УДК 539.3

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ ЗГИНУ ВАРІАНТА МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН

Зеленський А. Г., к. ф.-м. н., доцент

ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24 а, Дніпропетровськ, 49600, Україна

a.zelensky@mail.ru

Запропонований раніше автором метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними застосовується до неоднорідних диференціальних рівнянь восьмого порядку варіанта математичної теорії пластин. Метод дає можливість звести розв'язування початкового рівняння до розв'язування двох рівнянь Пуассона і двох неоднорідних рівнянь Гельмгольца.

Ключові слова: метод зниження порядку, неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними, згин, варіант математичної теорії не тонких пластин.

О РЕШЕНИИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ СГИБА ВАРИАНТА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН

Зеленский А. Г., к. ф.-м. н., доцент

ГВУЗ «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24 а, Днепропетровск, 49600, Украина

a.zelensky@mail.ru

Предложенный ранее автором метод понижения порядка неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных используется применительно к неоднородным дифференциальным уравнениям восьмого порядка варианта математической теории пластин. Метод позволяет свести решение исходного уравнения к решению двух уравнений Пуассона и двух неоднородных уравнений Гельмгольца.

Ключевые слова: метод понижения порядка, неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, изгиб, вариант математической теории не тонких пластин.

ABOUT THE SOLUTION FOR GOVERNING BENDING EQUATIONS IN A VERSION OF THIN PLATE THEORY

Zelenskiy A. G., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

Department of Structural Engineering and Strength of Materials, Prydniprovska State Academy of Civil Engineering and Architecture Chernyshevsky Street, and 24, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

In this article, the author suggested an approach to solving finite bending equations derived from the mathematical theory version of transverse bending of plates of arbitrary constant thickness. This theory is based on the approach when a three-dimensional problem of the theory of elasticity can be reduced to a two-dimensional one using Reissner variational principle. With this approach, the components of stress-strain state can be represented as Legendre polynomials which are along transverse axis. Boundary conditions in frontal planes can be proximately satisfied in a spatial version of the theory of transverse bending of plates, hence increasing accuracy of a problem solution in contrast to other non-classical theories. The resulting finite equations of the mathematical theory version are interrelated, thus increasing the accuracy order of partial differential equations as the number of terms in series in the approximation of stress-strain state increases.

The proposed version made it possible to find arbitrary precision solutions to boundary problems related to thin/ non-thin plates subjected to arbitrary transverse loading.

In his research, the author used finite equations obtained from taking the first two terms in the expansion of the displacement components. The system of non-homogeneous partial differential equations is of the twelfth order. The author used a system of independent homogeneous equations of fourth order to describe a rotational boundary effect.

The internal stress state and potential boundary effect were determined through a system of non-homogeneous partial differential equations of eighth order. This approach made it possible to reduce the effort in finding the solutions in the system to the general solution of the corresponding homogeneous equation of eighth order of the form $\nabla^4(\nabla^4 + a_2\nabla^2 + a_0)\Phi_0(x, y) = 0$ with respect to function $\Phi_0(x, y)$, where ∇^2 is the Laplace operator, and to finding

a particular solution of two non-homogeneous differential equations of eighth order of the form $\nabla^4(\nabla^4 + a_2\nabla^2 + a_0)\Phi_{ir}(x, y) = \Pi_{iq}(x, y)$ $(i = 1, 3)$ with respect to function $\Phi_{ir}(x, y)$.
Using this approach, it became possible to find a particular solution to a non-homogeneous partial differential equation of eighth order by reducing it to particular solutions of two Poisson equations and two non-homogeneous Helmholtz equations the right side of which could be represented as particular solutions of specific equations of second order. A particular solution for the above non-homogeneous equation of eighth order could be represented as a sum of particular solutions for corresponding (Poisson and Helmholtz) equations.
Key words: reduction of order, non-homogeneous partial differential equation, bending, version of thin plate theory.

