

УДК 624.078.4

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ. УПРОЩЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Куреннов С. С., к. т. н., доцент

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, 61070, Украина*

ss_kurennov@mail.ru

Решена задача о напряженном состоянии клеевого соединения прямоугольных пластин в упрощенной двумерной постановке. Решение учитывает изгиб несущих слоев в плоскости соединения. Напряжения полагаются равномерными по толщине элементов соединения. Для построения решения использована гипотеза об абсолютной жесткости несущих слоев в поперечном направлении. Поперечные перемещения несущих слоев находятся согласно балочной теории. Продольные перемещения – согласно уточненной теории, которая учитывает взаимный сдвиг элементов слоя в продольном направлении. Решена модельная задача.

Ключевые слова: клеевое соединение, двумерная модель, модель Фолькерсена, разделение переменных.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ. СПРОЩЕНА ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ

Куреннов С. С., к. т. н., доцент

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,
вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна*

ss_kurennov@mail.ru

Розв'язано задачу про напружений стан клейового з'єднання прямокутних пластин у спрощеній двовимірній постановці. Розв'язок враховує згин зовнішніх шарів у площині з'єднання. Напруження вважаються рівномірними за товщиною елементів з'єднання. Для побудови розв'язку використано гіпотезу про абсолютну жорсткість шарів, що з'єднуються у поперечному до навантаження напрямку. Поперечні переміщення зовнішніх шарів знаходять згідно з теорією балок, поздовжні переміщення – згідно з уточненою теорією, яка враховує взаємний зсув елементів шару в подовжному напрямку. Розв'язано модельну задачу.

Ключові слова: клейове з'єднання, двовимірна модель, модель Фолькерсена, розподіл змінних.

THE STRESSED STATE OF THE ADHESIVE JOINT. A SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL

Kurennov S. S., Ph.D. (Engineering), Assoc. Prof.

*National Aerospace University «KhAI»,
17 Chkalova str., Kharkiv 61070, Ukraine*

ss_kurennov@mail.ru

This article is dedicated to the urgent stressed state problem for the lapping adhesive joint in the 2D formulation. The purpose of this work is solution of the stressed state problem for the adhesive joint of the rectangular plates in the case of longitudinal load, which generates a deflective moment at the contact plane. Here was obtained an analytical solution for the first time. To construct solution we use a simplified 2D Volkersen model, according to which an adherend layers are supposed to be absolutely rigid in the cross direction. A plates rigidity hypothesis in cross direction was used before at the creation of the most accurate beam theory, and its essence is that we refuse a plane section hypothesis. This technique was developed by author for the two plates joint. The outer layers work in tension, in compression and in shear only. The adhesive joint works in shear only. The stress values are supposed to be constant along the layers depth. The stress values in the adhesive joint are proportional to the difference of the outer layers shift. According to the rigidity layers hypothesis, the layers shift in cross direction are constant by width and depend on the longitudinal coordinate only. The outer layers shift are given as superposition of two terms. The first component is conditioned by bend in the joint plane and can be calculated according to a plane section hypothesis. The second component is conditioned by intershift of the bearing layer elements in the longitudinal direction. Relatively to the first component the system of the two ordinary differential equations was obtained relatively to the layer's cross shift. The second shift component is described by the system of the two partial differential equations of a second order. The solution of a given system was obtained by the variable separation method and has an eigenfunctions series form. The eigenfunctions are obtained from the homogeneous boundary conditions at the lateral sides of a joint. Here was solved the Model problem.

Key words: glued joint, analytical solution, Volkersen`s model, 2D model, separation of variables.

