

УДК 533.6.013.42

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Кононов Ю. Н., д. ф.-м. н., профессор, Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., профессор,  
Джуха Ю. А., аспирант

*Донецкий национальный университет,  
ул. 600-летия, 21, г. Винница, 21021, Украина*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Получено частотное уравнение собственных совместных осесимметричных колебаний упругих оснований в виде пластин и тяжелой идеальной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре. Рассмотрены различные предельные случаи: вырождение пластин в мембраны, в абсолютно жесткие пластины, отсутствия верхней пластины (случай жидкости со свободной поверхностью). Проведены численные исследования для случая жидкости со свободной поверхностью.

*Ключевые слова: гидроупругость, осесимметричные колебания, идеальная жидкость, упругие пластинки.*

## ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ОСНОВ ТА ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

Кононов Ю. М., д. ф.-м. н., професор, Русаков В. Ф., д. ф.-м. н., професор,  
Джуха Ю. О., аспірант

*Донецький національний університет,  
вул. 600-річчя, 21, м. Вінниця, 21021, Україна*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Отримано частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань пружних основ у вигляді пластин та важкої ідеальної рідини в жорсткому круговому циліндричному резервуарі. Розглянуто різні межові випадки: виродження пластин у мембрани, в абсолютно жорсткі пластини, відсутності верхньої пластини (випадок рідини з вільною поверхнею). Проведені чисельні дослідження на випадок рідини з вільною поверхнею.

*Ключові слова: гідропружність, осесиметричні коливання, ідеальна рідина, пружна пластинка.*

## AXIAL-SYMMETRIC VIBRATIONS OF ELASTIC BASES AND IDEAL LIQUID IN A RIGID CYLINDRICAL TANK

Kononov Yu. M., D.Sc. in Physics and Maths, Rusakov V. F., D.Sc. in Physics and Maths,  
Dzhukha Yu. O., postgraduate

*Donetsk National University,  
600-richchya str., 21, Vinnytsia, 21021, Ukraine*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Interest to the axisymmetric vibrations of elastic base and a liquid in a cylindrical tank is connected with the fact that in this case consideration must be given to the vibrations of the liquid column between elastic bases of a tank. It is not necessary in the case of the asymmetric vibrations in an axisymmetric tank.

A rigid straight circular cylinder with elastic base contains a liquid. Elastic bases are modeled by isotropic elastic circular plates. The plates are rigidly fixed on a contour and are subjected to tensile forces in a middle surface. It is considered that the liquid is ideal, homogeneous and incompressible. The motion of the liquid is potential. The problem is considered in linear formulation. Deflections of the plates are represented as the sum of the static and dynamic deflections. System of two inhomogeneous biharmonic equations govern coupled vibrations of plates and liquid and represent the spectral problem. The general solution of each equation is sought as the sum of the general solution of the homogeneous equation and the particular solution of the inhomogeneous equation. The general solution of the homogeneous equation is determined by the mechanical parameters of the plate and the density of the liquid. This solution contains unknown frequency. The particular solution of the inhomogeneous equation is represented as a series expansion in terms of eigenfunctions of the vibrations of the ideal liquid in a cylindrical tank.

The frequency equation of the natural coupled axisymmetric vibrations of elastic base of cylinder and the ideal liquid is derived from the conditions of rigid plates, coupled vibrations and the liquid incompressibility conditions. Determinant

of the fifth order represents this transcendental equation. The frequency spectrum of the equation consists of two sets of frequencies corresponding to the vibrations of elastic top and bottom bases. The frequency equation is symmetrical relative to upper and lower bases in the absence of gravity. Obtained frequency equation is sufficiently general and includes a number of special cases.

Numerical investigations of the axisymmetric vibrations of elastic bottom and the liquid with a free surface are performed. On the basis of numerical investigations it may be concluded that:

1. Series of the frequency equation converges rapidly.
2. The frequency spectrum consists of two sets of frequencies corresponding to the vibrations of the free surface and elastic bottom of cylindrical tank. In a wide range of parameters of the mechanical system the first set of frequency varies only slightly, and the second set varies substantially.
3. The dependence of the first frequency of the second set on dimensionless rigidity in most cases is almost linear.
4. The significant increase of frequencies of the second set takes a place as the mass of the base is reduced. The largest increase takes place for the massless plate.

