузии; R – универсальная газовая постоянная; D_{ij} – коэффициенты самодиффузии.

Для решения задачи (1)-(3) рассматриваем вспомогательную (эталонную) задачу, определяемую уравнениями (1), начальными условиями (3) и граничными условиями (правые части вторых и третьих равенств здесь и в (2) совпадают):

$$(\Lambda u'' - D\eta')|_{x=0} = f_{11}^2(\tau), \quad u|_{x=0} = f_{21}^1(\tau), \quad (\Lambda u'' - D\eta')|_{x=1} = f_{12}^2(\tau), \quad u|_{x=1} = f_{22}^1(\tau). \quad (4)$$

Ее решение найдено в работе [1] и в интегральной форме имеет вид (звездочка обозначает свёртку по времени):

$$u = \sum_{l=1}^2 (G_{21l} * f_{1l}^2 + G_{22l} * f_{2l}^1), \quad \eta = \sum_{l=1}^2 (G_{11l} * f_{1l}^2 + G_{12l} * f_{2l}^1), \quad (5)$$

$$G_{1k1} = \delta_{1k} H(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k1n}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad G_{2k1} = \sum_{n=1}^{\infty} G_{2k1n}(\tau) \sin \lambda_n x.$$

Здесь $G_{1kl} = \eta$, $G_{2kl} = u$ – функции Грина задачи (1), (3), (4), т.е., решения четырех задач (k, l – их номера), включающих в себя уравнения (1), начальные условия (3) и следующие граничные условия:

$$(\Lambda G_{2kl}'' - D G_{1kl}')|_{x=0} = \delta_{1k} \delta_{1l} \delta(\tau), \quad G_{2kl}|_{x=0} = \delta_{2k} \delta_{1l} \delta(\tau),$$

$$(\Lambda G_{2kl}'' - D G_{1kl}')|_{x=1} = \delta_{1k} \delta_{2l} \delta(\tau), \quad G_{2kl}|_{x=1} = \delta_{2k} \delta_{2l} \delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака; δ_{ik} – символ Кронекера, $i = 1, 2$.

Полагая теперь, что решение эталонной задачи удовлетворяет равенствам $\eta(0, \tau) = f_{11}^1(\tau)$, $\eta(1, \tau) = f_{12}^1(\tau)$ и, учитывая, $f_{21}^2(\tau) = f_{21}^1(\tau)$, $f_{22}^2(\tau) = f_{22}^1(\tau)$, приходим к системе уравнений Вольтера типа свёртки относительно функций $f_{11}^2(\tau)$ и $f_{12}^2(\tau)$:

$$G_{111}(0, \tau) * f_{11}^2(\tau) - G_{111}(1, \tau) * f_{12}^2(\tau) = \varphi_1(\tau),$$

$$G_{111}(1, \tau) * f_{11}^2(\tau) - G_{111}(0, \tau) * f_{12}^2(\tau) = \varphi_2(\tau), \quad (6)$$

где

$$\varphi_1(\tau) = f_{11}^1(\tau) - G_{121}(0, \tau) * f_{21}^1(\tau) + G_{121}(1, \tau) * f_{22}^1(\tau),$$

$$\varphi_2(\tau) = f_{12}^1(\tau) - G_{121}(1, \tau) * f_{21}^1(\tau) + G_{121}(0, \tau) * f_{22}^1(\tau).$$

Здесь учтены установленные в [1] свойства симметрии функций Грина.