ВВЕДЕНИЕ

Нахлесточные клеевые соединения широко распространены в современной технике. В многочисленной научно-технической литературе приведены методики определения напряженного состояния соединений, построенные на базе различных гипотез и учитывающие те или иные конструктивные и экспериментальные факторы [1, 2]. В большинстве методик распределение напряжений по толщине соединяемых (несущих) слоев полагается равномерным или линейным (вследствие изгиба), и равномерным по ширине соединения. Однако в ряде случаев при расчете напряженного состояния соединений необходимо учитывать неравномерность деформаций по ширине соединения. В этом случае для уменьшения размерности задачи и сведения ее к двумерной, изгиб соединяемых слоев не учитывается, и напряжения полагаются равномерными по толщине. Построение решения задачи о напряженном состоянии соединения в общей двумерной постановке представляется чрезвычайно сложной проблемой [3], аналитическое решение которой пока неизвестно. Исследования данной проблемы численными методами рассмотрено в работах [4, 5]. Существует два приближенных подхода, которые позволяют получить решение в аналитической форме. Первый подход состоит в том, что несущие слои полагаются податливыми на сдвиг [6-9]. Вследствие этого касательные напряжения в несущих слоях равны нулю. Этот подход позволяет оценить влияние на напряженное состояние соединения поперечных деформаций, обусловленных коэффициентами Пуассона соединяемых слоев. Приложенная нагрузка в этом случае полагается равномерно распределенной по сторонам соединения. Второй подход заключается в том, что несущие слои полагаются абсолютно жесткими в поперечном направлении, т.е., в процессе деформации соединяемые слои не изменяют своей ширины [10, 11]. Эта гипотеза использована в уточненной теории балок [12, 13]. Данный подход позволяет получить решение задачи при неравномерно приложенной нагрузке, однако пуассоновы деформации не учитываются.

В предыдущих работах автора [10, 11] прикладываемая нагрузка полагалась симметричной относительно продольной оси соединения, а поперечные перемещения несущих слоев вследствие этой симметрии – нулевыми. В настоящей работе рассматривается более общий подход, который избавлен от этого ограничения. Рассматривается задача, в которой полагается равными нулю не поперечные перемещения, а поперечные деформации. Поперечные перемещения постоянны по ширине и зависят от продольной координаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим клеевое соединение двух прямоугольных пластин ($L \times 2h$), показанное на рис. 1. Боковые стороны свободны от нагрузки. Несущие слои деформируются только в плоскости соединения, клеевой слой работает на сдвиг, напряжения равномерны по толщине слоев. Не уменьшая общности предлагаемого подхода, положим, что нагрузка приложена только ко второму слою вдоль стороны $x = 0$, а первый слой по стороне жестко закреплен.

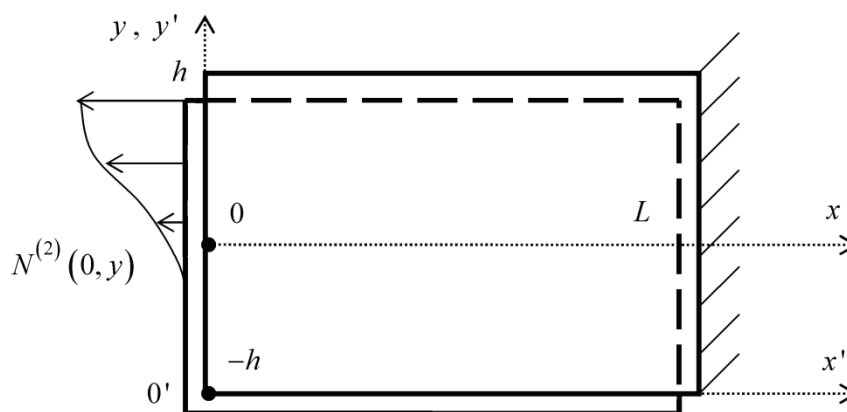


Рис. 1. Схема соединения

Уравнения равновесия несущих слоев в области склейки имеют вид [8]:

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad -\tau_x + \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad -\tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где верхний индекс означает номер несущего слоя, а нижний – направление; τ_x, τ_y – касательные напряжения в клеевом слое вдоль соответствующей оси; $q^{(1)}, q^{(2)}$ – касательные усилия в соответствующих несущих слоях; $N_x^{(1)}, N_y^{(1)}, N_x^{(2)}, N_y^{(2)}$ – нормальные усилия в несущих слоях.

