

## REFERENCES

1. Gavriyachenko, T.M., Karyakin, M.I. and Sukhov D.Y. (2008), “Designing of the interface for nonlinear boundary value problem solver using Maple”, *IEEE Computer Society, Los Alamitos-Washington-Tokyo, Proceedings of the International Conference on Computational Sciences and its Applications (ICCSA 2008)* ISBN 978-0-7695-3423-1, pp. 284-291.
2. Manevich, L.I., Pavlenko, A.V. and Koblik, S.G. (1982), *Asimptoticheskiy metod v teorii uprugosti ortotropnogo tela* [Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field], Vusha shkola, Kiev.
3. Kagadiy, T.S. (1998), *Metod vozmuscheniy v mekhanike uprugikh anizotropnykh i kompozicionnykh materialov* [Method of perturbations in the mechanics of elastic anisotropic and composite materials], RIK NGA Ukraina, Dnepropetrovsk.
4. Pavlenko, A.V., Kagadiy, T.S. and Belova, O.V. (2012), “Application of an asymptotic method to a solution of flat problems{tasks} of the theory of an elasticity”, “*Theoretical foundation of civil engineering – XX*” Polish–Ukrainian–Transaction, September, 2012, Warsaw, pp. 251-257.
5. Alexandrov, V.M. (2006), “Two tasks with the mixed boundary conditions for an elastic orthotropic band”, *Prikl. mech. mathem.* vol. 70, no. 1, pp. 139-149.

УДК 539.3

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПО ОСНОВАНИЮ УСИЛИЙ

Калоеров С. А., д. ф.-м. н., профессор, Занько А. И., аспирант, Кошкин А. А., аспирант

*Донецкий национальный университет,  
ул. Университетская, 24, г. Донецк, 83001, Украина*

kaloerov@mail.ru

С использованием комплексных потенциалов решена задача об изгибе конечной плиты с произвольными эллиптическими отверстиями под действием усилий, приложенных к основанию. Для круговой кольцевой плиты проведены численные исследования с анализом влияния анизотропии и способа загрузки и подкрепления контуров на значения изгибающих моментов.

*Ключевые слова: комплексные потенциалы теории изгиба плит, полиномы Фабера, ряды Лорана, обобщенный метод наименьших квадратов.*

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО ВИГІН БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ПЛИТ ПІД ДІЄЮ РОЗПОДІЛЕНИХ ПО ОСНОВІ ЗУСИЛЬ

Калоеров С. О., д. ф.-м. н., професор, Занько А. І., аспірант, Кошкін А. О., аспірант

*Донецький національний університет,  
вул. Університетська, 24, м. Донецьк, 83001, Україна*

kaloerov@mail.ru

З використанням комплексних потенціалів розв'язана задача про вигин кінцевої плити з довільними еліптичними отворами під дією зусиль, прикладених до основи. Для кругової кільцевої плити проведені чисельні дослідження з аналізом впливу анізотропії і способу завантаження і підкріплення контурів на значення згинальних моментів.

*Ключові слова: комплексні потенціали теорії згину плит, поліноми Фабера, ряди Лорана, узагальнений метод найменших квадратів.*

## SOLUTION BENDING PROBLEM FOR A MULTIPLY CONNECTED PLATES UNDER ACTION DISTRIBUTED ON THE BASE FORCES

Kaloerov S. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Zanko A. I., Graduate Student, Koshkin A. A., Graduate Student

*Donetsk national university,  
Universitetskaia str., 24, Donetsk, 83001, Ukraine*

kaloerov@mail.ru

The problem of the theory of bending of thin multiply connected plates subjected to a distributed normal loading on the foundation was solved. Both cases of anisotropic and isotropic plates are considered. The theory of complex potentials of bending plates has been used to solve this problem.

General representations of complex potentials are constructed using conformal transformations, Laurent series expansions and Faber polynomials. Determination of the unknown coefficients of the expansions is carried out from the boundary conditions at the edges using the generalized least squares method.

A number of problems for an annular plate and a square plate with a circular hole were solved for the first time. Different boundary conditions for these cases were considered. Numerical investigations revealed patterns of bending moment's variation depending on the type of boundary conditions, material properties and the shape of the plate boundary.

