

УДК 534

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩЕЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ

Михлин Ю. В., д. ф.-м. н., профессор, Клименко А. А., Плаксий Е. Ю., аспирант

Национальный технический университет «ХПИ»,

ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002, Украина

muv@kpi.kharkov.ua

Рассматриваются резонансные колебания в системе с ограниченным возбуждением, где наблюдается взаимодействие источника энергии и упругой подсистемы, что может приводить к возникновению больших резонансных колебаний такой подсистемы. Система содержит нелинейный гаситель колебаний, который позволяет существенно уменьшить амплитуды упругих резонансных колебаний. Взаимодействие нелинейных форм колебаний в резонансе анализируется с использованием метода многих масштабов и перехода к редуцированной системе, которая записывается относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд колебаний и разности фаз. Выделены так называемые «переходные формы колебаний», которые существуют только при некотором значении энергии системы. Локализация колебаний обсуждается.

Ключевые слова: система с ограниченным возбуждением, резонансные колебания, локализация колебаний

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ В СИСТЕМІ З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ, ЩО МІСТИТЬ ГАСИТЕЛЬ КОЛИВАНЬ

Міхлін Ю. В., д. ф.-м. н., професор, Клименко А. О., Плаксієв К. Ю., аспірант

Національний технічний університет «ХПІ»,

вул. Фрунзе, 21, м. Харків, 61002, Україна

muv@kpi.kharkov.ua

Розглядаються резонансні коливання в системі з обмеженим збудженням, де спостерігається взаємодія джерела енергії та пружної підсистеми, що може призвести до виникнення великих резонансних коливань такої підсистеми. Система містить нелінійний гаситель коливань, який дозволяє суттєво зменшити амплітуди пружних резонансних коливань. Взаємодія нелінійних форм коливань в резонансі аналізується з використанням методу багатьох масштабів та переходу до редукованої системи, яка формується відносно енергії системи, арктангенсу відношенню амплітуд коливань та різниці фаз. Виділено так звані «перехідні форми коливань», які існують лише при деяких значеннях енергії системи. Локалізація коливань обговорюється.

Ключові слова: система з обмеженим збудженням, резонансні коливання, локалізація коливань

RESONANCE VIBRATIONS IN A SYSTEM CONTAINING VIBRATION ABSORBER

Mikhlin Yu. V., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, Klimenko A. A.,

Plakсий K. Yu., Graduate Student

National Technical University «KhPI»,

21, Frunze str., Kharkiv, Ukraine

muv@kpi.kharkov.ua

Resonance vibrations in the system with limited power supply are considered. In this system an interaction of the energy source and the elastic subsystem which is under the energy source can be observed. It gives large amplitude resonance vibrations of the elastic subsystem (the Zommerfeld effect). The system under consideration contains the nonlinear vibration absorber. Frequency responses of the system are constructed by the harmonic balance method. It is obtained that the nonlinear absorber permits to reduce essentially amplitudes of resonance vibrations of the elastic subsystem. It is shown that the system parameters can be chosen so that the system will not be situated in the first resonance region where the largest vibration amplitudes are observed.

Interaction of nonlinear vibration modes near the resonance in the dissipative system with limited power supply is analyzed by the multiple scale method and by transformation to the “so-called” reduced system stated with respect to the system energy, the arctangent of vibration amplitudes ratio and the difference of phases of the solution. Resonances on different fundamental frequencies are considered. A transfer of the vibration energy to the stable localized nonlinear modes is observed and discussed. The transient nonlinear modes of coupled vibrations, existing only for some determined level of the dissipative system energy, are identified. In vicinity of time, corresponding to this energy level, the system motions are close to the transient vibration modes; then, when the energy decreases, the system motions tend to other stable vibration mode. Localization of vibrations on nonlinear modes corresponding to some fundamental frequencies is discussed.