Усилия в слоях (эффект Пуассона не учитывается)

$$N_x^{(k)} = B_k \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x}; \quad q^{(k)} = \delta^{(k)} G^{(k)} \left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \right), \quad (3)$$

где $u^{(k)}, v^{(k)}$ – перемещения слоя k ($k=1, 2$) в продольном и поперечном направлении соответственно; $B_k = \delta^{(k)} E_x^{(k)}$; $E_x^{(k)}, G^{(k)}, \delta^{(k)}$ – модуль упругости, модуль сдвига и толщина соответствующего несущего слоя.

Напряжения в клеевой прослойке [7, 8]

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (u^{(1)} - u^{(2)}); \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (v^{(1)} - v^{(2)}), \quad (4)$$

где G_0 и δ_0 – модуль сдвига и толщина клеевого слоя соответственно.

Однородные краевые условия:

$$\begin{aligned} u^{(1)} \Big|_{x=L} = 0; \quad v^{(1)} \Big|_{x=L} = 0; \quad N_x^{(2)} \Big|_{x=L} = 0; \\ N_x^{(1)} \Big|_{x=0} = 0; \quad q^{(k)} \Big|_{y=\pm h} = 0; \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=\pm h} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

На левой боковой стороне задано нормальное усилие

$$N^{(2)} \Big|_{x=0} = F(y). \quad (6)$$

В силу гипотезы об абсолютной жесткости соединяемых слоев в поперечном направлении, поперечные перемещения $v^{(k)}(x, y)$ зависят только от координаты x , поэтому обозначим их $V^{(k)}(x)$. Продольные же перемещения $u^{(k)}$ представим в виде суммы двух составляющих: первая составляющая вычисляется согласно гипотезе плоских сечений и описывает изгиб в плоскости соединения. Вторая составляющая $U^{(k)}(x, y)$ описывает продольные перемещения элементов слоев при условии равенства нулю поперечных перемещений [8, 9].

Ось x проходит вдоль продольной оси соединения, как показано на рис. 1, следовательно:

$$u^{(k)}(x, y) = -y \cdot \frac{dV^{(k)}}{dx} + U^{(k)}(x, y). \quad (7)$$

Исходную задачу можно разделить на две независимые составляющие – изгиб в плоскости соединения, который происходит согласно гипотезе плоских сечений, и продольное перемещение элементов слоев при отсутствии поперечных перемещений. Соответственно, краевое условие (1.6) также необходимо представить в виде суммы линейно распределенного усилия, которое обуславливает чистый изгиб соединения и безмоментной нагрузки

$$F(y) = K \cdot y + N_0(y), \quad (8)$$

где K – коэффициент, определяемый из условия равенства изгибающих моментов (8) и (6),

$$K \int_{-h}^h y^2 dy = \int_{-h}^h y \cdot F(y) dy.$$

Изгибающий момент, действующий в сечении соединения

$$M = \int_{-h}^h y \cdot F(y) dy. \quad (9)$$

Задача разделяется на две независимые подзадачи:

1) Решение задачи об изгибе в плоскости соединения, при котором несущие слои рассматриваются согласно теории балок Бернулли. Поперечные перемещения $V^{(k)}$ постоянны по ширине, продольные – вычисляются как $y \cdot \frac{dV^{(k)}}{dx}$ (1.7). В качестве краевого условия используется первое слагаемое (8) в форме $\left. \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{M}{E_x I^{(2)}}$, где момент вычисляется по (9), а $I^{(2)}$ – момент инерции второго слоя, $I^{(2)} = \frac{2}{3} \delta_2 h^3$.

2) Решение задачи о продольных перемещениях несущих слоев $U^{(k)}(x, y)$ при отсутствии поперечных перемещений. В качестве краевого условия используется второе слагаемое (8).

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ

Напряжения в клее (4) имеют вид:

$$\tau_{V,x} = -\frac{G_0}{\delta_0} y \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right); \quad \tau_{V,y} = \frac{G_0}{\delta_0} (V^{(1)} - V^{(2)}). \quad (10)$$

Продольные усилия $N_{V,x}^{(k)} = B_k y \frac{d^2 V^{(k)}}{dx^2}$. Нижний индекс V указывает, что напряжения или усилия рассматриваются не в общем случае, а обусловленные только перемещениями $V^{(k)}$.