Основной сложностью при решении системы (6) является то, что функции $G_{111}(0, \tau)$ и $G_{111}(1, \tau)$ имеют особенность при $\tau = 0$. Для исследования характера особенностей поступим

следующим образом. В пространстве изображений Лапласа функция влияния $G_{111}(x, \tau)$ имеет вид [1] (s – параметр преобразования Лапласа):

$$G_{111}^L(x, s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{111n}^L(s) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n,$$

где

$$G_{111n}^L = \frac{2(s^2 + \lambda_n^2)}{P(\lambda_n^2, s)}, \quad P(\lambda_n^2, s) = (s^2 + \lambda_n^2)(s + D\lambda_n^2) - \alpha\lambda_n^4. \quad (7)$$

Для функции G_{111n}^L в формуле (7) сделаем следующее преобразование:

$$G_{111n}^L = \frac{2}{s + D\lambda_n^2} + \frac{2\alpha\lambda_n^4}{Q(\lambda_n^2, s)}, \quad Q(\lambda_n^2, s) = (s + D\lambda_n^2)P(\lambda_n^2, s).$$

Тогда, оригинал функции $G_{111}^L(x, s)$ имеет следующее представление:

$$G_{111}(x, \tau) = \mathfrak{G}_3\left(\frac{x}{2}, e^{-D\pi^2\tau}\right) + 2\alpha\lambda \sum_{n=1}^{\infty} G_{111n}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad \mathfrak{G}_3(x, q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2\pi n x, \quad (8)$$

где

$$G_{111n}(\tau) = e^{\gamma_n \tau} (A_{n1} \cos \beta_n \tau - A_{n2} \sin \beta_n \tau) + A_{n3} e^{s_{3n} \tau} + A_{n4} e^{-D\lambda_n^2 \tau},$$

s_{1n}, s_{2n} – комплексные, а s_{3n} – действительный корень многочлена $P(\lambda_n^2, s)$, $\gamma_n = \operatorname{Re} s_{1n} < 0$, $\beta_n = \operatorname{Im} s_{1n}$, $s_{2n} = \bar{s}_{1n}$, $s_{3n} < 0$; $\mathfrak{G}_3(x, q)$ – тета-функция Якоби [3]; коэффициенты A_{nq} , $q = \overline{1, 4}$ находятся по формулам:

$$A_{n1} = 2 \operatorname{Re} \frac{\lambda_n^4}{Q'(\lambda_n^2, s_{1n})}, \quad A_{n2} = 2 \operatorname{Im} \frac{\lambda_n^4}{Q'(\lambda_n^2, s_{1n})}, \quad A_{n3} = \frac{\lambda_n^4}{Q'(\lambda_n^2, s_{3n})}, \quad A_{n4} = \frac{\lambda_n^4}{Q'(\lambda_n^2, -D\lambda_n^2)}.$$

В работе [1] получены приближённые значения корней многочлена $P(\lambda_n^2, s)$. На основании этих равенств можно сделать вывод, что общий член $G_{111n}(\tau)$ имеет порядок $O(n^{-2})$ и соответствующий ряд в (8) сходится абсолютно $\forall x$ при $\tau \geq 0$. Функция $G_{111}(1, \tau)$ ограничена при $\tau > 0$, а функция $G_{111}(0, \tau)$ в окрестности $\tau = 0$ имеет интегрируемую особенность порядка $1/2$ [3]. В этом случае, следуя [4], домножим каждое из уравнений (6) на $d\tau/(\xi - \tau)^{1/2}$ и проинтегрируем от 0 до ξ . Тогда, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} K^1(\xi - t) f_{11}^2(t) dt - \int_0^{\xi} K^2(\xi - t) f_{12}^2(t) dt &= \Phi^1(\xi), \\ \int_0^{\xi} K^2(\xi - t) f_{11}^2(t) dt - \int_0^{\xi} K^1(\xi - t) f_{12}^2(t) dt &= \Phi^2(\xi), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$K^1(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{G_{111}(0, \xi - \tau) d\tau}{\tau^{1/2}}, \quad K^2(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{G_{111}(1, \xi - \tau) d\tau}{\tau^{1/2}}, \quad \Phi^k(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\varphi_k(\tau) d\tau}{(\xi - \tau)^{1/2}},$$

причём ядра $K^k(\xi)$ не имеют особенностей в нуле и $\Phi^k(0) = 0$, $k = 1, 2$.