ВСТУП

Розв’язування граничних задач на основі класичних теорій пластин та оболонок, які зазнають дії локальних навантажень, мають отвори, різке змінювання механіко-геометричних параметрів, а також при немалій товщині та в інших випадках, що призводять до великого градієнта змінювання напружено-деформованого стану (НДС), як відомо, дають незадовільні результати. Некласичні уточнені теорії пластин та оболонок, які ґрунтовані на різних гіпотезах, для широкого класу граничних задач також не можуть з високою точністю описувати НДС пластин та оболонок, оскільки знаходження компонент НДС з високою довільною точністю в принципі неможливо, що обумовлено зображенням компонент НДС у вигляді, який не враховує всі якісні характеристики змінення НДС по товщині [1]. Отримувані при цьому системи основних диференціальних рівнянь, як правило, мають невисокий порядок. З іншого боку, розв’язування граничних задач у тривимірній постановці пов’язано з великими і, як правило, нездоланними труднощами. Звідси і випливає актуальність дослідження, яка полягає в необхідності розвинення і побудови нових варіантів математичної теорії пластин та оболонок довільної сталої товщини, які бураховували всі компоненти НДС з високою точністю, і розробці ефективних математичних методів розв’язування систем диференціальних рівнянь високого порядку з частинними похідними, які при цьому виникають.

Перші варіанти математичної теорії пластин та оболонок було запропоновано в [2-4]. Надалі математичний підхід в апроксимації компонент НДС у вигляді рядів по товщинній координаті розвивався в [5-8]. У [9] варіант математичної теорії [8] узагальнено для високих наближень при довільному поперечному навантаженні (як при симетричному, так і при кососиметричному) трансверсально-ізотропних пластин довільної сталої товщини. У [8, 9] ураховуються усі компоненти НДС, причому, граничні умови на лицевих площинах задовольняються точно, на відміну від інших теорій. Це суттєво підвищує їх точність. Розв’язування граничних задач за варіантом теорії [9] суттєво уточнює НДС не тільки товстих пластин, а і тонких, які мають високий градієнт змінювання НДС.

Розв’язування неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними високого порядку пов’язано з великими математичними труднощами. Складність розв’язування вказаних рівнянь викликана, зокрема, знаходженням їх частинних розв’язків.

У нашій роботі метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними [10-12] використовується для неоднорідних диференціальних рівнянь парного порядку з частинними похідними, які описують деформований стан трансверсально-ізотропних не тонких пластин. Варіант математичної теорії пластин [9] ґрунтується на методі розкладання усіх компонент напружено деформованого стану в ряди за поліномами Лежандра по товщинній координаті. Тривимірна задача теорії пружності зводиться до двовимірної при допомозі варіаційного принципу Рейснера. Граничні задачі згідно з цим варіантом теорії можуть бути розв’язані з будь-якою точністю, яка зростає зі збільшенням кількості членів у рядах розкладання НДС, що в свою чергу призводить до підвищення порядку диференціальних рівнянь.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Варіант математичної теорії не тонких трансверсально-ізотропних пластин [9] зводиться до розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними $2n$-го порядку ($n = 3, 4, \ldots$) вигляду:

$$\left(\nabla^{2n} + A_1\nabla^{2(n-1)}A_2\nabla^{2(n-2)} + \cdot\ldots\cdot + A_n\right)\Phi(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

де A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – відомі числа; ∇^2 – оператор Лапласа; $f(x,y)$ і $\Phi(x,y)$ – відома та шукана функція двох змінних відповідно.

Оператор лівої частини рівняння (1), згідно з основною теоремою алгебри можна розкласти на множники вигляду $\left(\nabla^2 - k\right)$ і тоді рівняння матиме вигляд:

$$\left(\nabla^2 - k_1\right)\left(\nabla^2 - k_2\right)\ldots\left(\nabla^2 - k_i\right)\ldots\left(\nabla^2 - k_n\right)\Phi(x,y) = f(x,y), \tag{2}$$

де k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – корені відповідного характеристичного рівняння.

Завдання полягає в тому, щоб спростити методику знаходження частинного, а отже, і загального розв'язку рівняння (2).

