

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЗБУРЕННЯ ДО ДВОМІРНИХ ЗАДАЧ ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

¹Кагадій Т. С., д. ф.-м. н., професор, ²Білова О. В., к. ф.-м. н., доцент

¹Національний гірничий університет,
просп. Карла Маркса, 19, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна

²Національна металургійна академія України,
просп. Гагаріна, 4, м. Дніпропетровськ, 49600, Україна

okbelova@rambler.ru

У роботі показано, як застосування методу збурення дозволяє отримати асимптотичні розв'язки двомірних задач нелінійної теорії пружності. Наведені основи методу та приклади. Проведено порівняння результатів з відомими для аналогічних лінійних випадків.

Ключові слова: асимптотичний метод, анізотропний матеріал, нелінійна теорія пружності.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЯ К ДВУХМЕРНЫМ ЗАДАЧАМ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

¹Кагадий Т. С., д. ф.-м. н., профессор, ²Белова О. В., к. ф.-м. н., доцент

¹Национальный горный университет,
просп. Карла Маркса, 19, г. Днепропетровск, 49600, Украина

²Национальная металлургическая академия Украины,
просп. Гагарина, 4, г. Днепропетровск, 49600, Украина

okbelova@rambler.ru

В данной работе показано, как применение метода возмущения позволяет получить асимптотические решения двухмерных задач нелинейной теории упругости. Приведены основы метода и примеры. Проведено сравнение результатов с известными для аналогичных линейных случаев.

Ключевые слова: асимптотический метод, анизотропный материал, нелинейная теория упругости.

APPLICATION OF THE METHOD OF PERTURBATIONS TO TWO-DIMENSIONAL TASKS OF PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF THE ELASTICITY

Kagadiy T. S., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
Belova O. V., Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor

¹National mountain university,
Karl Marx Avenue, 19, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

²National metallurgical academy of Ukraine,
Gagarin Avenue, 4, Dnepropetrovsk, 49600, Ukraine

okbelova@rambler.ru

In the given work it is shown, how application of a method of perturbations allows to receive asymptotic solutions of two-dimensional tasks of the nonlinear theory of elasticity. Bases of a method and examples are reduced. Comparison of outcomes with known for similar linear cases is lead. Two-dimensional tasks for orthotropic skew fields with rectilinear anisotropy were researched in many works. Thus numerical methods were applied both analytical, and. The packages of computer programs developed for such tasks such, as ADINA, NASTRAN are known. Also programs are widely used the ABAQUS, ANSYS. Account of nonlinearity, anisotropy of modern materials for which the deviation from the law of Hooke takes place, considerably hampers searching the basic performances of the is intense-deformed condition. The meeting tasks of mechanics connected with nonlinearity, lead to significant mathematical difficulties. Application asymptotic methods enable to solve the given problem. As a result of a solution of some tasks of physically nonlinear theory of elasticity it is shown, that in a zero approximation it is possible to receive analytical solutions of the complicated mixed tasks. It is shown, that it is possible to reduce a nonlinear boundary value problem to a sequential solution of tasks of a potential theory. As is known, physical nonlinearity of a material can be mapped differently in expressions of connection of strains and voltages. In work the classical case when the nonlinear part is noted in an explicit aspect in shearing stresses is considered. Comparison of outcomes of similar tasks for linear and nonlinear cases is lead.

Key words: asymptotic method, anisotropic material, the nonlinear theory of elasticity.

ВСТУП

Двомірні задачі для ортотропних тіл з прямолінійною анізотропією досліджувались у багатьох роботах достатньо ретельно та всебічно, як за допомогою аналітичних, так і чисельних методів. Відомі розроблені для таких задач пакети комп'ютерних програм. Наприклад, у скінченно-елементних комплексах програм, таких, як ADINA, NASTRAN, використовуються різноманітні методи розв'язання великих систем рівнянь. Ефективним є фронтальний метод, реалізований у програмах ABAQUS, ANSYS та ітераційні методи [1]. Урахування нелінійності, анізотропії сучасних матеріалів, для яких має місце відхилення від закону Гука, суттєво ускладнює пошук основних характеристик напружено-деформованого стану. Відповідні задачі механіки, пов'язані з нелінійністю, приводять до нездоланих математичних труднощів. Застосування асимптотичних методів, наприклад, методу збурення, надає можливість вирішити це питання [2].