Подставив $N_{V,x}^{(k)}$ и (10) в уравнения (1), проинтегрировав по y и удовлетворив условиям равенства нулю касательных напряжений на боковых сторонах соединения (5), получим:

$$q_V^{(k)} = (-1)^k \frac{h^2 - y^2}{2} \left[\frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{dV^{(1)}}{dx} - \frac{dV^{(2)}}{dx} \right) - (-1)^k B_k \frac{d^3 V^{(k)}}{dx^3} \right]. \quad (11)$$

Подставив (11) в (2) и проинтегрировав по y , получим:

$$N_y^{(k)} = (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} y \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) + f_k(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - h^2 y \right) \left[B_k \frac{d^4 V^{(k)}}{dx^4} - (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right) \right]. \quad (12)$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ находятся из условий (5) $N_y^{(k)} \Big|_{y=h} = 0$:

$$f_k = -\frac{h^3}{3} B_k \frac{d^4 V^{(k)}}{dx^4} - (-1)^k \frac{G_0}{\delta_0} \left[\frac{h^3}{3} \left(\frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} - \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right) - h \left(V^{(1)} - V^{(2)} \right) \right].$$

Краевые условия на второй боковой стороне $N_y^{(k)} \Big|_{y=-h} = 0$ приводят к системе

$$A_4 \frac{d^4 \vec{V}}{dx^4} + A_2 \frac{d^2 \vec{V}}{dx^2} + A_0 \vec{V} = 0, \quad (13)$$

где

$$\vec{V} = \left(V^{(1)}; V^{(2)} \right)^T; \quad A_4 = \frac{\delta_0}{G_0} \begin{pmatrix} \delta^{(1)} E_x^{(1)} & 0 \\ 0 & \delta^{(2)} E_x^{(2)} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_0 = \frac{3}{h^3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Частное решение системы (13) ищем в виде вектор-функции $\vec{V} = e^{\theta x} \vec{H}$. Подставив в (13), получим систему линейных однородных уравнений:

$$\left(A_4 \theta^4 + A_2 \theta^2 + A_0 \right) \vec{H} = 0, \quad (14)$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$\det \left(A_4 \theta^4 + A_2 \theta^2 + A_0 \right) = 0. \quad (15)$$

Уравнение представляет собой уравнение 8-й степени, четыре корня которого равны нулю, а четыре – отличны от нуля, обозначим их θ_n .

Общее решение (13) можно представить в виде:

$$\vec{V} = \sum_{n=1}^4 S_n x^{(n-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^4 S_{n+4} e^{\theta_n x} \vec{H}_n, \quad (16)$$

где \vec{H}_n – решения системы (14), определяемые с точностью до постоянного множителя S_n .

В формулы поперечных перемещений слоев (16) входит 8 констант интегрирования, которые определяются из следующих краевых условий:

$$V_1(L) = \frac{dV_1(x)}{dx} \Big|_{x=L} = \int_{-h}^h q^{(1)}(0, y) dy = \frac{d^2 V^{(1)}}{dx^2} \Big|_{x=0} = \int_{-h}^h q^{(2)}(0, y) dy = 0;$$

$$\left. \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{M}{E_x I^{(2)}}; \int_{-h}^h q^{(2)}(L, y) dy = 0; \left. \frac{d^2 V^{(2)}}{dx^2} \right|_{x=L} = 0.$$

Эти условия приводят к системе линейных уравнений относительно констант S_1, \dots, S_8 .

БЕЗМОМЕНТНАЯ ПРОДОЛЬНАЯ НАГРУЗКА

Нагрузка $N_0(y)$ (8) имеет нулевой изгибающий момент и обуславливает только продольные перемещения несущих слоев $U^{(k)}$ (7). Для удобства построения решения второй подзадачи введем систему координат $x'Oy'$, начало которой находится в одном из углов прямоугольной области (рис. 1). Очевидно, что $x = x'$ и $y = y' - h$.

В работе [10] показано, что перемещения $U^{(k)}$ можно представить в виде суммы $U^{(k)} = W^{(k)}(x') + V^{(k)}(x', y')$, где $W^{(k)}(x')$ представляет собой классическое одномерное решение Фолькерсена, а $V^{(k)}(x', y')$ имеет вид разложения в ряд по собственным функциям.