*Key words: hydroelasticity, axial-symmetric vibrations, ideal liquid, elastic plate.*

## ВВЕДЕНИЕ

Задача об осесимметричных колебаниях упругого дна кругового цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью впервые была рассмотрена в работах [1-3]. В статье [4] эта задача была обобщена на случай коаксиального цилиндрического сосуда, а в статье [5] – на несимметричные колебания. В работе [6] было сделано обобщение указанной выше задачи для цилиндрического сосуда произвольного сечения. Экспериментальные исследования представлены в статье [7]. В статьях [8, 9] исследована в линейной постановке динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью. Наиболее полная постановка задачи о колебаниях упругих оснований и идеальной жидкости дана в работе [10], а в статьях [11-12] она обобщена на случай двухсвязного цилиндрического сосуда и двухслойной жидкости. В указанных выше статьях осесимметричные собственные частоты совместных колебаний упругих оснований и тяжелой идеальной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре не были исследованы в общей постановке. В данной статье выведено и исследовано частотное уравнение совместных осесимметричных собственных колебаний круговых упругих оснований цилиндрического сосуда и идеальной жидкости. Рассмотрен ряд частных случаев: верхнее или нижнее основание становится абсолютно жестким; верхнее основание отсутствует; упругие пластинки превращаются в мембраны. Проведены численные исследования для различных глубин заполнения резервуара, инерционных и неинерционных пластин, изменяющихся упругих характеристик пластин.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим совместные колебания упругих оснований и тяжелой идеальной несжимаемой жидкости плотности  $\rho$ , находящейся в прямом круговом цилиндре радиуса  $a$ . Основания цилиндра представляют собой круглые изотропные пластинки, жестко защемленные по контуру с изгибной жесткостью  $D_i$  и подверженные растягивающим усилиям  $T_i$  в срединной плоскости ( $i=1,2$ ). Индекс  $i=1$  соответствует верхнему основанию, а  $i=2$  – нижнему. Цилиндрическую систему координат  $Or\theta z$  расположим так, чтобы плоскость  $Or\theta$  находилась на одинаковом расстоянии от оснований, а ось  $Oz$  была направлена по оси цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести  $\vec{g}$ . Задачу будем рассматривать в линейной постановке, считая движение жидкости потенциальным, а совместные колебания пластин и жидкости – безотрывными.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы имеют вид [1, 2, 4]:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left( Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=h/2} - g \frac{h}{2} \right), \quad (1)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left( Q - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=-h/2} + g \frac{h}{2} \right), \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 0$$

с учетом следующих граничных условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\int_S W_1 dS = \int_S W_2 dS, \quad (4)$$

$$W_i \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial W_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad (i=1,2) \quad (5)$$

Здесь  $k_{0i} = \rho_{0i} \delta_{0i}$ ;  $W_i$ ,  $\rho_{0i}$  и  $\delta_{0i}$  – соответственно прогиб, плотность и толщина  $i$ -ой пластинки;  $\Phi$  – потенциал скоростей жидкости;  $h$  – глубина заполнения;  $Q$  – произвольная функция времени;  $\Delta_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$  и  $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – соответственно двухмерный и трехмерный операторы Лапласа для осесимметричного случая;  $S$  – сечение кругового цилиндра.

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Вследствие осевой симметрии функции  $\Phi$  и  $W_i$  представим в виде обобщенных рядов Фурье по собственным функциям  $\psi_n(r)$  следующим образом [1, 2, 4, 6]:

$$\Phi(r,t) = a_0(t) + a_1(t)z + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n(t)e^{k_n z} + B_n(t)e^{-k_n z} \right] \psi_n(r), \quad (6)$$

$$W_i(r,t) = W_{i0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_{in}(t) \psi_n(r), \quad (7)$$

где

$$W_{i0} = \frac{1}{S} \int_S W_i dS, \quad W_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S W_i \psi_n dS, \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 d\Omega.$$

Собственные функции  $\psi_n(r)$  и соответствующие им собственные числа  $k_n$  находятся из решения краевой задачи [13]:

$$\Delta_2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 \quad \text{на } S, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0$$

и вместе с произвольной константой образуют на  $S$  полную и ортогональную систему функций. Из-за осевой симметрии эти функции имеют вид  $\psi_n(r) = J_0(k_n r)$ , а собственные числа  $k_n$  находятся из уравнения  $J_1(k_n a) = 0$  ( $J_0$  и  $J_1$  – функции Бесселя первого рода).