Мета статті – розв'язання деяких задач фізично нелінійної теорії пружності за допомогою запропонованого авторами методу збурення. Показати, що в нульовому наближенні вдається отримати аналітичні розв'язки навіть дуже складних мішаних задач [3]. Провести порівняння розв'язків нелінійних задач з їх лінійними аналогами [4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай напруження та деформації пов'язані такими аналітичними залежностями:

$$\sigma_{11} = A_1 (u_x)^k, \quad \sigma_{22} = A_2 (\vartheta_y)^k, \quad \delta_{12} = A_{12} (u_y + \vartheta_x)^k, \quad (1)$$

де A_1 , A_2 , (A_{12}) – сталі матеріалу, аналоги модулів пружності (зсуву) в лінійному ортотропному пружному матеріалі вздовж головних напрямків анізотропії, які співпадають з декартовими координатами x , y ; k – стала.

Після підстановки в рівняння рівноваги виразів (1) маємо:

$$(u_x)_x^k + \varepsilon (u_y + \vartheta_x)_y^k = 0, \quad \varepsilon (u_y + \vartheta_x)_x^k + q (\vartheta_y)_y^k = 0, \quad (\varepsilon = A_{12}/A_1, q = A_2/A_1). \quad (2)$$

Тепер питання про визначення напружено-деформованого стану пружного фізично нелінійного ортотропного тіла зведено до інтегрування рівнянь (2) при відповідних крайових умовах.

Для реальних ортотропних матеріалів $\varepsilon < 1$ і цей параметр можна розглядати як малий. Тому, як і раніше, вводяться перетворення:

$$\xi_i = \gamma_i^{(i)} \varepsilon^{\alpha_i^{(i)}} x, \quad \eta_i = \gamma_2^{(i)} \varepsilon^{\alpha_2^{(i)}} y, \quad u^{(i)} = \varepsilon^{\beta_1^{(i)}} U^{(i)}, \quad v^{(i)} = \varepsilon^{\beta_2^{(i)}} V^{(i)}$$

($i = 1, 2$, $\gamma_i = 1$), які визначають два типи напружено-деформованого стану.

У нульовому наближенні по ε маємо ($q = 1$):

$$(U_{\xi_1}^{1,0})_{\xi_1}^k + (U_{\eta_1}^{1,0})_{\eta_1}^k = 0, \quad (V_{\eta_1}^{1,0})_{\eta_1}^k + (U_{\eta_1}^{1,0})_{\xi_1}^k = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{11,0}^{(1)} = A_1 \varepsilon^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} (U_{\xi_1}^{1,0})^k, \quad \sigma_{22,0}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{12,0}^{(1)} = A_{12} (U_{\eta_1}^{1,0})^k,$$

$$(U_{\xi_2}^{2,0})_{\xi_2}^k + (V_{\xi_2}^{2,0})_{\eta_2}^k = 0, \quad (V_{\xi_2}^{2,0})_{\xi_2}^k + (V_{\eta_2}^{2,0})_{\eta_2}^k = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_{11,0}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = A_2 \varepsilon^{\frac{\kappa}{1+\kappa}} (V_{\eta_2}^{2,0})^k, \quad \sigma_{12,0}^{(2)} = A_{12} (V_{\xi_2}^{2,0})^k.$$

Повне дотичне напруження $\sigma_{12,0} = \sigma_{12,0}^{(1)} + \sigma_{12,0}^{(2)}$.

Якщо буде знайдена функція $U^{1,0}$ з першого рівняння в (3), то $V^{1,0}$ з другого рівняння визначається простим інтегруванням. Аналогічно для функцій $V^{2,0}$ і $U^{2,0}$ з рівнянь (4). Але виникає питання: як розв'язувати перше рівняння в (3), або друге в (4). Для цього запропоновано метод збурення. Вважаючи $k=1-\varepsilon_1$, де ε_1 – деякий «малий» параметр, введемо нові незалежні змінні:

$$\xi_1^* = \xi_1 + \varphi_1(\xi_1, \eta_1), \quad \eta_1^* = \eta_1 + \Psi_1(\xi_1, \eta_1), \quad (5)$$

і представимо функції $U^{1,0}$, $V^{1,0}$, φ_1 , ψ_1 у вигляді рядів по параметру ε_1 :

$$U^{1,0}(V^{1,0}) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_1^j u_1^{(j)}(v_1^{(j)}), \quad \varphi_1(\psi_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_1^j \varphi_1^{(j)}(\psi_1^{(j)}). \quad (6)$$