В частности, если внешние слои соединения обладают свойством $\frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2} = \mu$, то перемещения $U^{(k)}$ имеют вид:

$$U_k = C_0 x' + D_0 + d_k \left(A_0 \frac{\text{ch}(\xi_0 x')}{\text{sh}(\xi_0 L)} + B_0 \frac{\text{ch}(\xi_0 (x' - L))}{\text{sh}(\xi_0 L)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y'}{2h} \left[C_n \frac{\text{ch}(\chi_n x')}{\text{sh}(\chi_n L)} + D_n \frac{\text{ch}(\chi_n (x' - L))}{\text{sh}(\chi_n L)} + d_k \left(A_n \frac{\text{ch}(\xi_n x')}{\text{sh}(\xi_n L)} + B_n \frac{\text{ch}(\xi_n (x' - L))}{\text{sh}(\xi_n L)} \right) \right]. \quad (17)$$

Здесь $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{2h}$; $\chi_n = \sqrt{\mu} \frac{\pi n}{2h}$; $\xi_n = \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 1}}{\alpha_3}$; $\lambda_n = \alpha_4 \frac{\pi n}{2h}$; $\alpha_3^2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$; $\alpha_4^2 = \mu \alpha_3^2$;
 $\alpha_1 = E_x^{(1)} \delta_0^{(1)} \frac{\delta_0}{G_0}$; $\alpha_2 = E_x^{(2)} \delta_0^{(2)} \frac{\delta_0}{G_0}$; $\mu = \frac{G_1}{E_1} = \frac{G_2}{E_2}$; $\gamma_1 = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2}$; $\gamma_2 = \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Продольные усилия в несущих слоях находим, используя (3):

$$N_{U,x}^{(k)} = \delta_k E_k \left[C_0 + d_k \left(A_0 \frac{\text{sh}(\xi_0 x')}{\text{sh}(\xi_0 L)} + B_0 \frac{\text{sh}(\xi_0 (x' - L))}{\text{sh}(\xi_0 L)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n y'}{2h} \left[\chi_n \left(C_n \frac{\text{sh}(\chi_n x')}{\text{sh}(\chi_n L)} + D_n \frac{\text{sh}(\chi_n (x' - L))}{\text{sh}(\chi_n L)} \right) + d_k \xi_n \left(A_n \frac{\text{sh}(\xi_n x')}{\text{sh}(\xi_n L)} + B_n \frac{\text{sh}(\xi_n (x' - L))}{\text{sh}(\xi_n L)} \right) \right] \right]. \quad (18)$$

Коэффициенты A_0, C_0, B_0, D_0 и A_n, C_n, B_n, D_n найдем, разложив функцию $N_0(y')$ (8) в ряд Фурье

$$N_0(y') = \frac{v_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos \frac{\pi n y'}{2h}.$$

Система уравнений относительно A_0, C_0, B_0, D_0 имеет вид:

$$C_0 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} B_0 = 0; \quad C_0 - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} B_0 = \frac{v_0}{2\delta_2 E_2};$$

$$C_0 L + D_0 + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} A_0 = 0; \quad C_0 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{\alpha_3} A_0 = 0.$$

Для $n > 0$ получаем уравнения:

$$\begin{cases} -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 \xi_n}{\alpha_1 + \alpha_2} = 0; \\ -D_n \chi_n - B_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = \frac{v_n}{\delta_2 E_2}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_n + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2} A_n = 0; \\ C_n \chi_n + A_n \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \xi_n = 0. \end{cases}$$

Первые слагаемые формул (17) и (18), которые стоят перед знаком суммы, представляют собой классическое одномерное решение Фолькерсена [1, 2]. Абсолютные значения функций, стоящих под знаками сумм в (17) и (18), экспоненциально убывают при удалении x от концов вглубь области. Т.е., влияние неравномерностей в граничных условиях затухает в глубине области, что согласуется с принципом Сен-Венана.