Подставив выражения (6)-(7) функций  $\Phi$  и  $W_i$  в граничные условия (3)-(4), получим:

$$A_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{-\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad B_n = \frac{\dot{W}_{1n} e^{-\kappa_n/2} - \dot{W}_{2n} e^{\kappa_n/2}}{2k_n \sinh \kappa_n}, \quad a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \quad (\kappa_n = k_n h),$$

и уравнения (1)-(2) примут вид:

$$k_{01} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1 \Delta_2^2 W_1 - T_1 \Delta_2 W_1 + \rho g W_1 = \rho \left( Q - \dot{a}_0 - (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{1n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right), \quad (8)$$

$$k_{02} \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2 \Delta_2^2 W_2 - T_2 \Delta_2 W_2 - \rho g W_2 = -\rho \left( Q - \dot{a}_0 + (\dot{a}_1 + g) \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{W}_{2n} \cosh \kappa_n - \ddot{W}_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n} \psi_n \right). \quad (9)$$

### ВЫВОД ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу о собственных совместных колебаниях упругих пластин и жидкости. Для этого положим  $W_i(r, t) = e^{i\omega t} w_i(r) + W_i^{st}(r)$ ,  $\rho(Q - \dot{a}_0) = \tilde{Q} e^{i\omega t}$ ,  $\rho \dot{a}_1 \frac{h}{2} = \tilde{w} e^{i\omega t}$ . Здесь  $W_i^{st}$  – статический прогиб пластин. В этом случае уравнения (8) – (9) примут вид:

$$D_i \Delta_2^2 w_i - T_i \Delta_2 w_i - \left[ k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g \right] w_i = (-1)^{i+1} \tilde{Q} - \tilde{w} + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{in} \psi_n \quad (i=1,2), \quad (10)$$

где

$$\tilde{w}_{1n} = \frac{w_{1n} \cosh \kappa_n - w_{2n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w}_{2n} = \frac{w_{2n} \cosh \kappa_n - w_{1n}}{k_n \sinh \kappa_n}, \quad \tilde{w} = -\rho \omega^2 \frac{h}{2} w, \quad (11)$$

$$w_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_i \psi_n dS, \quad w = \frac{1}{S} \int_S w_1 dS = \frac{1}{S} \int_S w_2 dS. \quad (12)$$

Решение каждого уравнения (10) будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [10-14]:

$$w_i = \sum_{k=1}^2 w_{ik}^0 A_{ik}^0 + \rho \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{in}}{k_n \sinh \kappa_n d_{in}} \psi_n + \tilde{k}_{0i} \left[ \tilde{Q} + (-1)^i \tilde{w} \right] \quad (i=1,2). \quad (13)$$

Здесь

$$\tilde{k}_{0i} = \frac{1}{\rho g + (-1)^i k_{0i} \omega^2}, \quad d_{in} = \left( D_i k_n^2 + T_i \right) k_n^2 - \left[ k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho g \right],$$

$A_{ik}^0$  ( $i, k=1,2$ ),  $w_{in}$ ,  $\tilde{Q}$  и  $\tilde{w}$  – неизвестные константы.

