УДК 531.39, 517.977

СТАБІЛІЗАЦІЯ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ПРУЖНОЮ ПЛАСТИНОЮ

Новікова Ю. В., м. н. с., Зуєв О. Л., д. ф.-м. н., професор

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, м. Київ-4, 01601, Україна

yuliya.novikova.88@mail.ru, alexander.zuyev@gmail.com

Розглянуто модель механічної системи, яка складається з твердого тіла та тонкої ізотропної пластини. Отримано нескінченну систему диференціальних рівнянь, що описують коливання пластини в термінах модальних координат. Для підсистеми, що відповідає непарним модам, знайдено керування зі зворотним зв'язком, які залежать від узагальнених швидкостей. Доведено теорему про асимптотичну стійкість положення рівноваги підсистеми зі зворотним зв'язком.
Ключові слова: пластина Кірхгофа, асимптотична стійкість, керування зі зворотним зв'язком.

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

Новикова Ю. В., м. н. с., Зуев А. Л., д. ф.-м. н., профессор

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3, г. Киев-4, 01601, Украина

yuliya.novikova.88@mail.ru, alexander.zuyev@gmail.com

Рассмотрена модель механической системы, которая состоит из твердого тела и тонкой изотропной пластины. Получена бесконечная система дифференциальных уравнений, которая описывает колебания пластины в терминах модальных координат. Для подсистемы, соответствующей нечетным модам, найдены управления с обратной связью, которые зависят от обобщенных скоростей. Доказана теорема об асимптотической устойчивости положения равновесия подсистемы с обратной связью.
Ключевые слова: пластина Кирхгофа, асимптотическая устойчивость, управление с обратной связью.

STABILIZATION OF VIBRATIONS OF A MECHANICAL SYSTEM WITH ELASTIC PLATE

Novikova Yu. V., Junior Researcher, Zuyev A. L., D. Sc. in Physics and Maths, Professor

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
Tereschenkivska str., 3, Kiev-4, 01601, Ukraine

yuliya.novikova.88@mail.ru, alexander.zuyev@gmail.com

In this paper, a mechanical system consisting of a rigid body (carrier) and a thin isotropic plate is considered. The carrier body performs rotational motion with three degrees of freedom around a fixed point. The plate vibrations are described by the Kirchhoff model without taking into account the inertia of the cross-section area. Thus, the dynamics of the plate is governed by the following partial differential equation:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D\Delta^2 w(x_1, x_2, t) = \tilde{F}.$$

Here $\tilde{F}$ is the transverse component of the inertia force, obtained by d'Alembert's principle, which occurs due to the translational motion of the carrier body.

Since we consider the hinged plate, the deflection and bending moment vanish on the boundary. With the help of the Fourier method, an infinite system of ordinary differential equations describing the slow rotation of the rigid body and small oscillations of the Kirchhoff plate is obtained.

For the subsystem corresponding to odd indices, a state feedback control is constructed. This control law depends essentially on generalized velocities. A theorem on the asymptotic stability of the equilibrium of this subsystem, written in the operator form, is proved. The proof of this theorem is based on an infinite-dimensional modification of the Barbashin–Krasovskii theorem – LaSalle`s invariance principle. In the first step, we show that the time-derivative of a Lyapunov functional $V(x)$ is non-positive. In the second one, the precompactness of semi-trajectories of the differential equation $\dot{x} = Fx$, $x(0) = x_0 \in \ell^2$ is established. This step is based on the property that the operator $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \to \ell^2$ is compact. Further on, it is shown that any semi-trajectory $\{x(t)\}_{t \ge 0}$ on the set $M = \{x \in \ell^2 \mid \dot{V}(x) = 0\}$ has the property $x(t) \equiv 0$.
Key words: Kirchhoff plate, asymptotic stability, feedback control.

ВСТУП

Розвиток сучасних аерокосмічних технологій обумовлює високу актуальність проблем моделювання руху космічних апаратів з пружними елементами, а також питань керованості та стабілізації моделей супутників.

До 60-х років XX століття при моделюванні руху супутників, як правило, мало місце припущення, що космічний апарат являє собою абсолютно тверде тіло, але високі вимоги до точності керування призвели до необхідності враховувати пружність конструктивних елементів у математичній моделі.

У роботах [1-4] досліджено обертальний рух систем з пружними елементами та рух навколо центру мас. Зокрема, у статті [1] розглянуто питання стабілізації космічного апарата з керованою сонячною батареєю, який рухається по коловій орбіті. Модель апарата представлена абсолютно твердим тілом з панелями, які змодельовані у вигляді недеформованих стержнів. При цьому сонячні батареї пружно зв'язані з тілом космічного апарата за допомогою сферичних шарнірів.