Numerical results indicate that the highest moments concentrations are observed near the hole, and this concentration increases with decreasing radius of the hole. The highest level of concentration is observed in the case of clamped edge of the hole. Type of boundary conditions at the non-clamped edge has little effect on the moment's concentrations. The degree of anisotropy of the material significantly affect to the value of the moments. Moments concentrations at planes, which is normal to more rigid elasticity directions (corresponding to smaller values of the coefficient of deformation  $a_{ii}$ ), are substantially higher than that of the isotropic material.

*Key words: complex potentials theory of bending plates, Faber polynomials, Laurent series, generalized least squares method.*

Несмотря на практическую важность решений задач по изгибу тонких многосвязных плит, до сих пор многие классы задач по этому направлению не рассматривались. Как известно, наиболее широкие классы задач в этом направлении были решены с использованием функций обобщенных комплексных переменных, введенных в работах С.Г. Лехницкого [1]. В работах [2-4] были получены общие представления этих функций для многосвязных областей. Однако в них неверно учтено действие усилий по основанию плиты, не рассмотрены случаи наличия отверстий вблизи внешнего края, не предложены оптимальные решения для случаев произвольных криволинейных отверстий. В работах [5, 6] исправлены недочеты и получены новые общие представления комплексных потенциалов, решен ряд задач.

В данном сообщении с использованием последних представлений комплексных потенциалов решен ряд задач для случая действия на многосвязную плиту распределенных по основанию нормальных усилий. Проведены численные исследования, установлены закономерности распределения изгибающих моментов.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тонкую плиту, срединная плоскость которой занимает многосвязную область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами эллиптических отверстий  $L_l$  ( $l = \overline{1, \mathcal{L}}$ ) с полуосями  $a_l$ ,  $b_l$  и центрами в точках  $(x_{0l}, y_{0l})$ . Эллипсы  $L_l$  могут располагаться произвольно относительно друг друга и внешнего контура, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации. Плита находится под действием нормальных усилий  $q(x, y)$ , распределенных по верхнему основанию. Один из контуров жестко зашпелен, остальные контуры свободны от усилий или жестко подкреплены. Для решения задачи будем использовать комплексные потенциалы теории изгиба плит [5, 6].

Если материал плиты является анизотропным, имеющим в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости, то решение рассматриваемой задачи при

использовании комплексных потенциалов теории изгиба плит [5] сводится к нахождению функций  $W_k'(z_k)$  из граничных условий:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{kli} W_k'(z_k) = f_{li}(t) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (20)$$

где для неподкрепленного контура

$$\begin{aligned} g_{k11} &= p_k / \mu_k, \quad g_{k12} = q_k, \quad f_{11} = J_{01} - c_l x, \quad f_{12} = -J_{02} + c_l y, \\ p_k &= D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ J_{01} &= \int_0^s (N_{xy0} - H_{xy0}) dx + M_{x0} dy, \quad J_{02} = -\int_0^s M_{y0} dx - (N_{xy0} + H_{xy0}) dy, \\ N_{xy0} &= -\int_0^s N_{y0} dx - N_{x0} dy; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_{x0} &= -\left( D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{y0} &= -\left( D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{xy0} &= -\left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} N_{x0} &= -\left( D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right), \\ N_{y0} &= -\left( D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right); \end{aligned} \quad (23)$$

$D_{ij} = B_{ij} D_0$  – жесткости материала плиты, в которых:

$$\begin{aligned} B_{11} &= (a_{22} a_{66} - a_{26}^2) / \Delta, \quad B_{12} = (a_{16} a_{26} - a_{12} a_{66}) / \Delta, \quad B_{16} = (a_{12} a_{26} - a_{16} a_{22}) / \Delta, \\ B_{22} &= (a_{11} a_{66} - a_{16}^2) / \Delta, \quad B_{26} = (a_{12} a_{16} - a_{26} a_{11}) / \Delta, \quad B_{66} = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) / \Delta, \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}; \quad (24)$$

$a_{ij}$  – коэффициенты деформаций материала плиты;  $D_0 = 2h^3/3$ ;  $h$  – полутолщина плиты;  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (25)$$

$c_l$  – вещественные постоянные, или

$$g_{kl1} = 1, \quad g_{kl2} = \mu_k, \quad f_{l1} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{1l}, \quad f_{l2} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{2l}, \quad (26)$$

если контур жестко подкреплён;  $w_0(x, y)$  – частное решение уравнения:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (27)$$

В случае жесткого защемления контура в условиях (26) нужно принять  $c_{il} = 0$ .