Для решения системы (9) удобно использовать квадратурные формулы. Разбиваем область $[0, T]$ изменения времени τ на N отрезков точками $\tau_i = ih$ с равномерным шагом $h = T/N$ и

вводим сеточные функции $y_i^k = f_{ik}^2(\tau_i)$, $K_i^k = K^k(\tau_i)$. Каждый из интегралов в (9) при $\tau = \tau_i$ приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников:

$$\int_0^{\tau_i} K^l(\tau_i - t) f_{ik}^2(t) dt \approx h S_{i-1/2}^{lk} + h K_{1/2}^l y_{i-1/2}^k, \quad S_{i-1/2}^{lk} = \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j+1/2}^l y_{j-1/2}^k \quad (k, l = 1, 2),$$

где узлы находятся по формулам:

$$\tau_{i-1/2} = \frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} = h \left(i - \frac{1}{2} \right), \quad \tau_{i-j+1/2} = \tau_i - \tau_{j-1/2} = h \left(i - j + \frac{1}{2} \right), \quad i = \overline{1, N}.$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ($i \geq 1$):

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_{i-1/2} = \mathbf{b}_{i-1/2}, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} K_{1/2}^1 & -K_{1/2}^2 \\ -K_{1/2}^2 & K_{1/2}^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} y_{i-1/2}^1 \\ y_{i-1/2}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} b_{i-1/2}^1 \\ b_{i-1/2}^2 \end{pmatrix},$$

$$b_{i-1/2}^1 = \Phi^1(\tau_{i-1/2})/h - S_{i-1/2}^{11} + S_{i-1/2}^{22}, \quad b_{i-1/2}^2 = -\Phi^2(\tau_{i-1/2})/h + S_{i-1/2}^{21} - S_{i-1/2}^{12}, \quad i \geq 1.$$

Решение системы (10) имеет вид:

$$y_{i-1/2}^1 = \frac{K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^2}{(K_{1/2}^1)^2 - (K_{1/2}^2)^2}, \quad y_{i-1/2}^2 = \frac{K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^2}{(K_{1/2}^1)^2 - (K_{1/2}^2)^2}.$$

Подставив это решение в (5), получим решение исходной задачи (1)-(3).

Замечание. Так как функция $G_{111}(x, \tau)$ имеет особенности при $\tau = 0$, то численное вычисление свёрток (6) затруднительно. Для решения этой проблемы проинтегрируем первое равенство по τ от 0 до ξ , получим:

$$\int_0^{\xi} \eta(x, \tau) d\tau = \int_0^{\xi} G(x, \xi - t) f_{11}^2(t) dt - \int_0^{\xi} G(1 - x, \xi - t) f_{12}^2(t) dt,$$

где

$$G(x, \xi - t) = \int_t^{\xi} G_{111}(x, \tau - t) d\tau =$$

$$= \xi - t + \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha \Lambda A_{n4}}{\lambda_n^2} \left[1 - e^{-D \lambda_n^2 (\xi - t)} \right] \cos \lambda_n x + 2\alpha \Lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n3}}{s_{3n}} \left[e^{s_{3n} (\xi - t)} - 1 \right] \cos \lambda_n x +$$

$$+ 2\alpha \Lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n1}}{|z_{1n}|^2} \left\{ e^{-\gamma_n (\xi - t)} \left[\beta_n \sin \beta_n (\xi - t) - \gamma_n \cos \beta_n (\xi - t) \right] + \gamma_n \right\} \cos \lambda_n x +$$

$$+ 2\alpha \Lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n2}}{|z_{1n}|^2} \left\{ e^{-\gamma_n (\xi - t)} \left[\beta_n \cos \beta_n (\xi - t) + \gamma_n \sin \beta_n (\xi - t) \right] - \beta_n \right\} \cos \lambda_n x.$$

Данное преобразование позволяет улучшить сходимость рядов, входящих в $G_{111}(x, \tau)$, что позволяет сократить вычисления при численной реализации алгоритма.