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЗГИНУ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН У ПЕРЕМІЩЕННЯХ. ФОРМИ ЗАГАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

У [9] наведені основні диференціальні рівняння згину пластин довільної сталої товщини. Система основних диференціальних рівнянь теорії має 12-ий порядок, якщо в рядах розкладання компонент переміщень утримувати перші два члени. Система зводиться до однорідної системи 4-го порядку, яка описує вихровий крайовий ефект:

$$\begin{aligned} &\beta_{112}\nabla^2\psi_1 + \beta_{111}\psi_1 + \beta_{133}\psi_3 = 0; \\ &\beta_{133}\psi_1 + \beta_{332}\nabla^2\psi_3 + \beta_{333}\psi_3 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

і неоднорідної системи 8-го порядку, яка описує внутрішній напружено-деформований стан і потенціальний крайовий ефект типу пограничного шару:

$$\begin{aligned} &\Pi_{11}w_1 + \Pi_{13}w_3 = \Pi_{1q}q; \\ &\Pi_{31}w_1 + \Pi_{33}w_3 = \Pi_{3q}q, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\Pi_{11}, \ldots, \Pi_{3q}$ – диференціальні оператори:

$$\begin{gathered} \Pi_{11} = \mu_{114}\nabla^4; \quad \Pi_{13} = \mu_{114}\nabla^4 + \mu_{132}\nabla^2; \quad \Pi_{1q} = \mu_{12}\nabla^2 - \mu_{10}; \\ \Pi_{31} = \mu_{314}\nabla^4 + \mu_{312}\nabla^2; \quad \Pi_{33} = \mu_{334}\nabla^4 + \mu_{332}\nabla^2 + \mu_{330}; \quad \Pi_{3q} = \mu_{32}\nabla^2 - \mu_{30}; \end{gathered} \tag{5}$$

$\beta_{112}, \ldots, \beta_{333}, \ldots, \mu_{114}, \ldots, \mu_{30}$ – сталі, які залежать від механіко-геометричних параметрів пластини; $q(x,y)$ – довільне зовнішнє поперечне навантаження, $\psi_1(x,y)$, $\psi_3(x,y)$ – шукані вихрові функції, $w_1(x,y)$, $w_3(x,y)$ – шукані складові поперечного переміщення $W(x,y,z)$, яке апроксимується по товщині пластини h у вигляді:

$$W(x,y,z) = P_0(2z/h)w_1(x,y) + P_2(2z/h)w_3(x,y). \tag{6}$$

Тут P_0, P_2 – поліноми Лежандра.

Розв'язування системи (4) зведено до знаходження загального розв'язку однорідного рівняння 8-го порядку відносно деякої функції $\Phi_0(x,y)$:

$$\nabla^2\nabla^2\left(\nabla^2-k_1\right)\left(\nabla^2-k_2\right)\Phi_0\left(x,y\right)=0 \tag{7}$$

і до визначення частинних розв'язків $\Phi_{kr}\left(x,y\right)\left(k=1,3\right)$ двох неоднорідних диференціальних рівнянь 8-го порядку:

$$\nabla^2\nabla^2\left(\nabla^2-k_1\right)\left(\nabla^2-k_2\right)\Phi_k\left(x,y\right)=\Pi_{kq}q\left(x,y\right). \tag{8}$$

Загальні розв'язки $w_1\left(x,y\right)$, $w_3\left(x,y\right)$ системи (4) набудуть вигляду:

$$w_1\left(x,y\right)=\Pi_{33}\left(\Phi_0+\Phi_{1r}\right)-\Pi_{13}\Phi_{3r},\quad w_1\left(x,y\right)=-\Pi_{31}\left(\Phi_0+\Phi_{1r}\right)+\Pi_{11}\Phi_{3r}. \tag{9}$$

Якщо для деякої граничної задачі згину функції $w_1\left(x,y\right)$ і $w_3\left(x,y\right)$ визначені, то, згідно з (6), стане відомою і функція прогину пластини $W\left(x,y,z\right)$ (поперечні переміщення) у будь-якій її точці з координатами $\left(x,y,z\right)$.