У монографії Г.Л. Дегтярьова та Т.К. Сіразетдінова [5] розглянуто механічну модель космічного апарата, яка складається з твердого тіла та двох панелей сонячних батарей. Панелі батарей жорстко приєднані до твердого тіла за допомогою двох кронштейнів, а тверде тіло здійснює обертання навколо фіксованої осі. Для такої механічної системи побудовано математичну модель та отримано функції керування.

На відміну від моделей з [1, 5], у даній роботі розглянуто механічну систему, де тіло-носій виконує обертальні рухи з трьома степенями волі, а панелі батарей шарнірно закріплені на границі області.

Метою роботи є синтез керування зі зворотним зв'язком для математичної моделі, яка описує рух твердого тіла і пружної пластини Кірхгофа. У роботі також досліджено стійкість тривіального розв'язку лінійної нескінченновимірної системи, яка відповідає цій математичній моделі.

МОДЕЛЬ КЕРОВАНОГО РУХУ СИСТЕМИ З ПРУЖНОЮ ПЛАСТИНОЮ

Розглянемо механічну систему, що складається з твердого тіла та тонкої ізотропної пластини. З твердим тілом пов'язана декартова система координат $Ox_1x_2x_3$. Тверде тіло B обертається навколо нерухомої точки O_1 з кутовою швидкістю $\bar{\omega}(t)$ [6].

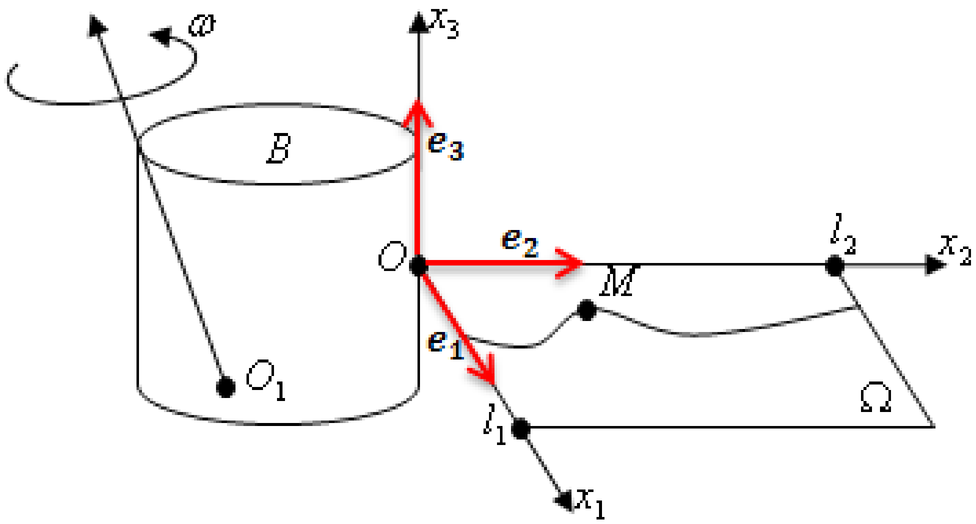

Рис. 1. Тверде тіло з тонкою пружною пластиною

Припустимо, що в стані спокою пластина займає замкнену область, яка має вигляд $(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$, $|x_3| \le h/2$, де товщина пластини дорівнює h. Будемо вважати, що в кожен момент часу t серединну поверхню пластини можна задати рівнянням $x_3 = w(x_1, x_2, t)$.

Для того щоб описати коливання пластини застосуємо гіпотезу Кірхгофа-Лява. Згідно з цією гіпотезою, прямолінійні волокна пластини, що перпендикулярні до її серединної поверхні до деформації, залишаються такими ж до вигнутої серединної поверхні після деформації, а нормальні напруження на площинах, паралельних до серединної поверхні, є малими порівняно з іншими напруженнями. Також припустимо, що матеріал пластини задовольняє закон Гука і є ізотропним [7]. За умови виконання цих припущень, функція $w(x_1, x_2, t)$ не залежить від поздовжніх переміщень та задовольняє диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку.

Отже, рівняння коливань пластини без урахування інерції поперечного перерізу має вигляд:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D\Delta^2 w(x_1, x_2, t) = \tilde{F}, \tag{1}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $\rho > 0$ – густина матеріалу, $D > 0$ – жорсткість пластини при згинанні, $\tilde{F}$ – поперечна компонента сили, яка діє на пластину.