Теперь, выполнив аналогичное разбиение промежутка $[0, T]$, с помощью квадратурных формул придём к системе уравнений относительно $\eta(x, \xi_i)$. Решение этой системы строится аналогично (11). С помощью формулы симметричных прямоугольников получим:

$$\eta(x, \xi_{i-1/2}) = -\sum_{j=1}^{i-1} \eta(x, \xi_{j-1/2}) + \sum_{j=1}^i G(x, \xi_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^1 - \sum_{j=1}^{i-1} G(1-x, \xi_{i-j+1/2}) y_{j-1/2}^2.$$

Функция $G_{211}(x, \tau)$ не обладает особенностью при $\tau=0$, поэтому, для численного вычисления функции $u(x, \tau)$ можно воспользоваться формулами (6) напрямую.

УЧЁТ СИММЕТРИИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАДАЧИ УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ

В ряде случаев, при решении задач упругой диффузии можно обойтись без построения соотношений между правыми частями граничных условий. Существуют возможности непосредственного выражения функций влияния различных задач друг через друга. В качестве примера, рассмотрим задачу, включающую в себя уравнения (1), начальные условия (2) и следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \eta|_{x=0} &= f_{11}^3(t), \quad (u' - \alpha\eta)|_{x=0} = f_{21}^3(t), \\ \eta|_{x=1} &= f_{12}^3(t), \quad (u' - \alpha\eta)|_{x=1} = f_{22}^3(t). \end{aligned}$$

Решение этой задачи будем искать в форме, аналогичной (5):

$$u = \sum_{l=1}^2 (\tilde{G}_{21l} * f_{1l}^3 + \tilde{G}_{22l} * f_{2l}^3) \quad \eta = \sum_{l=1}^2 (\tilde{G}_{11l} * f_{1l}^3 + \tilde{G}_{12l} * f_{2l}^3),$$

где

$$\tilde{G}_{1kl}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{1kln}(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \tilde{G}_{2kl}(x, \tau) = \delta_{2k} \tilde{G}_{2k10}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{2kln}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad (11)$$

$\tilde{G}_{jkl}(\tau)$, $k=1, 2$ – функции, подлежащие определению.

Подставив (5) и (11) в (1) и применив преобразование Лапласа, получим соответственно при $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} s^2 \tilde{G}_{2kln}^L &= -\lambda_n^2 \tilde{G}_{2kln}^L + \alpha \lambda_n \tilde{G}_{1kln}^L, & s \tilde{G}_{1kln}^L &= -D \lambda_n^2 \tilde{G}_{1kln}^L + \Lambda \lambda_n^3 \tilde{G}_{2kln}^L; \\ s^2 \tilde{G}_{2kln}^L &= -\lambda_n^2 \tilde{G}_{2kln}^L - \alpha \lambda_n \tilde{G}_{1kln}^L, & s \tilde{G}_{1kln}^L &= -D \lambda_n^2 \tilde{G}_{1kln}^L - \Lambda \lambda_n^3 \tilde{G}_{2kln}^L. \end{aligned}$$

Переписав последнюю систему в виде

$$s^2 \tilde{G}_{2kn}^L = -\lambda_n^2 \tilde{G}_{2kn}^L + \alpha \lambda_n (-\tilde{G}_{1kn}^L), \quad s(-\tilde{G}_{1kn}^L) = -D \lambda_n^2 (-\tilde{G}_{1kn}^L) + \Lambda \lambda_n^3 \tilde{G}_{2kn}^L$$

получим

$$\tilde{G}_{2kln}^L = \tilde{G}_{2kn}^L, \quad \tilde{G}_{1kln}^L = -\tilde{G}_{1kn}^L. \quad (12)$$

Определим теперь $\tilde{G}_{2k10}(\tau)$. Это удобно сделать отдельно. Применив к задаче (1), (3), с граничными условиями

$$\begin{aligned} (u' - \alpha\eta)|_{x=0} &= f_{21}^3(\tau), \quad \eta|_{x=0} = f_{11}^3(\tau), \\ (u' - \alpha\eta)|_{x=1} &= 0, \quad \eta|_{x=1} = 0 \end{aligned}$$