Исключим неизвестную константу  $\tilde{w}$ . Для этого подставим (13) во второе условие (12) и воспользуемся условием ортогональности собственных функций  $\psi_n$  константе:

$$\tilde{w} = \frac{1}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}} \sum_{k=1}^2 \left( \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right) + \tilde{Q} (\tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02}),$$

$$\text{где } \tilde{w}_{ik}^0 = \frac{1}{S} \int_S w_{ik}^0 dS.$$

Из второго условия (12) также следует следующее уравнение:

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \left( \rho h \tilde{k}_{02} \omega^2 + 2 \right) \tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 + \left( \rho h \tilde{k}_{01} \omega^2 - 2 \right) \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 \right] + 2 \left( \rho h \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02} \omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02} \right) \tilde{Q} = 0. \quad (14)$$

Подставив (13) в первое условие (12) и, разрешив систему двух линейных уравнений относительно  $w_{1n}$  и  $w_{2n}$ , окончательно получим:

$$w_i = \sum_{k=1}^2 \left( w_{ik} A_{1k}^0 + w_{i2k} A_{2k}^0 \right) + k \tilde{Q}. \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{11k} &= w_{1k}^0 - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n, & w_{12k} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ w_{21k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n, & w_{22k} &= w_{2k}^0 - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n, \\ a_{11n} &= D_{1n} D_{2n}^*, & a_{12n} &= -d_{1n}^*, & a_{21n} &= -d_{2n}^*, & a_{22n} &= D_{2n} D_{1n}^*, \\ k_1 &= \frac{\tilde{k}_{01}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & k_2 &= \frac{\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & k &= \frac{2\tilde{k}_{01}\tilde{k}_{02}}{\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02}}, & \tilde{d}_{in} &= \frac{\rho\omega^2}{d_{in}k_n \sinh \kappa_n}, & d_{in}^* &= \frac{d_{in}}{\Delta_n}, \\ D_{in} &= \tilde{d}_{in} \sinh \kappa_n, & D_{in}^* &= \frac{\coth \kappa_n - D_{in}}{\Delta_n}, & \Delta_n &= 1 - (D_{1n} + D_{2n}) \coth \kappa_n + D_{1n} D_{2n}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{N_n^2} \int_S w_{ik}^0 \psi_n dS.$$

Из условий жесткого защемления пластин (5) и уравнения (14) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих оснований и жидкости:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{112} & \tilde{w}_{121} & \tilde{w}_{122} & k \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{212} & \tilde{w}_{221} & \tilde{w}_{222} & k \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & 0 \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_2 \tilde{w}_{12}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{11k} &= B_{1k} - k_1 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 B_n^*, & \tilde{w}_{12k} &= k_1 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 B_n^*, \\ \tilde{w}_{21k} &= k_2 \tilde{w}_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 B_n^*, & \tilde{w}_{22k} &= B_{2k} - k_2 \tilde{w}_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 B_n^*, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{k}_2 = \rho h \tilde{k}_{02} \omega^2 + 2, \quad \tilde{k}_1 = \rho h \tilde{k}_{01} \omega^2 - 2, \quad \tilde{k} = 2 \left( \rho h \tilde{k}_{01} \tilde{k}_{02} \omega^2 + \tilde{k}_{01} - \tilde{k}_{02} \right),$$

$$B_{ik} = w_{ik}^0 \Big|_{r=a}, \quad C_{ik} = \frac{\partial w_{ik}^0}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad B_n^* = J_0(\xi_n), \quad (i=1,2; k=\overline{1,2}).$$

Частотный спектр уравнения (17) состоит из двух наборов частот, характеризующих колебания верхнего и нижнего упругих оснований и возможно ожидать, что при достаточно малых глубинах заполнения будет наблюдаться довольно сильное взаимовлияние этих колебаний.

Следует отметить, что частотное уравнение (17) имеет особенности при  $\Delta_n = 0$ ,

$$\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0 \left( \omega^2 = \frac{2\rho g}{k_{02} - k_{01}} \right) \text{ и } \rho g - \omega^2 k_{02} = 0 \left( \omega^2 = \frac{\rho g}{k_{02}} \right),$$

которые необходимо учитывать при проведении численных расчетов.

## ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ЧАСТОТНОГО УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ СОВМЕСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ И ЖИДКОСТИ

Полученное уравнение (17) является довольно общим и включает в себя ряд частных случаев, которые представляют самостоятельный интерес.