Інші (тангенціальні) компоненти переміщень $U\left(x,y,z\right)$ і $V\left(x,y,z\right)$ визначаються так:

$$U\left(x,y,z\right)=P_1\left(2z/h\right)u_1\left(x,y\right)+P_3\left(2z/h\right)u_3\left(x,y\right);$$

$$V\left(x,y,z\right)=P_1\left(2z/h\right)v_1\left(x,y\right)+P_3\left(2z/h\right)v_3\left(x,y\right).$$

Тут $u_1\left(x,y\right),...,v_3\left(x,y\right)$ – складові компонент переміщень, вони виражаються через похідні функцій $w_1\left(x,y\right)$, $w_3\left(x,y\right)$, $q\left(x,y\right)$, $\psi_1\left(x,y\right)$, $\psi_3\left(x,y\right)$, де $\psi_k\left(x,y\right)$ – загальні розв'язки однорідної системи (3), яка зводиться до розв'язування двох рівнянь Гельмгольца відносно деякої функції $\psi\left(x,y\right)$, через яку виражаються $\psi_1\left(x,y\right)$ і $\psi_3\left(x,y\right)$:

$$\psi_1\left(x,y\right)=\left(\beta_{332}\nabla^2+\beta_{333}\right)\psi\left(x,y\right);\quad \psi_3\left(x,y\right)=-\beta_{133}\psi\left(x,y\right).$$

Компоненти напружень виражаються відповідними формулами із [9].

Загальний розв'язок рівняння (7) зображується як сума загальних розв'язків бігармонічного рівняння і двох рівнянь Гельмгольца:

$$\nabla^4\varPhi_{00}(x,y)=0;\ (\nabla^2-k_1)\varPhi_{01}(x,y)=0;\ \ (\nabla^2-k_2)\varPhi_{02}(x,y)=0. \tag{10}$$

Знаходження загальних розв'язків бігармонічного рівняння і рівнянь Гельмгольца дається у відомій літературі і не пов'язане з особливими труднощами. Знаходження частинних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними високого порядку, зокрема 8-го порядку вигляду (8), може бути доволі складним, особливо, якщо праві частини будуть непростими.

І тому надалі зупинимося на методі зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь 8-го порядку (8) варіанта математичної теорії згину не тонких пластин, який дасть можливість звести знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (8) до знаходження частинних розв'язків неоднорідних рівнянь 2-го порядку.

МЕТОД ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 8-ГО ПОРЯДКУ

Розглянемо перше рівняння (8). Запишемо його у вигляді:

$$\nabla^2\nabla^2\left(\nabla^2-k_1\right)\left(\nabla^2-k_2\right)\Phi_1\left(x,y\right)=f_1\left(x,y\right), \tag{11}$$

де

$$f_1(x,y)=\left(\mu_{12}\nabla^2-\mu_{10}\right)q(x,y), \tag{12}$$

а функція $\Phi_1(x,y)$ – шукана функція двох змінних, як частинний розв'язок (11).

Зобразимо частинний розв'язок $\Phi_{1r}(x,y)$ рівняння (11) та відому функцію $f_1(x,y)$ у вигляді:

$$\Phi_{1r}(x,y)=\Phi_{11}(x,y)+\Phi_{12}(x,y); \tag{13}$$

$$f_1(x,y)=f_{11}(x,y)+f_{12}(x,y), \tag{14}$$

де невідомі функції $\Phi_{11}(x,y)$, $\Phi_{12}(x,y)$ – частинні розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\nabla^2\left(\nabla^2-k_1\right)\Phi_{11}(x,y)=f_{11}(x,y); \tag{15}$$

$$\nabla^2\left(\nabla^2-k_2\right)\Phi_{12}(x,y)=f_{12}(x,y), \tag{16}$$

у яких праві частини – функції $f_{11}(x,y), f_{12}(x,y)$ – підлягають визначенню.

Підставляючи (13) в (11) і ураховуючи (14)-(16), та вважаючи справедливою перестановочну властивість операторів лівої частини рівняння (11), дістанемо диференціальне рівняння Пуассона для визначення функції $f_{11}(x,y)$:

$$\nabla^2 f_{11}=\frac{1}{k_2-k_1}\left(\nabla^4-k_1\nabla^2-1\right)f_1, \tag{17}$$

де як функцію $f_{11}(x,y)$ можна взяти частинний розв'язок рівняння (17). Тоді функція $f_{12}(x,y)$ визначиться із (14).