преобразование Лапласа,

$$s^2 u^L = u^{nL} - \alpha \eta^{L'}, \quad s \eta = D \eta^{nL} - \Lambda u^{mL},$$

затем редукцию к нулевым граничным условиям

$$u^L = U + \varphi, \quad \eta = H + \psi,$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x, s) &= \psi^*(x) f_{11}^L(s), \quad \varphi(x, s) = \varphi^*(x) (f_{21}^L(s) + \alpha f_{11}^L(s)), \\ \psi^*(x) &= 1 - x, \quad \varphi^*(x) = x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

и разложение в ряды Фурье

$$\begin{aligned} U(x, s) &= U_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(s) \cos \lambda_n x, \quad H(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(s) \sin \lambda_n x, \\ \varphi(x, s) &= \varphi_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s) \cos \lambda_n x, \quad \psi(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(s) \sin \lambda_n x, \end{aligned}$$

получим для нулевой гармоники U_0 следующую задачу:

$$s^2 U_0 + s^2 \varphi_0 = -f_{11}^{3L}. \quad (13)$$

Здесь учтено, что

$$\psi' = -f_{11}^{3L}(s), \quad \varphi' = -(f_{21}^{3L}(s) + \alpha f_{11}^{3L}(s)).$$

Решая (13), находим:

$$U_0 = -\frac{1}{s^2} f_{21}^{3L} - \varphi_0 \Rightarrow u_0^L = -\frac{1}{s^2} f_{21}^{3L} \Rightarrow \tilde{G}_{2kl0}^L = -\frac{1}{s^2} \Rightarrow \tilde{G}_{2kl0} = -\tau H(\tau).$$

В следующей таблице предложена условная классификация задач упругой диффузии, в основе построения которой используется идеология классификации задач математической физики.

Таблица 1 – Классификация задач механоидиффузии

№ группы	Вид граничных условий	Классификация
(I)	$\eta _{x=0} = f_{11}(t), \quad u _{x=0} = f_{21}(t),$ $\eta _{x=1} = f_{12}(t), \quad u _{x=1} = f_{22}(t),$	Первая краевая задача
(II)	$(\Lambda u'' - D \eta') _{x=0} = f_{11}(t), \quad (u' - \alpha \eta) _{x=0} = f_{21}(t),$ $(\Lambda u'' - D \eta') _{x=1} = f_{12}(t), \quad (u' - \alpha \eta) _{x=1} = f_{22}(t),$	Вторая краевая задача
(III _a)	$(\Lambda u'' - D \eta') _{x=0} = f_{11}(t), \quad u _{x=0} = f_{21}(t),$ $(\Lambda u'' - D \eta') _{x=1} = f_{12}(t), \quad u _{x=1} = f_{22}(t),$ $\eta _{x=0} = f_{11}(t), \quad (u' - \alpha \eta) _{x=0} = f_{21}(t),$ $\eta _{x=1} = f_{12}(t), \quad (u' - \alpha \eta) _{x=1} = f_{22}(t);$	Третья (смешанная) краевая задача

(Ш ₆)	$(\Lambda u'' - D\eta') _{x=0} = f_{11}(t), \quad u _{x=0} = f_{21}(t),$ $\eta _{x=1} = f_{12}(t), \quad (u' - \alpha\eta) _{x=1} = f_{22}(t);$ $(\Lambda u'' - D\eta') _{x=0} = f_{11}(t), \quad u _{x=0} = f_{21}(t),$ $\eta _{x=1} = f_{12}(t), \quad u _{x=1} = f_{22}(t);$ $(\Lambda u'' - D\eta') _{x=0} = f_{11}(t), \quad u _{x=0} = f_{21}(t),$ $(\Lambda u'' - D\eta') _{x=1} = f_{12}(t), \quad (u' - \alpha\eta) _{x=1} = f_{22}(t).$	
-------------------	--	--

Данная таблица не претендует на полноту, но отражает наиболее типичные граничные условия, сочетающие кинематику и динамику механодиффузионных процессов на границах рассматриваемых сред.