**Случай невесомости.** В этом случае  $g = 0$  и частотное уравнение (17) будет симметрично относительно индексов 1 и 2, что имеет физическое обоснование и подтверждает правильность выведенного уравнения. Если  $k_{01} = k_{02}$ , то  $\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} = 0$  и, как было отмечено выше, уравнение (17) имеет особенность. При  $k_{01} = 0$  и  $k_{02} \neq 0$  будем иметь  $k_1 = 1, k_2 = 0$ , а пятый столбец определителя уравнения (17) можно записать следующим образом  $(1, 0, 1, 0, k_{02}(\rho h + k_{02}))^{-1}$ . Если  $k_{02} = 0$  и  $k_{01} \neq 0$ , то  $k_1 = 0, k_2 = 1$ , а пятый столбец определителя уравнения (17) запишется так:  $(-1, 0, -1, 0, k_{01}(\rho h + k_{01}))^{-1}$ .

**Верхняя пластина вырождается в мембрану.** В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую строку и второй столбец, а в соотношениях (16) положить  $D_1 = 0$ . Частотное уравнение примет вид:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{121} & \tilde{w}_{122} & k \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{221} & \tilde{w}_{222} & k \\ 0 & C_{21} & C_{22} & 0 \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

**Нижняя пластина вырождается в мембрану.** Как и в предыдущем случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть четвертую строку и четвертый столбец, а в соотношениях (16) считать  $D_2 = 0$ . Частотное уравнение запишется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{112} & \tilde{w}_{121} & k \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{212} & \tilde{w}_{221} & k \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_2 \tilde{w}_{12}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

**Нижняя и верхняя пластины вырождаются в мембраны.** В этом случае в определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть вторую и четвертую строки и второй и четвертый столбец, а в соотношениях (16) положить  $D_1 = D_2 = 0$ . Частотное уравнение запишется так:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{111} & \tilde{w}_{121} & k \\ \tilde{w}_{211} & \tilde{w}_{221} & k \\ \tilde{k}_2 \tilde{w}_{11}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

**Случай наличия свободной поверхности у жидкости.** Этот случай реализуется при отсутствии верхней пластинки. В определителе уравнения (17) нужно вычеркнуть первую и вторую строки и первый и второй столбец, а в соотношениях (16) считать  $k_{01} = 0, T_1 = 0, D_1 = 0$ . Частотное уравнение примет вид:

$$\begin{vmatrix} \tilde{w}_{221} & \tilde{w}_{222} & k \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ \tilde{k}_1 \tilde{w}_{21}^0 & \tilde{k}_1 \tilde{w}_{22}^0 & \tilde{k} \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

При вырождении нижней пластинки в мембрану ( $D_2 = 0$ ) уравнение (22) запишется следующим образом:

$$\tilde{k} \left( B_{21} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 B_n^* \right) - (k_2 \tilde{k} + k \tilde{k}_1) \tilde{w}_{21}^0 = 0. \quad (23)$$

**Нижняя или верхняя пластинки абсолютно жесткие.** Если верхняя или нижняя пластинка становится абсолютно жесткой, то в этом случае  $w_1 \equiv 0$  ( $\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$ ) или  $w_2 \equiv 0$  ( $\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$ ). Переходя к пределу в уравнение (17) соответственно при  $T_1 \rightarrow \infty$  ( $D_{1n} \rightarrow 0$ ) или при  $T_2 \rightarrow \infty$  ( $D_{2n} \rightarrow 0$ ), получим частотные уравнения:

в первом случае ( $T_1 \rightarrow \infty$ )

$$C_{22} B_{21} - C_{21} B_{22} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} (C_{22} E_{21n}^0 - C_{21} E_{22n}^0) B_n^* = 0, \quad (24)$$

а во втором

$$C_{11} B_{12} - C_{12} B_{11} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} (C_{11} E_{12n}^0 - C_{12} E_{11n}^0) B_n^* = 0. \quad (25)$$

Следует отметить, что для несимметричных колебаний уравнение (25) было подробно исследовано в [13].