Key words: system with limited power supply, resonance vibrations, localization of vibrations

ВВЕДЕНИЕ

Система с ограниченным возбуждением характеризуется взаимодействием источника энергии и упругой подсистемы, которая находится под действием этого источника энергии (такие системы называют также неидеальными системами). Одним из наиболее интересных эффектов, проявляющимся в системах с ограниченным возбуждением, является так называемый эффект Зоммерфельда [1], когда в упругой подсистеме возникает устойчивый резонансный режим с большими амплитудами, и значительная часть энергии колебаний переходит из источника энергии в эти резонансные колебания. Динамика систем с ограниченным возбуждением в резонансе была впервые аналитически описана В.О. Кононенко [2]. Позднее исследования динамики неидеальных систем были изложены в различных публикациях, в частности, в статьях [3, 4]. Известно, что использование динамических гасителей колебаний позволяет существенно уменьшить амплитуды резонансных колебаний. В данной статье рассмотрена неидеальная диссипативная система с маятниковым гасителем колебаний. Используются метод гармонического баланса и метод многих масштабов [3]. Учет диссипации позволяет проанализировать взаимодействие упругой подсистемы и источника энергии, оценить уменьшение амплитуды колебаний в резонансе благодаря использованию маятникового гасителя колебаний, а также выделить такие параметры системы, когда удастся избежать возникновения режима значительных резонансных колебаний. Резонансное поведение неидеальной системы, содержащей нелинейный гаситель колебаний, изучается также путем перехода к так называемой «редуцированной системе», которая записывается относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд и разности фаз. Анализируется взаимодействие нелинейных нормальных форм колебаний (ННФ) [5, 6], появление так называемых «переходных форм колебаний», которые существуют только при определенном значении энергии системы, а также переход к устойчивой локализованной форме колебаний.

1. СИСТЕМА С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩАЯ МАЯТНИКОВЫЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривается модель, которая представлена на рис. 1. Здесь двигатель D оказывает влияние на упругую подсистему с массой M посредством кривошипа радиуса r . К упругой подсистеме прикреплен виброгаситель с массой m .

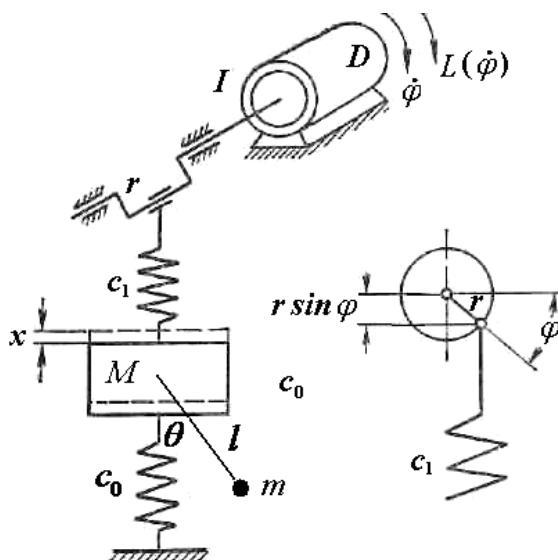


Рис. 1. Система с ограниченным возбуждением и маятниковым гасителем колебаний

Уравнения движения такой системы имеют следующий вид (здесь использовано разложение функций $\cos \theta$ и $\sin \theta$ в ряд Тейлора, причем удержаны слагаемые до третьей степени включительно):

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + \varepsilon m) \ddot{x} + (c_0 + c_1) x = c_1 r \sin \varphi - \varepsilon m l \left(\ddot{\theta} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) - \theta \dot{\theta}^2 \right); \\ I \ddot{\varphi} = \varepsilon (a - b \dot{\varphi} + c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi); \\ \varepsilon m l \left(l \ddot{\theta} + g \theta + \ddot{x} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где I – момент инерции вращающихся масс; $(c_0 + c_1)$ – жесткость упругой колебательной подсистемы с массой M ; $L = a - b\dot{\varphi}$ – движущий момент источника энергии (характеристика двигателя). Из уравнений (1) ясно, что момент $c_1 r x \cos \varphi$ определяет нагрузку на двигатель, которая определяется колебаниями упругой подсистемы. Малый параметр ε характеризует малость массы гасителя, а также малость амплитуд осцилляционных составляющих в законе изменения угловой скорости от времени по сравнению с постоянной составляющей угловой скорости.

2. ПОСТРОЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для построения амплитудно-частотных характеристик на первом этапе отбрасываются малые осцилляционные составляющие в законе изменения угловой скорости. Используется метод гармонического баланса, в соответствии с которым представим $x = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$; $\theta = A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$. Для определения коэффициентов A_i , B_i получена система алгебраических уравнений. На рис. 2. изображены амплитудно-частотные кривые как для системы без гасителя колебаний (рис. 2, а), так и для системы с виброгасителем (2, б). Расчет проводился при следующих параметрах системы: $M = 1$; $m = 0,1$; $\beta = 0,01$; $g = 9,8$; $\varepsilon = 0,1$; $c_0 = 1$; $c_1 = 0,5$; $r = 0,1$; $l = 1$; $a = 5$; $b = 2$.

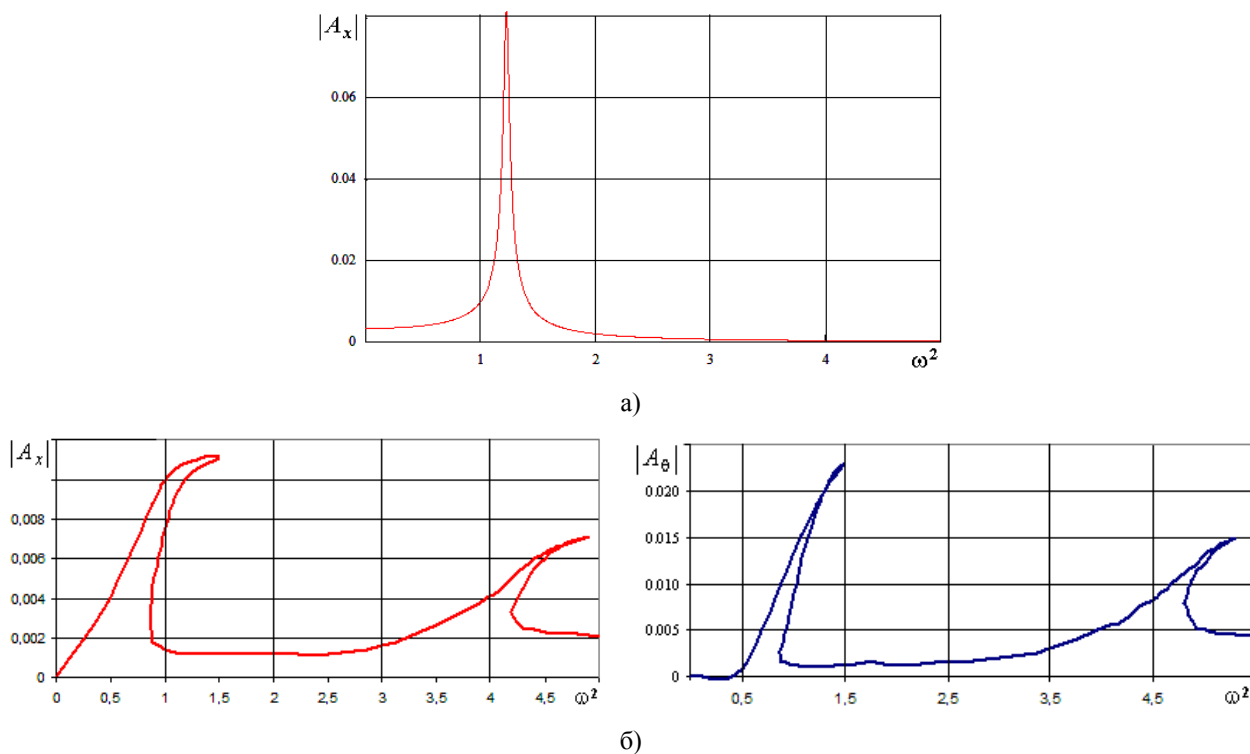


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики неидеальной системы: а) без гасителя; б) с виброгасителем

Очевидно, что наличие маятниковго гасителя колебаний приводит к уменьшению в несколько раз амплитуд колебаний упругой подсистемы.