Краевые задачи с граничными условиями (Ш_а) допускают возможность построения решений в виде неполных рядов Фурье [1] и кроме того, как показано в данной работе, их функции Грина связаны между собой с помощью соотношений (12). Решения остальных задач можно получить, используя предложенный в работе метод эквивалентных граничных условий. В качестве эталонной задачи можно выбрать любую из задач группы (Ш_а).

Пример. Для иллюстрации предложенного метода эквивалентных граничных условий, рассмотрим задачу (1)-(3), с граничными условиями вида:

$$\eta|_{x=0} = f_{11}^1(\tau) = H(\tau), \quad u|_{x=0} = 0, \quad \eta|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=1} = 0,$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Рассматриваемая среда – алюминий, имеющий следующие характеристики:

$$C_{3333} = 1.26 \cdot 10^{11} \frac{H}{M^2}, \quad T_0 = 773 K, \quad \rho = 2700 \frac{K\epsilon}{M^3}, \quad D_{33} = 6.71 \cdot 10^{-6} \frac{M^2}{c}, \quad L = 1 M.$$

Результаты численных вычислений для перемещений в различных точках слоя по формулам (5) при количестве точек разбиения $N=100$ и количестве членов рядов Фурье $M=100$ показаны на рис. 1.

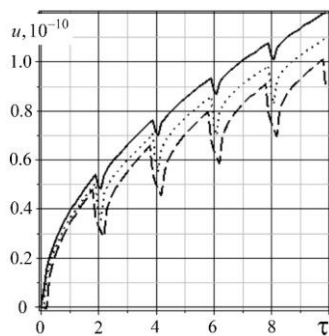


Рис. 1. Зависимость перемещений от времени: $x = 0.05$ – сплошная линия, $x = 0.12$ – точечная линия, $x = 0.18$ – пунктирная линия

Отметим, что при уменьшении вдвое шага разбиения и увеличения вдвое количества членов ряда Фурье графики совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zemskov A. V. Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer / A.V. Zemskov, D.V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Volume 203, Issue 2. – P. 221-238.
2. Tarlakovskii D. V. Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media / D.V. Tarlakovskii, V.A. Vestyak, A.V. Zemskov // Encyclopedia of thermal stress, volume 2, C-D, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, 2014. – P 1064-1071.
3. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям / А.М. Журавский. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1941. – 235 с.
4. Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – М. : Факториал, 1998. – 384 с.

REFERENCE

1. Zemskov, A.V. and Tarlakovskiy, D.V. (2014), "Approximate solution of three-dimensional problem for elastic diffusion in orthotropic layer", Journal of Mathematical Sciences, vol. 203, issue 2, pp. 221-238.
2. Tarlakovskii, D.V., Vestyak, V.A. and Zemskov, A.V. (2014), "Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media", Encyclopedia of thermal stress, vol. 2, C-D, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference, pp. 1064-1071.
3. Zhuravskii, A.M. (1941), *Spravochnik po ellipticheskim funktsiyam* [Handbook of elliptic functions], Akademiya nauk, Moscow.
4. Polyanin, A.D. and Manzhirou, A.V. (1998) *Spravochnik po integral'nyim uravneniyam: Tochnye resheniya* [Handbook of Integral Equations: Exact Solutions], Faktorial, Moscow.

УДК 539.3

РЕЗОНАНСНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ИХ ДЕМПФИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРОВ И АКТУАТОРОМ

¹Киричок И. Ф., д. ф.-м. н., профессор, ²Карнаухова Т. В., к. ф.-м. н., доцент

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина

²Национальный технический университет Украины «КПИ»,
просп. Победы, 37, Киев, 03057, Украина

term@inmech.kiev.ua, karn@inmech.kiev.ua

Представлены результаты исследования вынужденных резонансных осесимметричных колебаний и диссипативного разогрева замкнутой сферической оболочки с пьезоэлектрическими сенсором и актуатором. Исследовано влияние температурной зависимости комплексных характеристик пассивного материала на амплитуду колебаний и температуру диссипативного разогрева. Показана возможность активного