Тоді з першого рівняння в (3) для нульового та першого наближень по ε_1 матимемо, що основні функції знаходяться з рівнянь Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial \xi_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial \eta_1^{*2}} = 0 \quad (i=0,1), \quad (7)$$

якщо функції φ_1^1 , ψ_1^1 задовольняють співвідношенням:

$$\frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \xi_1^*} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_1^*} \right|, \quad \frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \eta_1^*} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\partial u_1^0}{\partial \eta_1^*} \right|, \quad \frac{\partial \Psi_1^1}{\partial \xi_1^*} = -\frac{\partial \varphi_1^1}{\partial \eta_1^*}, \quad (8)$$

а допоміжні функції визначаються через основні таким способом:

$$\frac{\partial^2 v_1^0}{\partial \eta_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial \xi_1^* \partial \eta_1^*} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v_1^1}{\partial \eta_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial \xi_1^* \partial \eta_1^*} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial \xi_1^* \partial \eta_1^*} \ln \left| \frac{\partial u_1^0 / \partial \xi_1^*}{\partial u_1^0 / \partial \eta_1^*} \right| = 0. \quad (10)$$

Для другого напружено-деформованого стану маємо аналогічні результати. Показана можливість сформулювати крайові умови для основних функцій, зв'язок між двома типами напружено-деформованого стану відбувається через межові умови по дотичних напруженнях. Оскільки в нульовому наближенні по параметру ε вдається отримати аналітичні розв'язки навіть дуже складних мішаних задач, то основною проблемою є знаходження функцій φ_1^1 , ψ_1^1 (та аналогічних з індексом два), які залежать від розв'язку тієї чи іншої задачі в нульовому наближенні. Але й ця проблема зведена до простого інтегрування. Отже, нелінійна крайова задача знову зводиться до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу. Розв'язано задачу про фізично нелінійну напівплощину під впливом нормального навантаження виду $\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}$. Знайдені значення переміщень та напружень. Наприклад, нормальні напруження при $t_2 = 0$, ($\eta_1 = \eta_1^* = y = 0$) мають вигляд:

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi \alpha} \left(\frac{1}{1+t} + \varepsilon_1 \left[B \frac{t_1 - t_1^*}{(1+t_1)(1+t_1^*)} + \frac{\ln(1+t_1)}{2(1+t_1)} \right] \right),$$

$$t_1^* = t_1 + \varepsilon_1 \left[t_1 \left(B - \frac{1}{4} \ln \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (1+t_1) \ln(1+t_1) \right], \quad (11)$$

$$t_1 = \xi/\alpha, \quad t_2 = \eta_1/\alpha, \quad B = \ln(A_1^{-1}P_0/\pi\alpha)/2.$$

На рис. 1 залежно від координати t_1 проведено порівняння результатів для лінійного та нелінійного випадків. Представлені напруження $\sigma_1 = -(\pi\alpha/P_0) \cdot \sigma_{11}(t_1, 0)$, де $\sigma_{11}(t_1, 0)$ визначається з формули (11) ($B = 0$, $\varepsilon_1 = 2/3$, крива 1 відповідає лінійному матеріалу).

Коли B збільшується, σ_1 зменшується при малих значеннях t_1 . Якщо B зменшується, то напруження веде себе навпаки. Коли параметр ε_1 збільшується (зменшується), σ_1 збільшується (зменшується).

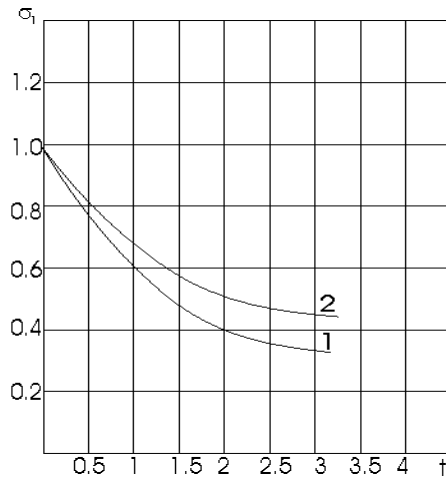


Рис. 1

При розв'язанні деяких задач розглядається напружено-деформований стан пластинок з криволінійною анізотропією, головні напрямки якої співпадають з криволінійними ізометричними координатами ξ , η , такими, що:

$$x = \operatorname{Re}[\omega(\zeta)] = x(\xi, \eta), \quad y = \operatorname{Im}[\omega(\zeta)] = y(\xi, \eta), \quad z = \omega(\zeta), \quad (12)$$