Отже, праві частини диференціальних рівнянь 4-го порядку (15) і (16) стають відомими функціями і задача знаходження частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння 8-го порядку (11) таким чином звелась до визначення частинних розв'язків 2-х неоднорідних диференціальних рівнянь 4-го порядку із частинними похідними (15) і (16). Знайшовши з цих рівнянь їх частинні розв'язки – функції $\Phi_{11}(x,y)$ і $\Phi_{12}(x,y)$, частинний розв'язок $\Phi_{1r}(x,y)$ неоднорідного рівняння (11) визначиться як сума $\Phi_{11}(x,y)$ і $\Phi_{12}(x,y)$ згідно з (13).

Спростимо знаходження частинного розв'язку рівняння (17), урахувавши (12). Матимемо:

$$\nabla^2 f_{11}=\left(a_6\nabla^6+a_4\nabla^4+a_2\nabla^2+a_0\right)q(x,y), \tag{18}$$

де

$$a_6=\mu_{12}/k_{21}, \quad a_4=\left(-\mu_{10}-k_1\mu_{12}\right)/k_{21},$$

$$a_2=\left(k_1\mu_{10}-\mu_{12}\right)/k_{21}, \quad a_0=\mu_{10}/k_{21}, \quad k_{21}=k_2-k_2.$$

Розглянемо два неоднорідних рівняння:

$$\nabla^2\varphi_{11}=\left(a_6\nabla^6+a_4\nabla^4+a_2\nabla^2\right)q(x,y); \tag{19}$$

$$\nabla^2\varphi_{12}=a_0q(x,y). \tag{20}$$

Частинний розв'язок рівняння (19): $\varphi_{11}=\left(a_6\nabla^4+a_4\nabla^2+a_2\right)q(x,y)$.

Тоді частинний розв'язок $f_{11}(x,y)$ рівняння (18) буде:

$$f_{11}(x,y)=\left(a_6\nabla^4+a_4\nabla^2+a_2\right)q(x,y)+\varphi_{12}(x,y), \tag{21}$$

де $\varphi_{12}(x,y)$ – частинний розв'язок рівняння Пуассона (20).

Функція $f_{12}(x,y)$ знайдеться з урахуванням (12), (14) і (21):

$$f_{12}(x,y)=\left(-a_6\nabla^4+(\mu_{12}-a_4)\nabla^2-(\mu_{10}+a_2)\right)q(x,y)-\varphi_{12}(x,y). \tag{22}$$

НЕОДНОРІДНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ

На основі викладеної вище методики неоднорідне рівняння (15) розділяється на два неоднорідних рівняння 2-го порядку відносно шуканих функцій $\Phi_{111}(x,y)$ і $\Phi_{112}(x,y)$:

$$\nabla^2\Phi_{111}=f_{111},\quad \left(\nabla^2-k_1\right)\Phi_{112}=f_{112}, \tag{23}$$

де

$$f_{111}(x,y)=\frac{\left(\nabla^2-1\right)}{k_1}f_{11}(x,y),\quad f_{112}(x,y)=\frac{\left(1+k_1-\nabla^2\right)}{k_1}f_{11}(x,y). \tag{24}$$

Частинний розв'язок $\Phi_{11}(x,y)$ рівняння (15) матиме вигляд суми частинних розв'язків $\Phi_{111}(x,y)$ і $\Phi_{112}(x,y)$ рівнянь (23):

$$\Phi_{11}(x,y)=\Phi_{111}(x,y)+\Phi_{112}(x,y). \tag{25}$$

Перше рівняння (23) з урахуванням (24), (21) і (20) набуде вигляду:

$$\nabla^2\Phi_{111}=\left(b_6\nabla^6+b_4\nabla^4+b_2\nabla^2\right)q(x,y)+\left(b_0+a_0/k_1\right)q(x,y)-\varphi_{12}(xy)/k_1, \tag{26}$$

де $b_0=-a_2/k_1$, $b_2=(a_2-a_4)/k_1$, $b_4=(a_4-a_6)/k_1$, $b_6=a_6/k_1$.