Функции  $W'_k(z_k)$  являются голоморфными в многосвязных областях  $S_k$ , получаемых из заданной области  $S$  аффинными преобразованиями

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (28)$$

и ограниченных контурами  $L_{kl}$ , соответствующими  $L_l$  при аффинных преобразованиях (28). Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана (для контуров отверстий) и по полиномам Фабера (для внешних контуров), для комплексных потенциалов получаем выражения вида [7, 10]:

$$W'_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kl n} a_{kl n}, \quad (29)$$

в котором  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  – постоянные, определяемые из решения систем уравнений [5]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left( 0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \quad (30)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left( 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left( 0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{x0l}}{4\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{y0l}}{4\pi D_{11}} \right); \quad (31)$$

$P_l$  и  $M_{xl}$ ,  $M_{yl}$  – главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат внешних сил, приложенных к контуру  $L_l$ ;

$$P_{0l} = -\int_{L_l} N_{y0} dx - N_{x0} dy,$$

$$M_{x0l} = \int_{L_l} (y N_{x0} - H_{xy0}) dy - (y N_{y0} - M_{y0}) dx,$$

$$M_{y0l} = \int_{L_l} (x N_{y0} - H_{xy0}) dx - (x N_{x0} - M_{x0}) dy; \quad (32)$$

$$\varphi_{k0n} = (z_k / R_{k0})^n, \quad \varphi_{kl n} = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l \geq 1); \quad (33)$$

$\zeta_{kl}$  – переменные, определяемые из конформных отображений [7]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}) \quad (34)$$

внешности единичных кругов  $|\zeta_{kl}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{kl}$ ;

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2,$$

$$m_{kl} = [a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)]/2R_{kl}, \quad (35)$$

где  $\varphi_l$  – угол между направлениями осей координат  $Ox$  и  $O_l x_l$  основной системы и локальной системы с началом в центре эллипса  $L_l$  и осью  $O_l x_l$  вдоль полуоси  $a_l$ , отсчитываемый от  $Ox$  против часовой стрелки;  $x_{0l}, y_{0l}$  – координаты начала системы координат  $O_l x_l y_l$ ;  $a_{kln}$  – постоянные, определяемые из граничных условий на контурах плиты.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для определения неизвестных постоянных  $a_{kln}$  функций (29) удовлетворим граничным условиям (20). Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав их по дуге контура, получим:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \left[ A_{kl} \ln(t_k - t_{kl}) + \frac{A_{kl} t_k + B_{kl}}{t_k - t_{kl}} + \varphi'_{kln}(t_k) a_{kln} \right] = \frac{df_{li}(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (36)$$

где

$$\delta_k = dt_k / ds; \quad \varphi'_{k0n} = \frac{n z_k^{n-1}}{R_{k0}^n}, \quad \varphi'_{kln} = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l \geq 1).$$

Условиям (36) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [8, 9]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек  $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$  ( $m = \overline{1, M_l}$ ) и удовлетворив в них условиям (36), получим:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{kli} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = \frac{df_{li}(t_{lm})}{ds} -$$

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} g_{kli} \delta_k \left( A_{kl} \ln(t_{klm} - t_{kl}) + \frac{A_{kl} t_{klm} + B_{kl}}{t_{klm} - t_{kl}} \right) \quad (i = \overline{1, 2}), \quad (37)$$

где  $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$ . Систему (37) дополним уравнениями однозначности прогиба [5] для каждого отверстия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{kln} R_{kl} = 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (38)$$

После нахождения псевдорешений системы уравнений (37) и (38) с использованием сингулярных разложений постоянные  $a_{kln}$ , а следовательно и функции  $W'_k(z_k)$ , будут известными и по ним можно вычислять изгибающие моменты в любой точке плиты

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{x0}, M_{y0}, H_{xy0}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k), \quad (39)$$

где  $r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2$ .