$$(z = x + iy, \zeta = e^{\xi+i\eta}, i = \sqrt{-1}).$$

Питання про напружено-деформований стан пружної анізотропної пластинки зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги і сумісності деформацій:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \Gamma_{11}^1 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2\Gamma_{22}^2 \tau = 0,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + 2\Gamma_{11}^1 \tau = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 (H^2 e_{22})}{\partial \xi^2} - 3\Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{22})}{\partial \xi} - \Gamma_{11}^1 \frac{\partial (H^2 e_{11})}{\partial \xi} + 2H^2 \left[(\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{22}^2)^2 \right] (e_{11} + e_{22}) = 0,$$

при відповідних крайових умовах (H – параметр Ламе).

Для випадку полярних координат (циліндрична анізотропія) маємо:

$$\omega(\zeta) = R\zeta, \quad x = \operatorname{Re}^\xi \cos \eta, \quad y = \operatorname{Re}^\xi \sin \eta; \quad H = \operatorname{Re}^\xi,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \xi} = 1, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad R = \operatorname{const}. \quad (14)$$

Враховуючи залежності (1) та рівняння

$$e_{11} = \frac{1}{\text{Re}^\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \quad e_{22} = \frac{1}{\text{Re}^\xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right), \quad e_{12} = \frac{1}{\text{Re}^\xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)$$

одержимо

$$\sigma_{11} = A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^\kappa, \quad \sigma_{22} = A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right)^\kappa, \quad \sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)^\kappa, \quad (15)$$

і рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^\kappa + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - v \right)^\kappa - q \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right)^\kappa + (1 - \kappa) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^\kappa &= 0, \\ q \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right)^\kappa + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)^\kappa - \varepsilon (2 - \kappa) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right)^\kappa &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Після розщеплення напружено-деформованого стану на дві складові з різними властивостями, в нульовому наближенні по ε матимемо

$$\begin{aligned} \left(U_{\xi_1}^{1,0} \right)_{\xi_1}^\kappa + \left(U_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa - q \left(V_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa &= 0, \quad q \left(V_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa = 0, \\ \sigma_{11}^{1,0} = \varepsilon^{-\frac{\kappa}{1+\kappa}} A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_1} \left(U_{\xi_1}^{1,0} \right)_{\xi_1}^\kappa, \quad \sigma_{22}^{1,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_1} \left(V_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa, \\ \sigma_{12}^{1,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_1} \left(U_{\eta_1}^{1,0} \right)_{\eta_1}^\kappa, \\ \left(U_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa = 0, \quad q \left(V_{\eta_2}^{2,0} \right)_{\eta_2}^\kappa + \left(V_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa &= 0, \\ \sigma_{11}^{2,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_2} \left(U_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa, \quad \sigma_{22}^{2,0} = \varepsilon^{-\frac{\kappa}{1+\kappa}} A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_2} \left(V_{\eta_2}^{2,0} \right)_{\eta_2}^\kappa, \\ \sigma_{12}^{2,0} = \varepsilon^{-\kappa} A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi_2} \left(V_{\xi_2}^{2,0} \right)_{\xi_2}^\kappa. \end{aligned}$$

Після введення нових змінних (5) та знаходження функцій U , V , φ , ψ у вигляді рядів (6) в нульовому та першому наближеннях, як і в попередніх випадках, приходимо до інтегрування рівнянь Лапласа відносно основних функцій. Функції φ_1^1 , ψ_1^1 задовольняють співвідношенням (8). Показано можливість постановки граничних задач для основних функцій.

Якщо напружено-деформований стан не залежить від координати η , тоді рівняння (16) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa - q(u)^\kappa + (1 - \kappa) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa + (2 - \kappa) \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

При цьому

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = A_1 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa, \quad \sigma_{22} = A_2 R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} u, \\ \sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa \xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa. \end{aligned} \quad (18)$$

Якщо дотичні напруження дорівнюють нулю, тоді система (17) переходить в одне рівняння

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa - q(u)^\kappa + (1-\kappa) \left(\frac{du}{d\xi} \right)^\kappa = 0. \quad (19)$$

Розшукуючи u у вигляді рядів по параметру ε_1 (якщо $k = 1 - \varepsilon_1$), одержимо, що в кожному наближенні треба розв'язувати звичайне лінійне диференціальне рівняння, у правій частині якого містяться відомі функції, знайдені в попередніх наближеннях.