### ЧИСЛЕННЫЕ ИСЛЕДОВАНИЯ

В виду сложности рассматриваемой задачи проведем численные исследования для наиболее интересного и сложного случая наличия у жидкости свободной поверхности. Несмотря на достаточное количество публикаций [4, 6, 11, 12], этот случай до конца не исследован.

Введем безразмерные переменные

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a}{g}, \quad \tilde{D}_2 = \frac{D_2}{\rho g a^4}, \quad \tilde{T}_2 = \frac{T_2}{\rho g a^2}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{k_{02}}{\rho a}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{a}.$$

В обозначениях (16) получим:

$$D_{1n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n}, \quad D_{2n} = \frac{\Omega^2}{\xi_n \left[ (\tilde{D}_2 \xi_n^2 + \tilde{T}_2) \xi_n^2 - 1 - k_2 \Omega^2 \right]}, \quad \tilde{k}_{01} = 1, \quad \tilde{k}_{02} = \frac{1}{1 + \tilde{k}_2 \Omega^2}.$$

Пусть дно является абсолютно упругим ( $T_2 = 0$ ). Этот случай был рассмотрен в статье [14]. Согласно ему, имеем:

$$w_{21}^0 = J_0 \left( \mu_2 \frac{r}{a} \right), \quad w_{22}^0 = I_0 \left( \mu_2 \frac{r}{a} \right), \quad \mu_2^4 = \frac{\tilde{k}_2 \Omega^2 + 1}{\tilde{D}_2},$$

$$E_{21n}^0 = \frac{2\mu_2 J_1(\mu_2)}{(\mu_2^2 - \xi_n^2) J_0(\xi_n)}, \quad E_{22n}^0 = \frac{2\mu_2 I_1(\mu_2)}{(\mu_2^2 + \xi_n^2) J_0(\xi_n)}.$$

Численные исследования частотного уравнения (22) были проведены для следующих значений безразмерных параметров:  $\tilde{h} = 0.1..4$ ,  $\tilde{k}_2 = 0..10$ ,  $\tilde{D}_2 = 0.1..10$ . На рис. 1-2 с учетом двух членов в рядах уравнения (22) ( $n = \overline{1,2}$ ) представлены графики зависимости квадрата безразмерной первой частоты второго набора  $\Omega_{21}^2$  от безразмерной жесткости  $\tilde{D}_2$  для различных глубин заполнения  $\tilde{h} = 0.5, 1.0, 1.5$  (рис.1) и массовой характеристики пластины  $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$  (рис. 2). На рис. 1 нижний график соответствует  $\tilde{h} = 0.5$ , средний  $\tilde{h} = 1.0$ , а верхний  $\tilde{h} = 1.5$ . На рис. 2 аналогично  $\tilde{k}_2 = 2.0, 1.0, 0.5$ .

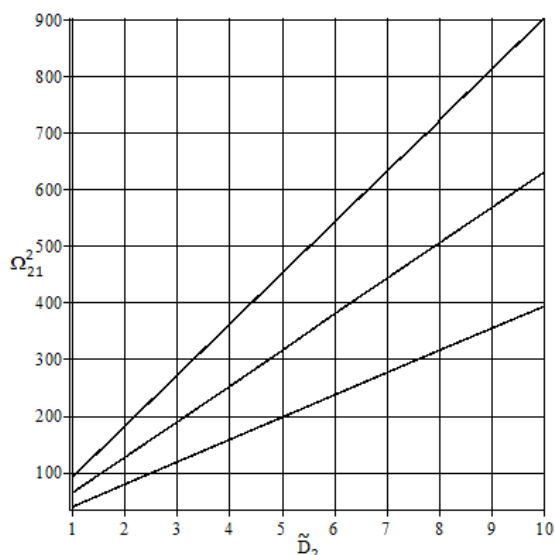


Рис. 1. Графики зависимости  $\Omega_{21}^2$  от  $\tilde{D}_2$  для различных  $\tilde{h}$