В случае изотропии решение задачи строится аналогичным образом с использованием комплексных потенциалов  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  [6].

Исходя из приведенного решения, представим решения ряда новых задач для плиты с одним центральным эллиптическим (в частном случае круговым) отверстием с контуром  $L_1$  (рис. 1). Внешний контур  $L_0$  является эллиптическим или прямоугольным. Плита находится под действием равномерно распределенных по верхнему основанию усилий  $q(x, y) = q_0$ , где  $q_0$  – интенсивность этих усилий.

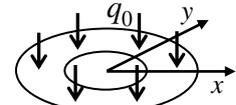


Рис. 1

Для рассматриваемой задачи в вышеприведенном решении нужно принять  $\mathcal{L} = 1$ ,  $B_{kl} = 0$ , кроме того, учитывать способ загрузки плиты. Для заданного нагружения частное решение  $w_0(x, y)$  неоднородного дифференциального уравнения (27) можно принять в виде:

$$w_0(x, y) = q^* (x^2 + y^2)^2, \quad (40)$$

где  $q^*$  – постоянная. Подставляя функцию (40) в уравнение (27), получаем:

$$q^* = \frac{q_0}{8[3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66})]}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 4q^* (3x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 4q^* (3y^2 + x^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 8q^* xy; \quad (41)$$

$$M_{x0} = -4q^* [D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy],$$

$$M_{y0} = -4q^* [D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy],$$

$$H_{xy0} = -4q^* [D_{16}(3x^2 + y^2) + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy];$$

$$N_{x0} = -8q^* [(3D_{11} + D_{12} + 2D_{66})x + 3(D_{16} + D_{26})y],$$

$$N_{y0} = -8q^* [3(D_{16} + D_{26})x + (D_{12} + 2D_{66} + 3D_{22})y];$$

$$N_{xy0} = 4q^* [3\cos^2(\vartheta)a_1^2 D_{16} + 3\cos^2(\vartheta)a_1^2 D_{26} - 2a_1 b_1 D_{12} \vartheta + 3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)a_1 b_1 D_{22} - 3a_1 b_1 D_{22} \vartheta - 4a_1 b_1 D_{66} \vartheta - 3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) \times a_1 b_1 D_{11} - 3a_1 b_1 D_{11} \vartheta + 3\cos^2(\vartheta)b_1^2 D_{16} + 3\cos^2(\vartheta)b_1^2 D_{26}]. \quad (42)$$

$$P_{01} = -\int_{L_1} N_{y0} dx - N_{x0} dy = -\int_0^{2\pi} N_{y0} dx - N_{x0} dy = -\pi q_0 a_1 b_1. \quad (43)$$

В случае кругового отверстия радиуса  $R_1$  ( $a_1 = b_1 = R_1$ )

$$P_{01} = -\pi q_0 R_1^2. \quad (44)$$

Рассмотрим частные случаи граничных условий (граничных задач).

1<sup>0</sup>. Пусть внешний контур плиты жестко защемлен, а внутренний свободен. В этом случае в приведенном решении нужно принять:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 0, \quad P_{01} = -\pi q_0 a_1 b_1, \quad g_{k01} = 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \quad g_{k11} = p_k / \mu_k, \quad g_{k12} = q_k, \\
\frac{df_{01}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}, \\
\frac{df_{11}}{ds} &= \frac{dJ_{01}(s)}{ds} - c_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{dJ_{02}(s)}{ds} + c_1 \frac{dy}{ds}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Для случая изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси  $Ox$  (при  $y = 0$ ) получены формулы:

$$\begin{aligned}
M_x &= -4q^* D(3+\nu)x^2 - 2D(1+\nu)[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1] - D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right), \\
M_y &= -4q^* D(3\nu+1)x^2 - 2D(1+\nu)[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1] + D(1-\nu)\left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2}\right),
\end{aligned} \tag{46}$$