Для уточнения закона изменения угловой скорости с учетом малых осцилляционных слагаемых во втором уравнении системы (1) используется метод многих масштабов [3], в соответствии с которым вводятся разложения

$$x(t, \varepsilon) = x(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon), \quad \varphi(t, \varepsilon) = \varphi(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon), \quad \theta(t, \varepsilon) = \theta(T_0, T_1, T_2, \dots, \varepsilon), \quad (2)$$

где $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, ...; кроме того,

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots; \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots; \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots \quad (3)$$

Для дальнейших расчетов вводится следующая замена переменных: $x_0 = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) = \tilde{A} \sin(\omega t + \phi)$, где новые переменные $\tilde{A}$ и ϕ являются медленно изменяющимися функциями времени. В нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) из второго уравнения системы (1) получаем, что $\varphi_0 = \omega(T_1)T_0$. Уравнение первого приближения для переменной φ имеет следующий вид:

$$I \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T_0^2} + 2I \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_1} - a + b \frac{\partial \varphi_0}{\partial T_0} - c_1 r (x_0 - r \sin \varphi_0) \cos \varphi_0 = 0. \quad (4)$$

Условие отсутствия секулярных членов приводит к следующей зависимости $\tilde{A}^2$ от ω :

$$\tilde{A}^2 = \frac{3I}{2\beta} \omega - \frac{a\sqrt{c_0}}{\beta\sqrt{M}} - C e^{\frac{3\sqrt{c_0}}{4\sqrt{M}} T_1}. \quad (5)$$

Таким образом, $\tilde{A}^2$ зависит от медленно меняющейся переменной T_1 . На рис. 3 изображены различные случаи расположения графиков кривых L (характеристики источника энергии), отвечающих зависимости (5), где вычисления проводились для достаточно больших значений времени и амплитудно-частотных характеристик системы. Подбором параметров a и b можно добиться того, чтобы график L не пересекался с амплитудно-частотной кривой на частоте первого резонанса, где амплитуды колебаний наиболее велики (рис. 3, б). В случае, изображенном на рис. 3, а, расчет проводился для следующих параметров системы: $M = 1$; $m = 0,1$; $\beta = 0,001$; $g = 9,8$; $\varepsilon = 0,1$; $c_0 = 0,5$; $c_1 = 0,5$; $r = 0,5$; $l = 1$; $a = 2$; $b = 2$. Для построения графиков, изображенных на рис. 3, б, расчет проводился при следующих параметрах: $M = 1$; $m = 0,1$; $\beta = 0,03$; $g = 9,8$; $\varepsilon = 0,1$; $c_0 = 1$; $c_1 = 0,5$; $r = 0,1$; $l = 1$; $a = 4,5$; $b = 2$.

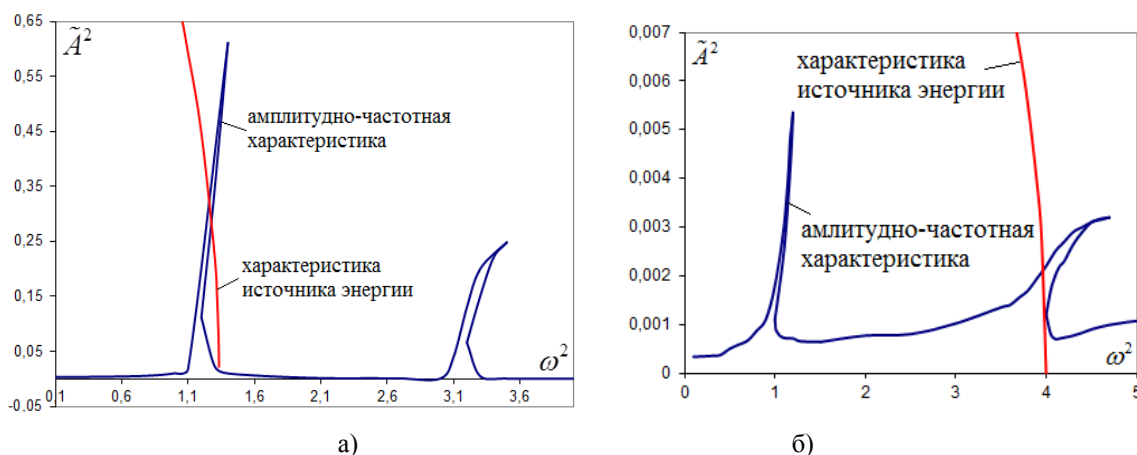


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики и характеристики источника энергии