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим клеевое соединение алюминиевых пластинок ($E_1 = E_2 = 70$ ГПа, $G_1 = G_2 = 25$ ГПа), имеющих размеры $L = 5$ см, $2h = 3$ см, $\delta_1 = 2$ мм, $\delta_2 = 3$ мм. Толщина клеевого слоя $\delta_0 = 0,3$ мм, модуль сдвига $G_0 = 0,8$ ГПа. Продольная нагрузка (6) распределена по закону

$$F(y) = \begin{cases} F_0 & y \geq h/2; \\ 0 & y < h/2. \end{cases}$$

График напряжений τ_x (4), (для $u^{(k)}$ вычислялись согласно (7)), показан на рис. 2.

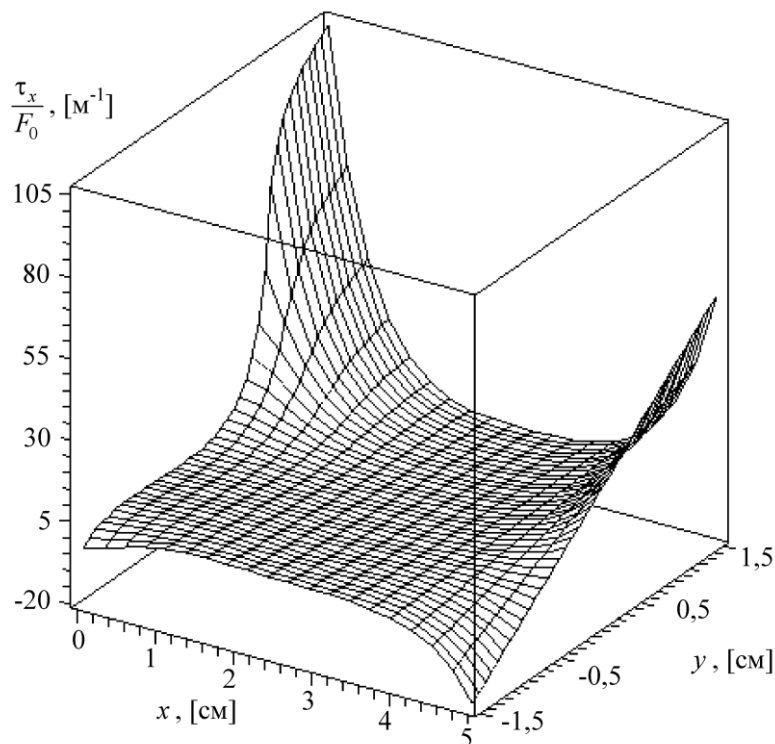


Рис. 2. Напряжения в клее τ_x

Расчеты показывают, что даже для данной геометрии соединения вклад перемещений $V^{(k)}$ в продольные касательные напряжения τ_x является существенным – напряжения, обусловленные перемещениями $V^{(k)}$, составляют около половины суммарных напряжений.

ВЫВОДЫ

Создана упрощенная двумерная модель клеевого соединения, в которой учитывается неравномерность продольных перемещений по ширине соединения. В поперечном направлении несущие слои полагаются абсолютно жесткими, соответствующие напряжения в клее (τ_y) по ширине соединения распределены равномерно. Эта идеализация позволяет получить аналитическое решение и оценить величину напряжений в продольном направлении (τ_x), которые значительно превосходят соответствующие поперечные напряжения, что позволяет использовать предложенный подход для задач проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. da Silva L. F. M. Analytical models of adhesively bonded joints–Part I : Literature survey / L.F.M. da Silva, P.J.C. das Neves, R.D. Adams, J.K. Spelt // *Int. J. of Adhesion & Adhesives*. – 2009. – Vol. 29. – P. 319-330.
2. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях / Ю.П. Артюхин // *Исследования по теории пластин и оболочек*. – К. : Изд-во КГУ, 1973. – Вып. 10. – С. 3-27.
3. Рябенков Н. Г. Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин / Н.Г. Рябенков, Ю.П. Артюхин // *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, Изд-во Казанского ун-та. – 1981. – №16. – С. 82-90.
4. Andruet R. H. Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints / R.H. Andruet, D.A. Dillard, S.M. Holzer // *Int. J. of Adhesion & Adhesives*. – 2001. – №21. – P. 17-34.
5. Oterkus E. Nonlinear analysis of bonded composite single-lap joints / E. Oterkus, A. Barut, E. Madenci // *NASA Technical Report AIAA Paper 2004-1560, ID 20040084438* (Acquired Aug 03, 2004). – 18 p.
6. Карпов Я. С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов / Я.С. Карпов. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2006. – 359 с.
7. Adams R. D. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint / R.D. Adams, N.A. Peppiatt // *J. of Strain Analysis*. – 1973. – Vol. 8 (2). – P. 134-139.
8. Mathias J. D. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches / J.D. Mathias, M. Grédiac, X. Balandraud // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 6921-6947.
9. Kurennov S. S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution / S.S. Kurennov // *Mechanics of Composite Materials*, March, 2014. – Vol. 50, No. 1. – P. 105-114 (Russian Original Vol. 50, No. 1, January-February, 2014, P. 147-158).
10. Куреннов С. С. Упрощенная двумерная модель клеевого соединения. Учет неравномерного приложения загрузки / С.С. Куреннов // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»*. – 2014. – Вып. 2 (78). – С. 45-56.
11. Куреннов С. С. Напряженное состояние клеевого соединения пластин разной ширины. Аналитическое решение / С.С. Куреннов, Е.В. Танчик // *Вопросы проектирования и*