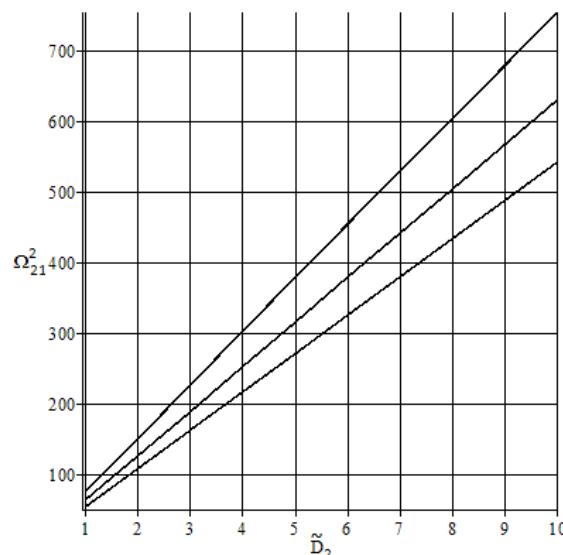


Рис. 2. Графики зависимости  $\Omega_{21}^2$  от  $\tilde{D}_2$  для различных  $\tilde{k}_2$

В табл. 1 приведены для параметров  $\tilde{h}=1$ ,  $\tilde{k}_2=1$ ,  $\tilde{D}_2=1$  значения  $\Omega_{1n}^2$  (левый столбец) и  $\Omega_{2n}^2$  (правый столбец) в зависимости от числа членов ряда ( $n=\overline{1,3}$ ). Из этой таблицы видна хорошая сходимость рядов уравнения (22), а также то, что с увеличением членов ряда добавляются новые и уточняются предыдущие частоты.

Таблица 1 – Зависимость квадрата частот первого и второго наборов от числа членов в рядах

$n=1$		$n=\overline{1,2}$		$n=\overline{1,3}$	
3.828	62.772	3.828	62.764	3.828	62.764
	1313.866	7.016	1230.289	7.016	1230.289
				10.173	6789.014

На основании проведенных численных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Частотный спектр состоит из двух наборов частот, соответствующих колебаниям свободной поверхности и упругого дна. В достаточно широком диапазоне изменений параметров механической системы наблюдается слабое изменение частот первого набора  $\Omega_{1n}^2$  и существенное изменение частот второго набора  $\Omega_{2n}^2$ .
2. Зависимость первой частоты второго набора  $\Omega_{2n}^2$  от безразмерной жесткости  $\tilde{D}_2$  в большинстве случаев почти линейная.
3. С увеличением глубины заполнения  $\tilde{h}$  происходит незначительное увеличение частот первого набора и существенное второго набора.
4. С уменьшением массовой характеристики  $\tilde{k}_2$  происходит значительное увеличение частот второго набора. Наибольшее увеличение происходит для безмассовой пластины ( $\tilde{k}_2=0$ ).



## ЛИТЕРАТУРА

1. Петренко М. П. Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости / М.П. Петренко // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, №6. – С. 44-50.
2. Петренко М. П. Вынужденные колебания жидкости и упругого днища цилиндрического бака / М.П. Петренко // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, №6. – С. 127-131.
3. Пожалостин А. А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде с упругим плоским дном / А.А. Пожалостин // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. – 1963. – №4. – С. 25-32.
4. Карнаух А. Ю. Свободные колебания плоского упругого дна коаксиального цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. – 2008. – Вип. 1. – С. 202-206.
5. Карнаух А. Ю. Собственные формы совместных колебаний упругого дна и жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух, Н. К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 78-84.
6. Карнаух А. Ю. Собственные колебания упругого дна цилиндрического сосуда и жидкости со свободной поверхностью / А.Ю. Карнаух, Н.К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 102-108.
7. Лакиза В. Д. Исследование динамических процессов в жестком цилиндрическом сосуде с упругим днищем, частично заполненном жидкостью / В.Д. Лакиза // Прикладная механика. – 2006. – Т.42, №11. – С. 114-120.
8. Дидок Н. К. Поперечные колебания цилиндра с упругим дном, содержащего жидкость со свободной поверхностью / Н.К. Дидок // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 71-108.
9. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью / Н.К. Дидок, Ю.Н. Кононов // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013, №5. – С. 30-34.
10. Дидок Н. К. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Н.К. Дидок, Ю.Н. Кононов // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 102-108.
11. Карнаух А. Ю. Свободные колебания упругих оснований двусвязного цилиндрического сосуда с жидкостью / А.Ю. Карнаух // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела : матер. VI Междунар. науч. конф. – Донецк : Юго-Восток, 2010. – С. 164-168.
12. Карнаух А. Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями // Изв. вузов Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. – 2013. – №2. – С. 33-36.
13. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л.В. Докучаев. – М. : Машиностроение, 1987. – 232с.
14. Кононов Ю. Н. О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости / Ю.Н. Кононов, Н.К. Дидок, Ю.А. Джуха // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. – 2014. – Вип. 1. – С. 64-69.