где

$$\begin{aligned}
q^* &= \frac{q_0}{64D}, \quad A_1 = -\frac{q_0 \pi R_1^2}{8\pi D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0, \\
a_1 &= -\frac{A_1 R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) + A_1 R_1^2 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1) + 4q^* R_0^4}{(\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2} + \frac{4q^* (5 - \nu) R_1^4}{(1 - \nu)((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2)}, \\
b_{-1} &= -\left\{ (1 - \nu) [A_1 (\alpha - 1) (2 \ln R_0 + 1) - 2A_1 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1)] + \right. \\
&\quad \left. + 4q^* [2(1 + \nu) R_0^2 + (5 - \nu) R_1^2] \right\} \frac{R_0^2 R_1^2}{(1 - \nu)((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2)}.
\end{aligned}$$

В силу симметрии такие же значения будут иметь моменты вдоль любых радиальных направлений.

2<sup>0</sup>. Пусть внешний контур плиты жестко защемлен, а внутренний жестко подкреплен. Для этого случая в приведенном решении нужно принять:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 0, \quad P_{01} = -\pi q_0 a_1 b_1, \quad g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \\
\frac{df_{11}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Для изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси  $Ox$  (при  $y = 0$ ) получены формулы (46), в которых нужно принять

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{P_{01}}{8\pi D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0, \quad a_1 = \frac{\gamma_{10} R_0 - \gamma_{11} R_1}{2(R_0^2 - R_1^2)}, \quad b_{-1} = \frac{(\gamma_{11} R_0 R_1 - \gamma_{10} R_1^2) R_0}{R_0^2 - R_1^2}, \\
\gamma_{kl} &= -\left[ A_1 R_l^k (\ln R_l^k + 1) + 4q^* R_l^3 \right].
\end{aligned} \tag{48}$$

3<sup>0</sup>. Пусть внешний контур плиты свободен от воздействий, а внутренний жестко защемлен. В этом случае главный вектор действующих на эллиптическое кольцо с внешним контуром с полуосями  $a_0, b_0$  и внутренним контуром с полуосями  $a_1, b_1$ , нагруженное усилиями  $q_0$  равен  $\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0$ . Следовательно, главный вектор усилий, приложенных к внутреннему контуру (действие опоры) равно  $-\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0$ . С учетом этого для данного случая получаем:

$$\begin{aligned} P_1 &= -\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0, \quad P_{01} = -q_0\pi a_1b_1, \\ g_{k01} &= \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{k02} = q_k, \quad g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \\ \frac{df_{01}}{ds} &= \frac{dJ_{01}(s)}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = -\frac{dJ_{02}(s)}{ds}, \\ \frac{df_{11}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (49)$$

Для изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов  $\varphi(z), \psi(z)$  методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси  $Ox$  (при  $y=0$ ) получены формулы (46), в которых нужно принять:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{32R_0^2 q^*}{(1-\nu)(\alpha+1)} = -\frac{R_0^2 q_0}{8D} = -\frac{\pi R_0^2 q_0}{8\pi D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0, \\ a_1 &= -\frac{A_1 R_1^2 (2\ln R_1 + 1) + A_1 R_0^2 ((\alpha-1)\ln R_0 - 1) + 4q^* R_1^4}{(\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2} + \frac{4q^* (5-\nu) R_0^4}{(1-\nu)((\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2)}, \\ b_{-1} &= -\{(1-\nu)[A_1(\alpha-1)(2\ln R_1 + 1) - 2A_1((\alpha-1)\ln R_0 - 1)] + \\ &\quad + 8(1+\nu)q^* R_1^2 + 4(5-\nu)q^* R_0^2\} \frac{R_0^2 R_1^2}{(1-\nu)((\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2)}. \end{aligned} \quad (50)$$

4<sup>0</sup>. Пусть внешний контур плиты подкреплен, а внутренний жестко защемлен. Как и в предыдущем случае определяем главный вектор усилий, действующих на внутренний контур кольца. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} P_1 &= -\pi(a_0b_0 - a_1b_1)q_0, \quad P_{01} = -q_0\pi a_1b_1, \quad g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \\ \frac{df_{11}}{ds} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (51)$$