Частинний розв'язок рівняння (26) (тобто першого рівняння (23)) виглядатиме як:

$$\Phi_{111}(x,y)=\left(b_6\nabla^4+b_4\nabla^2+b_2\right)q(x,y)+\varphi_{112}(x,y), \tag{27}$$

де $\varphi_{112}(x,y)$ – частинний розв'язок рівняння Пуассона

$$\nabla^2\varphi_{112}=\left(b_0+a_0/k_1\right)q(x,y)-\varphi_{12}(xy)/k_1. \tag{28}$$

Друге рівняння (23) (неоднорідне рівняння Гельмгольца), враховуючи (24), (21) і (20), набуде вигляду:

$$\left(\nabla^2-k_1\right)\Phi_{112}=\left(c_6\nabla^6+c_4\nabla^4+c_2\nabla^2+\left(c_0-a_0/k_1\right)\right)q(x,y)+(1+k_1)\varphi_{12}(xy)/k_1, \tag{29}$$

де

$$c_0=\frac{a_2(1+k_1)}{k_1},\quad c_2=\frac{a_4(1+k_1)-a_2}{k_1},\quad c_4=\frac{a_6(1+k_1)-a_4}{k_1},\quad c_6=-\frac{a_6}{k_1}.$$

Отже, після знаходження частинних розв'язків $\varphi_{12}(x,y)$ і $\varphi_{112}(x,y)$ рівнянь Пуассона (20) і (28) відповідно, визначається частинний розв'язок $\Phi_{111}(x,y)$ першого рівняння (23) згідно з (27). а з неоднорідного рівняння Гельмгольца (29) знаходиться частинний розв'язок $\Phi_{112}(x,y)$. Після цього визначається частинний розв'язок $\Phi_{11}(x,y)$ рівняння (15) як сума $\Phi_{111}(x,y)$ і $\Phi_{112}(x,y)$ згідно з (25).

Аналогічно знаходиться частинний розв'язок $\Phi_{12}(x,y)$ неоднорідного рівняння (16). Частинний розв'язок $\Phi_1(x,y)$ початкового рівняння (11) визначиться як сума $\Phi_{11}(x,y)$ і $\Phi_{12}(x,y)$ згідно з (13).

Частинний розв'язок другого неоднорідного рівняння (8) отримаємо заміною в попередніх викладках у коефіцієнтах μ першого індекса з 1 на 3.

Після знаходження загального і частинних розв'язків рівнянь (7) і (8) визначаються складові компоненти $w_1(x,y)$ і $w_3(x,y)$ поперечного переміщення згідно з (9). Компоненти переміщень, деформацій і напруженого стану знаходяться за відповідними формулами розробленого варіанта математичної теорії [9]. При цьому сталі інтегрування, які входять у вирази для компонент НДС, визначаються з урахуванням крайових умов.

ВИСНОВКИ

1. Запропонований метод розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними високого парного порядку дає можливість звести визначення загального розв'язку неоднорідного рівняння до знаходження загальних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку (Пуассона і Гельмгольца), що може значно спростити процедуру визначення загальних розв'язків, а отже і спростити розв'язування граничних задач для не тонких пластин на основі використовуваного варіанта математичної теорії.
2. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь може використовуватися також при розв'язуванні граничних задач для пластин та оболонок сталої товщини за класичною, некласичною та на основі інших варіантів математичних теорій. Неоднорідні рівняння можуть бути зі сталими або ж зі змінними коефіцієнтами. Достатньо тільки, щоб оператор лівої частини диференціального рівняння можна було зобразити у вигляді добутку операторів нижчого порядку.
3. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь дає можливість значно спростити якісне дослідження таких рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Немиш Ю. Н. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор / Ю.Н. Немиш, И.Ю. Хома // Прикл. механіка. – 1991. – 29, №11. – С. 3-27.
2. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек / И.Н. Векуа // Тр. Тбилисского матем. ин-та. – 1955. – Т. 21. – С. 191-293.
3. Cicala P. Sulla teria elastica della plate sottile / P. Cicala // Giorn genio Civile. – 1959. – 97, №4. – P. 238-256.
4. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек / Н.А. Кильчевский. – К. : Изд-во АН УССРЮ, 1963. – 354 с.
5. Понятовский В. В. Уравнения теории анизотропных пластинок / В.В. Понятовский // Исследование по упругости и пластичности. – Л. : ЛГУ, 1965. – №4. – С. 3-28.
6. Хома І. Ю. Загальний розв'язок системи рівнянь рівноваги згину пластин теорії І.Н. Векуа в третьому наближенні / І.Ю. Хома // Доповіді АН УССР. Сер. А. – 1972. – №1. – С. 83-86.
7. Плеханов А. В. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины / А.В. Плеханов, А.П. Прусаков // Механика твердого тела. – 1976. – №3. – С. 84-90.