## REFERENCES

1. Petrenko, M.P. (1969), "Natural vibrations of the liquid with a free surface and elastic bottom of the cylindrical cavity", *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, vol. 5, no. 6, pp. 44-50.
2. Petrenko, M.P. (1970), "Forced vibrations of the liquid and the elastic bottom of the cylindrical tank", *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, vol. 6, no. 6, pp. 127-131.
3. Pozhalostin, A.A. (1963), "Natural vibrations of a liquid in a rigid circular cylindrical vessel with elastic flat bottom", *Izv. vuzov. Ser. Aviatsionnaya tekhnika – Aviation equipment Series*, 4, USSR, pp. 25-32.
4. Karnaukh, A.Yu. (2008), "Natural vibrations of flat elastic bottom of coaxial cylindrical vessel and ideal liquid with a free surface", *Visn. Donetskogo un-ta. Ser. A – Bulletin of the Donetsk university. Ser. A*, issue 1, pp. 202-206.
5. Karnaukh, A.Yu. and Didok, N.K. (2009), "Eigenforms of joint vibrations of elastic bottom and liquid with a free surface", *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 18, pp. 78-84.
6. Karnaukh, A.Yu. and Didok, N.K. (2010), "Natural vibrations of elastic bottom of cylindrical vessel and a liquid with a free surface", *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 20, pp. 102-108.
7. Lakiza, V.D. (2006), "Investigation of dynamic processes in cylindrical tank with elastic bottom, partially filled with liquid", *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*, vol. 42, no. 11, pp. 114-120.
8. Didok, N.K. (2011), "Transverse vibrations of cylinder with elastic bottom, containing a liquid with a free surface", *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 22, pp. 71-108.
9. Didok, N.K. and Kononov, Yu.N. (2013), "Dynamics and stability of vibrations of a cylindrical tank with elastic bottom and liquid with a free surface", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki – Proceedings of the universities of the North Caucasus region. Natural sciences*, 5, Russia, pp. 30-34.
10. Didok, N.K. and Kononov, Yu.N. (2013), "Dynamics and stability of vibration of a cylindrical tank with perfect liquid and elastic foundation". *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine*, vol. 27, pp. 102-108.
11. Karnaukh, A.Yu. (2010), "Natural vibrations of elastic foundation of a doubly connected cylindrical vessel with liquid", *Actual problems of solid mechanics: VI Mezhdunar. nauch. konf. (2010) – The Sixth International Conference*, Yugo-Vostok, Donetsk, pp. 164-168.
12. Karnaukh, A.Yu. (2013), "Vibrations of an elastic plate, separating a liquid in a cylindrical vessel with elastic foundation", *Izv. vuzov Sev.-Kav. region. Estestv. Nauki – Proceedings of the universities of the North Caucasus region. Natural sciences*, 2, Russia, pp. 33-36.
13. Dokuchaev, L.V. (1987), *Nelineynaya dinamika letatelnykh apparatov s deformiruemyimi elementami* [Nonlinear dynamics of flight vehicles with deformable elements], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
14. Kononov, Yu.N., Didok, N.K. and Dzhukha, Yu.A. (2014), "About solution of generalized inhomogeneous biharmonic equation in problems of hydroelasticity". *Visn. Donetskogo un-tu. Ser. A – Bulletin of the Donetsk university. Serie A*, issue 1, pp. 64-69.