Якщо переміщення $u = 0$, тоді система (7) переходить в рівняння

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa + (2-\kappa) \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa = 0, \quad (20)$$

а співвідношення (18) мають вигляд:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = A_{12} R^{-\kappa} e^{-\kappa\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa. \quad (21)$$

Загальний розв'язок рівняння (20) легко знаходиться і матиме вигляд:

$$v = -C \frac{\kappa}{2} e^{-\left(\frac{\kappa}{2}-1\right)\xi} + C_1 e^\xi, \quad (22)$$

де C , C_1 – довільні сталі, що знаходяться з крайових умов.

Треба зауважити, що фізична нелінійність матеріалу може по-різному відобразитися у виразах зв'язку деформацій та напружень [5]. Розглянуто, зокрема, класичний випадок, коли нелінійна частина записана в явному вигляді в дотичних напруженнях:

$$\sigma_{11} = A_1 e_{11}, \quad \sigma_{22} = A_2 e_{22}, \quad \sigma_{12} = A_{12} (e_{12} + C_2 e_{12}^\kappa), \quad (\kappa > 1), \quad (23)$$

де C_2 – деяка стала. Якщо напружений стан не залежить від координати η , тоді рівняння рівноваги набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\xi^2} - qu &= 0, \\ \frac{d}{d\xi} \left[\frac{dv}{d\xi} - v + C_2 R^{-\kappa+1} e^{-(\kappa-1)\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa \right] + \left[\frac{dv}{d\xi} - v + C_2 R^{-\kappa+1} e^{-(\kappa-1)\xi} \left(\frac{dv}{d\xi} - v \right)^\kappa \right] &= 0, \\ q &= A_2 / A_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Після введення функції $\frac{dv}{d\xi} - v = f(\xi, \kappa)$ друге рівняння з (24) буде мати вигляд:

$$f(\xi, \kappa) + C_2 R^{-\kappa+1} e^{-(\kappa-1)\xi} f^\kappa(\xi, \kappa) = D_0 e^{-\xi}, \quad (25)$$

де D_0 – довільна стала.

Якщо припустити, що $k = 3$, тоді

$$f^3(\xi) + C_2^{-1} R^2 e^{2\xi} f(\xi) - D_0 C_2^{-1} R^2 e^\xi = 0. \quad (26)$$

Якщо $k = 1 - \varepsilon_1$, тоді маємо

$$f(\xi) + C_2 R^{-\varepsilon_1} e^{-\varepsilon_1 \xi} f^{1+\varepsilon_1}(\xi) = D_0 e^{-\xi}. \quad (27)$$

Розкладаючи $f(\xi)$ в ряд за степенями ε_1 , для нульового та першого наближень одержимо:

$$f_0(\xi) = \frac{D_0}{1+C_2} e^{-\xi}, \quad f_1(\xi) = -(D_0^1 - D_0^{11}\xi) e^{-\xi},$$

$$D_0^1 = \frac{C_2 D_0}{(1+C_2)^2} \ln \left| \frac{D_0 R^{-1}}{1+C_2} \right|, \quad D_0^{11} = \frac{2C_2 D_0}{(1+C_2)^2}. \quad (28)$$

Відповідні цим наближенням зміщення мають вигляд:

$$v^0 = -\frac{D_0}{2(1+C_2)} e^{-\xi} + D_1 e^{\xi}, \quad v^1 = \left(\frac{D_0^1}{2} - \frac{D_0^{11}}{4} - \frac{D_0^{11}}{2} \xi \right) e^{-\xi} + D_1^1 e^{\xi},$$

а повне переміщення можна записати так:

$$v = v^0 + \varepsilon_1 v^1 + \dots = (A_1 + A_1^1 \xi) e^{-\xi} + B e^{\xi} + \dots,$$

$$A_1 = -\frac{D_0}{2(1+C_2)} + \varepsilon_1 \left(\frac{D_0^1}{2} - \frac{D_0^{11}}{4} \right), \quad A_1^1 = -\varepsilon_1 \frac{D_0^{11}}{2}, \quad B = D_1 + \varepsilon_1 D_1^1.$$

Аналогічно одержуються і більш високі наближення для $f(\xi)$ та v , у кожному з яких множником при $e^{-\xi}$ буде многочлен, порядок якого на одиницю вище, ніж у попередньому наближенні.