Для случая изотропной плиты с использованием комплексных потенциалов  $\varphi(z), \psi(z)$  методом рядов получено точное аналитическое решение задач, из которого для моментов вдоль оси  $Ox$  (при  $y=0$ ) получены формулы (46), в которых нужно принять:

$$A_1 = \frac{P_1 + P_{01}}{8\pi D} = \left( -\pi(R_0^2 - R_1^2)q_0 - \pi q_0 R_1^2 \right) / 8\pi D = \frac{-R_0^2 q_0}{8D}, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0,$$

а для коэффициентов  $a_1$  и  $b_{-1}$  справедливы формулы (48).

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Были проведены численные исследования значений изгибающих моментов для плиты из материалов [10]: КАСТ-В изотропный (материал М1), стеклопластик косоугольной намотки (М3). Коэффициенты деформаций  $a_{ij}$  для этих материалов приведены в таблице. Ниже описаны полученные результаты для кругового кольца с радиусами  $R_0 = a_0$ ,  $R_1 = a_1$  и квадрата со стороной  $2R_0 = 2a_0$  с круговым отверстием радиуса  $R_1 = a_1$ . При этом значения моментов приведены с точностью до  $q_0/D_0$  как множителя. Для изотропной плиты, которая также рассчитывалась как анизотропная, в качестве «анизотропного» материала принимался изотропный КАСТ-В, для которого параметр  $a_{12} = -8,605 \cdot 10^{-4}$ , т.е. незначительно отличается от известного. В противном случае при решении задачи будет деление на ноль, т.к. корни характеристического уравнения (25) для изотропного материала будут двукратными и равными  $i$  и  $-i$ . Кроме того, для изотропной плиты использовались приведенные выше точные формулы. Получаемые при использовании этих двух подходов значения моментов оказались практически совпадающими, с точностью до 5–6 значащих цифр.

Таблица

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^{-4},$ $МПа^{-1}$	$a_{22} \cdot 10^{-4}, МПа^{-1}$	$a_{12} \cdot 10^{-4}, МПа^{-1}$	$a_{66} \cdot 10^{-4}, МПа^{-1}$	
М1	72,100	72,100	-8,600	161,500	1,000
М3	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571

На рис. 2 для кругового кольца при  $a_1/a_0 = 0,5$  приведены графики распределения моментов  $M_x$  вдоль оси  $Ox$  в точках с координатами  $x/a_0$ . Кривые  $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$  соответствуют приведенным выше задачам с этими же обозначениями. Сплошные линии относятся к материалу М3, штриховые – к изотропному М1. Аналогичные графики распределения моментов  $M_y$  представлены на рис. 3. На рис. 4, 5 приведены графики распределения моментов, аналогичные данным рис. 2, 3 для случая квадратной плиты со стороной  $2a_0$  с круговым отверстием радиуса  $a_1$ , когда  $a_1/a_0 = 0,5$ .

Как видно из приведенных рисунков, во всех задачах (т.е. независимо от граничных условий) наибольшая концентрация (рост максимальных значений по модулю) моментов наблюдается вблизи внутреннего контура  $L_1$ , причем, как показывают расчеты, эта концентрация увеличивается с уменьшением радиуса этого контура. Наиболее высокий уровень концентрации моментов наблюдается в случае жесткого защемления контура  $L_1$ . Влияние вида граничного условия на незащемленном контуре (в задачах  $1^0, 2^0$  на внутреннем контуре, в задачах  $3^0, 4^0$  на внешнем контуре) на уровень концентрации моментов незначительно. Концентрация моментов для анизотропного материала на площадках, перпендикулярных более жестким направлениям упругости (соответствующих меньшим значениям коэффициента деформации  $a_{ii}$ ), выше, чем для изотропного.