производства конструкций летательных аппаратов : сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – Вып. 4 (80). – С. 113-123.

12. Васильев В. В. О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы / В.В. Васильев, С.А. Лурье // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – №4. – С. 40-49.
13. Васильев В. В. Симметрия тензора напряжений и сингулярные решения в теории упругости / В.В. Васильев // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – № 2. – С. 62-72.

REFERENCES

1. da Silva, L.F.M., das Neves, P.J.C., Adams, R.D. and Spelt, J.K. (2009), “Analytical models of adhesively bonded joints–Part I: Literature survey”, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, vol. 29, pp. 319-330.
2. Artukhin, U.P. (1973), “Stresses in glued joints”, *Issledovania po teorii plastin i oboloček*, issue 10, pp. 3-27.
3. Ryabenkov, N.G. and Artukhin, U.P. (1981), “Determination of stress in the adhesive connection of two semi-infinite plates”, *Issledovania po teorii plastin i oboloček*, no. 16, pp. 82-90.
4. Andruet, R.H., Dillard, D.A. and Holzer, S.M. (2001), “Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints”, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, no. 21, pp. 17-34.
5. Oterkus, E., Barut, A. and Madenci, E. (2004), “Nonlinear analysis of bonded composite single-lap joints”, *NASA Technical Report AIAA Paper 2004-1560, ID 20040084438* (Acquired Aug 03, 2004), 18 p.
6. Karpov, Ya.S. (2006), *Soedineniya detaley i agregatov iz kompozitsionnykh materialov* [Joining of parts and assemblies made of composite materials], KHaI, Kharkiv.
7. Adams, R.D. and Peppiatt, N.A. (1973), “Effect of Poisson’s ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint”, *Journal of Strain Analysis*, vol. 8(2), pp. 134-139.
8. Mathias, J.D., Grédiac, M. and Balandraud, X. (2006), “On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 6921-6947.
9. Kurennov, S.S. (2014), “An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution”, *Mechanics of Composite Materials*, vol. 50(1), pp. 105-114.
10. Kurennov, S.S. (2014), “The simplified two-dimensional model of the bond. Accounting uneven application download”, *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstrukcij letatel'nykh apparatov*, issue 2(78), pp. 113-123.
11. Kurennov, S.S. and Tanchik, E.V. (2014), “Stress state of adhesive bonding plates of different widths. Analytical solution”, *Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstrukcij letatel'nykh apparatov*, issue 4(80), pp. 113-123.
12. Vasil'ev, V.V. (2013), “On the solution singularity in the plane elasticity problem for a cantilever strip”, *Mechanics of Solids*, no. 4, pp. 40-49.
13. Vasil'ev, V.V. (2010), “Stress tensor symmetry and singular solutions in the theory of elasticity”, *Mechanics of Solids*, no. 2. pp. 62-72.