3. ДИНАМИКА НЕИДЕАЛЬНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим теперь более детально динамику диссипативной неидеальной системы, содержащей нелинейный гаситель колебаний в виде осциллятора с кубической нелинейностью, в окрестности резонанса. Сделан переход к обобщенным координатам z_1, z_2 , которые отвечают фундаментальным частотам упругой подсистемы и гасителя. Затем применяется метод многих масштабов, то есть, использование разложений вида (2) и (3).

Вводятся также следующие последовательные замены переменных: $\varphi_0 = \Omega T_0$;

$$\begin{cases} z_{10} = C_1 e^{i\Omega T_0} + \bar{C}_1 e^{-i\Omega T_0}, \\ z_{20} = C_2 e^{i\omega_2 T_0} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_2 T_0}; \end{cases} \quad C_1 = a_1 e^{ib_1}, \quad C_2 = a_2 e^{ib_2}; \quad a_1 = K \sin \psi, \quad a_2 = K \cos \psi. \text{ В результате мы}$$

приходим к так называемой «редуцированной системе» [7-9], которая для случая резонанса на первой собственной частоте имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial T_1} = \frac{1}{2} (\bar{A} + \bar{B}\Omega + \bar{C}K \sin \psi \cos b_1); \\ \frac{\partial K}{\partial T_1} = \frac{L\Omega - \bar{A} - \bar{B}\Omega}{2\Omega} K \sin^2 \psi + \frac{S}{2\omega_2} K \cos^2 \psi - \left(\frac{\bar{C}}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi + \frac{N}{2\Omega} \right) \cos b_1 \sin \psi; \\ \frac{\partial \psi}{\partial T_1} = \left(\frac{L\Omega - \bar{A} - \bar{B}\Omega}{2\Omega} - \frac{S}{2\omega_2} \right) \sin \psi \cos \psi - \left(\frac{\bar{C}}{2\Omega} K \sin^2 \psi + \frac{N}{2\Omega K} \right) \cos \psi \cos b_1; \\ \frac{\partial b_1}{\partial T_1} = -\frac{\Delta + \Omega T_0 (\bar{A} + \bar{B}\Omega)}{2\Omega} - \frac{T_0 \bar{C}}{2} K \sin \psi \cos b_1 + \frac{M}{2\Omega} K^2 \sin^2 \psi + \frac{P}{2\Omega} K^2 \cos^2 \psi + \frac{N}{2\Omega K \sin \psi} \sin b_1; \\ \frac{\partial b_2}{\partial T_1} = -\frac{R}{2\omega_2} K^2 \cos^2 \psi - \frac{T}{2\omega_2} K^2 \sin^2 \psi, \end{cases} \quad (6)$$

где Ω – изменяющаяся во времени частота вращения ротора; K – энергия диссипативной системы, также изменяющаяся во времени; ψ – арктангенс отношения амплитуд, отвечающих колебаниям с фундаментальными частотами упругой подсистемы и гасителя; b_1, b_2 – фазы тех же колебаний. Уравнение относительно разности фаз $\xi = b_1 - b_2$ записывается таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial T_1} = & -\frac{\Delta + \Omega T_0 (\bar{A} + \bar{B}\Omega)}{2\Omega} + \left(\frac{M}{2\Omega} + \frac{T}{2\omega_2} \right) K^2 \sin^2 \psi + \left(\frac{P}{2\Omega} + \frac{R}{2\omega_2} \right) K^2 \cos^2 \psi + \\ & + \frac{N}{2\Omega K \sin \psi} \sin b_1 - \frac{T_0 \bar{C}}{2} K \sin \psi \cos b_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Все коэффициенты в последних уравнениях зависят от параметров рассматриваемой системы. С использованием уравнений (6)-(7) рассматривается взаимодействие нормальных форм колебаний, перекачка энергии из неустойчивых форм в устойчивые, возможность локализации энергии колебаний.