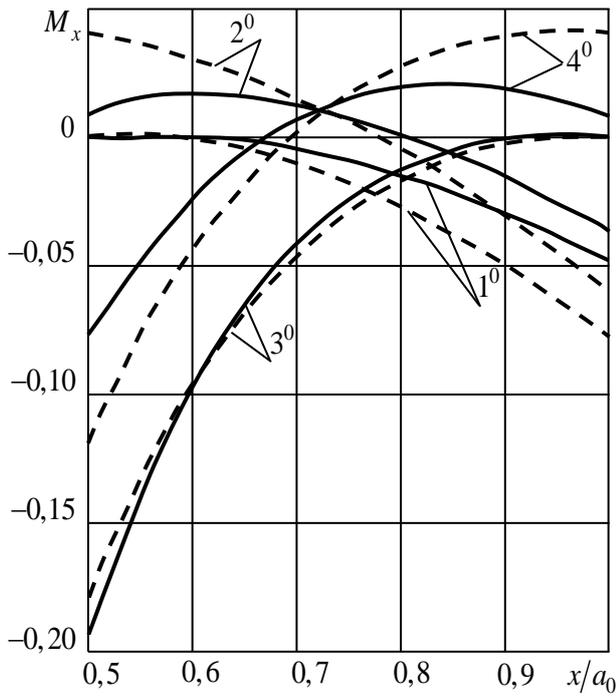


Рис. 2

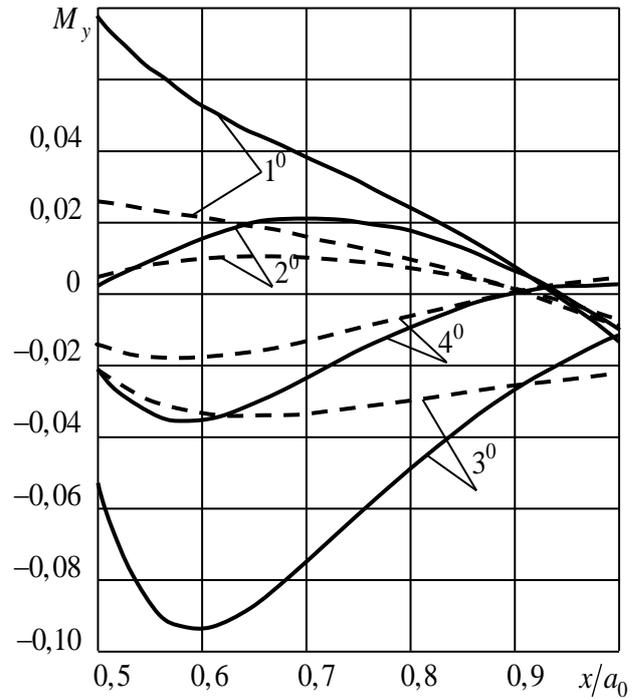


Рис. 3

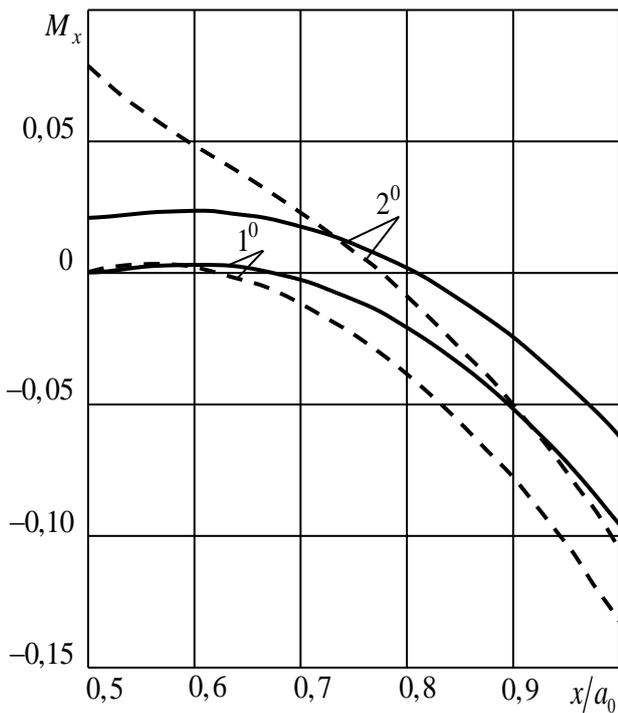


Рис. 4

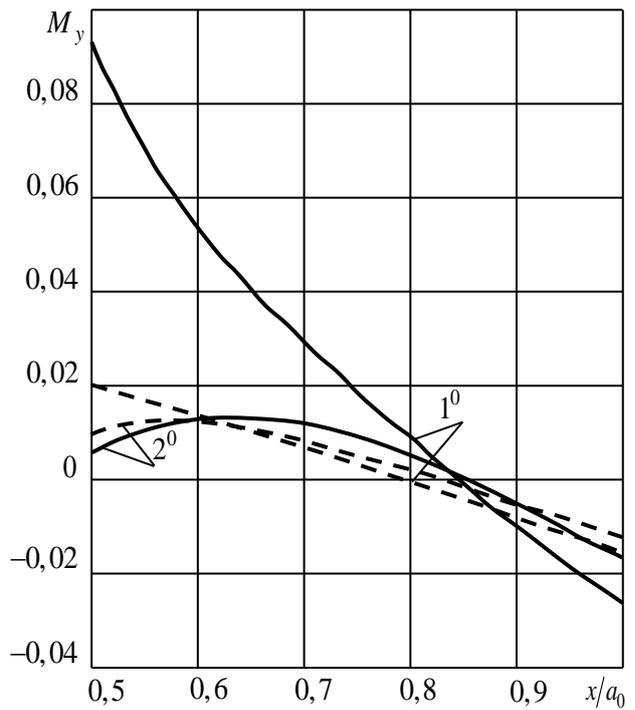


Рис. 5

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М. : Гостехиздат, 1957. – 463 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К., Донецк : Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Космодамианский А. С. Изгиб тонких многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк, 1973. – 256 с.

4. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В.В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1967. – № 3. – С. 97-127.
5. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – № 4(50). – С. 115-136.
6. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – № 7(53). – С. 83-100.
7. Калоеров С. А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – К. : А. С. К., 1998. – С. 10-26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
8. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. – М. : Наука, 1977. – 304 с.
9. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1969. – 280 с.
10. Космодамианский А. С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К., Донецк : Вища шк., 1983. – 160 с.

#### REFERENCES

1. Lekhnitskii, S.G. (1957), *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates], Gostekhizdat, Moscow.