ВИСНОВКИ

Застосування асимптотичних методів, наприклад, запропонованого авторами методу збурення, надає можливість вирішити питання щодо розв'язання деяких задач фізично нелінійної теорії пружності. Показано, що в нульовому наближенні вдається отримати аналітичні розв'язки навіть дуже складних мішаних задач. Проведено порівняння розв'язків нелінійних задач з їх лінійними аналогами. Показано, як за допомогою методу збурення можна звести нелінійну крайову задачу до послідовного розв'язання задач теорії потенціалу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Gavrilyachenko T. M. "Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple" (Разработка интерфейса для решателя нелинейных краевых задач с использованием Maple) / Т.М. Gavrilyachenko, М.І. Karyakin, D.Y. Sukhov ; IEEE Computer Society, Los Alamitos-Washington-Tokyo, Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008) ISBN 978-0-7695-3423-1. – P. 284-291.
2. Маневич Л. И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела / Л.И. Маневич, А.В. Павленко, С.Г. Коблик. – К. : Вища школа, 1982. – 152 с.
3. Кагадий Т. С. Метод возмущений в механике упругих анизотропных и композиционных материалов / Т.С. Кагадий. – Днепропетровск : РИК НГА України, 1998. – 260 с.
4. Павленко А. В. Применение асимптотического метода к решению плоских задач теории упругости / А.В. Павленко, Т.С. Кагадий, О.В. Белова // «Theoretical foundation of civil engineering – XX» Polish-Ukrainian-Transaction, September, 2012. – Warsaw, 2012. – P. 251-257.
5. Александров В. М. Две задачи со смешанными граничными условиями для упругой ортотропной полосы / В.М. Александров // Прикл. механ. матем. – 2006.– Т. 70, №1. – С. 139-149.

REFERENCES

1. Gavriyachenko, T.M., Karyakin, M.I. and Sukhov D.Y. (2008), “Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple”, *IEEE Computer Society, Los Alamitos-Washington-Tokyo, Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008)* ISBN 978-0-7695-3423-1, pp. 284-291.
2. Manevich, L.I., Pavlenko, A.V. and Koblik, S.G. (1982), *Asimptoticheskiy metod v teorii uprugosti ortotropnogo tela* [Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field], Vusha shkola, Kiev.
3. Kagadiy, T.S. (1998), *Metod vozmuscheniy v mekhanike uprugikh anizotropnykh i kompozicionnykh materialov* [Method of perturbations in the mechanics of elastic anisotropic and composite materials], RIK NGA Ukraina, Dnepropetrovsk.
4. Pavlenko, A.V., Kagadiy, T.S. and Belova, O.V. (2012), “Application of an asymptotic method to a solution of flat problems{tasks} of the theory of an elasticity”, “*Theoretical foundation of civil engineering – XX*” Polish–Ukrainian–Transaction, September, 2012, Warsaw, pp. 251-257.
5. Alexandrov, V.M. (2006), “Two tasks with the mixed boundary conditions for an elastic orthotropic band”, *Prikl. mech. mathem.* vol. 70, no. 1, pp. 139-149.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ОСНОВАНИЮ УСИЛИЙ

Калоеров С. А., д. ф.-м. н., профессор, Занько А. И., аспирант, Кошкин А. А., аспирант

*Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001, Украина*

kaloerov@mail.ru

С использованием комплексных потенциалов решена задача об изгибе конечной плиты с произвольными эллиптическими отверстиями под действием усилий, приложенных к основанию. Для круговой кольцевой плиты проведены численные исследования с анализом влияния анизотропии и способа загрузки и подкрепления контуров на значения изгибающих моментов.

Ключевые слова: комплексные потенциалы теории изгиба плит, полиномы Фабера, ряды Лорана, обобщенный метод наименьших квадратов.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВИГІН БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ПЛИТ ПІД ДІЄЮ РОЗПОДІЛЕНИХ ПО ОСНОВІ ЗУСИЛЬ

Калоеров С. О., д. ф.-м. н., професор, Занько А. І., аспірант, Кошкін А. О., аспірант

*Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, м. Донецьк, 83001, Україна*

kaloerov@mail.ru

З використанням комплексних потенціалів розв'язана задача про вигин кінцевої плити з довільними еліптичними отворами під дією зусиль, прикладених до основи. Для кругової кільцевої плити проведені чисельні дослідження з аналізом впливу анізотропії і способу завантаження і підкріплення контурів на значення згинальних моментів.

Ключові слова: комплексні потенціали теорії згину плит, поліноми Фабера, ряди Лорана, узагальнений метод найменших квадратів.