В частности, на рис. 4 представлены результаты интегрирования уравнений (6) и (7) методом Рунге-Кутты, когда начальные условия изменяются на интервале $0 \leq \psi(0) \leq \pi/2$ и выбраны следующие значения параметров системы: $K(0) = 0,1$, $c_0 = 1$ Н/м, $c_1 = 1$ Н/м, $c_2 = 0,2$ Н/м, $M = 1$ кг, $m = 0,05$ кг, $\beta = 0,05$, $\gamma = 0,3$ Н/м, $r = 0,05$ м, $\bar{A} = 0,115$, $\bar{B} = -0,08$, $\bar{C} = 0,01$ и $\Delta(0) = -0,5$. На рис. 4 показана зависимость $\xi(\psi)$.

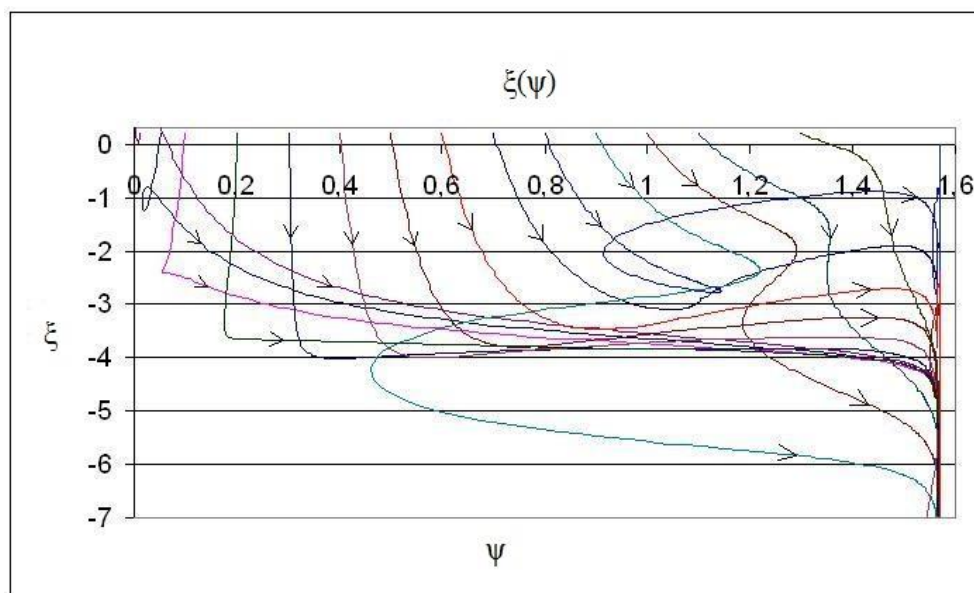


Рис. 4. Зависимость $\xi(\psi)$ для редуцированной системы

На этом рисунке видно, что траектории не остаются вблизи прямой линии $\psi = 0$, отвечающей локализации энергии на обобщенной координате z_2 , и приближаются с течением времени к линии $\psi = \frac{\pi}{2}$, отвечающей локализации энергии на обобщенной координате z_1 . Таким образом, именно локализованные на z_1 колебания устойчивы вблизи резонанса, а колебания, локализованные на z_2 , теряют устойчивость. Некоторые траектории приближаются к равносному состоянию редуцированной системы, отвечающему так называемой «переходной форме» связанных колебаний, которая существует только для определенного значения энергии [9]; они остаются вблизи этого положения равновесия и делают петлю вблизи него, пока это положение равновесия существует. С течением времени форма связанных колебаний перестает существовать, и движения системы стремятся к устойчивой в резонансе локализованной форме колебаний. Аналогичные результаты можно получить и в случае резонанса по второй фундаментальной частоте.