8. Прусаков А. П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины / А.П. Прусаков // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, №12. – С. 51-58.

9. Зеленський А. Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит / А.Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – Т. 17, №5. – 2009. – Механіка. В. 13, т. 2. – С. 54-62.

10. Зеленський А. Г. До питання про розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь / А.Г. Зеленський // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – 2011. – Vol. 19. – P. 263-266.

11. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини / А.Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – Т. 20, №5. – 2012. – Механіка. В. 16, т. 2/1. – С. 60-66.

12. Зеленський А. Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними / А.Г. Зеленський // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Зб. наук. праць. – В. 13.– 2012. – С. 188-196.

REFERENCES

1. Nemish, Yu.N. and Homa, I.Yu. (1991), "Stress-state non-thin shells and plates. Generalized theory. Review", *Prikl. mehanIka*, 29, no. 11, pp. 3-27.

2. Vekua, I.N. (1995), "A method for calculating prismatic shells", *Tr. Tbilisskogo matem. in-ta*, vol. 21, pp. 191-293.

3. Cicala, P. (1959), "Sulla teria elastica della plate sottile", *Giorn genio Civile*, 97, no. 4, pp. 238-256.

4. Kilchevskiy, N.A. (1963), *Osnovy analiticheskoy mehaniki obolochek* [Fundamentals of Analytical Mechanics shells], Izd-vo AN USSR, Kiev.

5. Ponyatovskiy, V.V. (1965), "The equations of the theory of anisotropic plates", *Issledovanie po uprugosti i plastichnosti*, no. 4, pp. 3-28.

6. Homa, I.Yu. (1972), "The general solution of system equilibrium equations of the theory of plate bending I.N. Vekua the third approach", *DopovIdI AN USSR, Ser. A*, no.1, pp. 83-86.

7. Plehanov, A.V. and Prusakov, A.P. (1976), "An asymptotic method for constructing a theory of bending of plates of medium thickness", *Mehanika tverdogo tela*, no. 3, pp. 84-90.

8. Prusakov, A.P. (1993), "On the construction of equations of the bending of the twelfth order for transversely isotropic plate", *Prikl. Mehanika*, vol. 29, no. 12, pp. 51-58.

9. Zelenskiy, A.G. (2009), "Models of the analytic theory of transversely isotropic plates", *Visnik Dnipropetr. un-tu*, vol. 17, no. 5, *Mekhanika*, issue 13, vol. 2, pp. 54-62.

10. Zelenskiy, A.G. (2011), "On the solution of the inhomogeneous differential equations", *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, vol 19, pp. 263-266.

11. Zelenskiy, A.G. (2012), "Method reduction procedure inhomogeneous differential equations with partial derivatives theory plates medium thickness", *Visnik Dnipropetr. un-tu*, vol. 20, no. 5, Mekhanika, issue 16, vol. 2/1, pp. 60-66.

12. Zelenskiy, A.G. (2012), "Method reduction procedure inhomogeneous differential equations with partial derivatives", *Metodi rozv'yazuvannya prikladnih zadach mehaniki deformivnogo tverdogo tila, Zb. nauk. prats*, issue 13, pp. 188-196.