2. Kosmodamianskiy, A.S. (1976), *Napryazhennoe sostoyanie anizotropnykh sred s otverstiyami ili polostyami* [Stress state anisotropic mediums with holes or cavities], Vyshcha shk., Kyiv, Donetsk.
3. Kosmodamianskii, A.S. and Ivanov, G.M. (1973), *Izgib tonkikh mnogosvyaznykh plit* [Bending of thin multiply connected plates], Donetsk.
4. Meglinskiy, V.V. (1967), “Some problems of bending of thin anisotropic multiply connected plates”, *Nekotorye zadachi teorii uprugosti o kontsentratsii napryazheniy i deformatsii uprugikh tel*, no. 3, pp. 97-127.
5. Kaloerov, S.A. (2012), “Complex potentials theory of bending of anisotropic multiply connected plates”, *Teoret. i prikladnaya mekhanika*, no. 4(50), pp. 115-136.
6. Kaloerov, S.A. (2013), “Complex potentials bending theory of isotropic multiply connected plates”, *Teoret. i prikladnaya mekhanika*, no. 7(53), pp. 83-100.
7. Kaloerov, S.A, and Goryanskaya, E.S. (1998), “The two-dimensional stress-strain state of a multiply anisotropic body”, *Kontsentratsiya napryazheniy*, [Vols. 1-12; Vol. 7], pp. 10-26, A. S. K, Kyiv.
8. Voevodin, V.V. (1977), *Vychislitelnye osnovy lineynoy algebry* [Numerical linear algebra basics], Nauka, Moscow.
9. Forsayt, Dzh., Malkolm, M., and Mouler, K. (1969), *Mashinnye metody matematicheskikh vychisleniy* [Machine methods of mathematical calculations], Mir, Moscow.
10. Kosmodamianskiy, A.S., and Kaloerov, S.A. (1983), *Temperaturnye napryazheniya v mnogosvyaznykh plastinkakh* [Thermal stresses in multiply plates], Vishcha shk., Kyiv, Donetsk.