ВЫВОДЫ

Для исследования резонансной динамики диссипативной системы с ограниченным возбуждением, содержащей маятниковый виброгаситель, используются метод гармонического баланса и метод многих масштабов. Построены амплитудно-частотные характеристики системы. Показано, что маятниковый виброгаситель позволяет существенно уменьшить амплитуды резонансных колебаний упругой подсистемы. Показано также, что выбор параметров системы позволяет избежать попадания системы в первый резонанс, где амплитуды колебаний наиболее велики. Для более детального исследования поведения системы в резонансе использована методика приведения к так называемой редуцированной системе, которая представлена относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд собственных форм колебаний и фаз форм колебаний. Обнаружено, что, в частности, происходит переход энергии от неустойчивых колебаний к устойчивой форме колебаний, локализованных на одной из обобщенных координат. В то же время существует форма связанных колебаний (так называемая «переходная форма»), которая реализуется только при некотором фиксированном значении энергии. Некоторые траектории приближаются к этой переходной форме, а затем, когда эта форма перестает существовать, удаляются от нее и приближаются к устойчивой локализованной форме колебаний.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sommerfeld A. Beiträge Zum Dynamischen Ausbau Der Festigkeitslehe / A. Sommerfeld // *Physikal Zeitschr.* – 1902. – Vol. 3. – P. 266-286.
2. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В.О. Кононенко. – М. : Наука, 1985. – 254 с.
3. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А.Х. Найфэ. – М. : Мир, 1973. – 454 с.
4. Balthazar J. M. An overview on non-ideal vibrations / J.M. Balthazar, D.T. Mook, H.I. Weber, R.M.L.R.F. Brasil, A. Fenili, D. Belato, J.L.P. Felix // *Meccanica.* – 2003. – Vol. 38(6). – P. 613-621.
5. Vakakis A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems / A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin. – New York : Wiley Interscience, 1996. – 552 p.
6. Mikhlin Yu. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / Yu.V. Mikhlin, K.V. Avramov // *Applied Mechanics Review.* – 2010. – Vol. 63. – P. 4-20.
7. Wang F. Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System / F. Wang, A. Bajaj, K. Kamiya // *Purdue University.* – 2005. – 54 p.
8. Pilipchuk V. N. Nonlinear Dynamics: Between Linear and Impact Limits / V.N. Pilipchuk. – Berlin : Springer-Verlag, 2010. – 364 p.
9. Plaksey K. Y. Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance / K.Y. Plaksey, Y.V. Mikhlin // *Journal of Sound and Vibration.* – 2015. – Vol. 334. – P. 319-337.

REFERENCES

1. Sommerfeld, A. (1902), "Beiträge Zum Dynamischen Ausbau Der Festigkeitslehe", *Physikal Zeitschr*, vol. 3, pp. 266-286.
2. Kononenko, V.O. (1985), *Kolebatelniye sistemi s ogranichennim vozbuzhdeniyem* [Oscillating systems with limited excitation], Nauka, Moskow.
3. Nayfe, A.Kh. (1973), *Metody vozmushcheniy* [Perturbation methods], Mir, Moskow.
4. Balthazar, J.M., Mook, D.T., Weber, H.I., Brasil, R.M.L.R.F., Fenili, A., Belato, D. and Felix J.L.P. (2003), "An overview on non-ideal vibrations", *Meccanica*, vol. 38(6), pp. 613-621.
5. Vakakis, A., Manevitch, L., Mikhlin, Yu., Pilipchuk, V. and Zevin, A. (1996), "Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems", Wiley Interscience, New York, USA.
6. Mikhlin, Yu.V. and Avramov, K.V. (2010), "Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments", *Applied Mechanics Review*, vol. 63, pp. 4-20.
7. Wang, F., Bajaj, A. and Kamiya, K. (2005), "Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System", *Purdue University*.
8. Pilipchuk, V.N. (2010), "Nonlinear Dynamics: Between Linear and Impact Limits", Springer-Verlag, Berlin.
9. Plaksey, K.Y. and Mikhlin, Y.V. (2015), "Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 334, pp. 319-337.