Оскільки пластина закріплена шарнірно на границі області Ω, то на частинах контуру відсутні прогин та згинаючий момент. Отже, крайові умови мають вигляд:

$$\begin{gathered} w(x_1, x_2, t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ \left.\frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2}\right|_{x_1 = 0,\, x_1 = l_1} = 0, \\ \left.\frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2}\right|_{x_2 = 0,\, x_2 = l_2} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Тверде тіло B виконує обертальний рух навколо точки O_1. Тоді, згідно з принципом можливих переміщень для систем матеріальних точок, які підпорядковані ідеальним в’язам, для того, щоб система знаходилася у стані рівноваги, необхідно і достатньо, щоб сумарна робота зовнішніх сил на усіх можливих переміщеннях дорівнювала нулю.

У задачах динаміки останнє твердження залишається справедливим, якщо до зовнішніх сил додати сили інерції [8].

Щоб записати вираз для сили інерції в рухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$ застосуємо принцип Д’Аламбера та формулу додавання прискорень [9]. Припустимо, що e_1, e_2, e_3 – орти системи координат $Ox_1x_2x_3$. Нехай радіус-вектор точки M має вигляд:

$$r_M = x_1 e_1 + x_2 e_2 + w(x_1, x_2, t) e_3.$$

Запишемо суму переносного та коріолісового прискорень точки M :

$$a_M = V_0^* + \omega \times V_0 + \dot{\omega} \times r_M + \omega \times (\omega \times r_M) + 2\omega \times r_M^*,$$

де V_0 – абсолютна швидкість точки O, $\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3$ – кутова швидкість твердого тіла, а $\dot{\omega}$ – кутове прискорення; зірочкою позначені відносні похідні векторів у рухомій системі координат $Ox_1x_2x_3$. Застосувавши принцип Д'Аламбера, отримаємо вираз для поперечної компоненти сили інерції, зумовленої переносним рухом тіла B у вигляді:

$$\tilde{F} = -\left(\rho h a_M, e_3\right). \tag{3}$$

Тоді рівняння (1) з урахуванням виразу (3) буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha^2 \Delta^2 w = -\left[\left(x_1 - a_1\right)\left(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega}_2\right) + \left(x_2 - a_2\right)\left(\omega_2\omega_3 + \dot{\omega}_1\right) + \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\left(a_3 - w\right)\right], \tag{4}$$

де $\left(a_1, a_2, a_3\right)$ – координати точки O_1 у системі координат $Ox_1x_2x_3$, $\alpha^2 = \dfrac{D}{\rho h} > 0$.

Отже, рівняння (4), (2) описують обертальний рух механічної системи, що складається з тіла-носія та пластини, шарнірно зафіксованої на границі прямокутної області.

Застосуємо метод Фур'є до розв'язання крайової задачі (4), (2), та запишемо лінеаризовану систему диференціальних рівнянь, яка описує вплив повільних обертань тіла-носія на коливання пластини [10]:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{kj} = \beta_{kj}\eta_{kj}, \\ \dot{\eta}_{kj} = -\beta_{kj}\xi_{kj} + \varphi_{kj}u_1 + g_{kj}u_2. \end{cases} \tag{5}$$

У системі (5): $\xi_{kj}\left(t\right)$ – модальна координата, $\eta_{kj}\left(t\right)$ – швидкість, що відповідає моді коливань з індексами $\left(k, j\right) \in \mathbb{N}^2$, $u_1\left(t\right)$, $u_2\left(t\right)$ – функції керування, які відповідають кутовому прискоренню тіла-носія. Коефіцієнти системи (5) пов'язані з параметрами механічної системи (4), (2) співвідношеннями:

$$\beta_{kj} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2\right), \ \varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & k - \text{ парне}, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k - \text{ непарне}, \ j - \text{ парне}, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}\left(2a_2 - l_2\right)}{\pi^2 kj}, & k - \text{ непарне}, \ j - \text{непарне}, \end{cases} \tag{6}$$

$$g_{kj} = \begin{cases} \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & k - \text{ парне}, \ j - \text{ непарне}, \\ 0, & j - \text{ парне}, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}\left(l_1 - 2a_1\right)}{\pi^2 kj}, & k - \text{непарне}, \ j - \text{непарне}, \end{cases}$$

де припускаємо, що $2a_1 \neq l_1$, $2a_2 \neq l_2$.

Розглянемо підсистему системи (5) з ненульовими коефіцієнтами при керуваннях $u_1\left(t\right)$ та $u_2\left(t\right)$. Тоді вирази з (6) будуть мати вигляд:

$$\beta_{kj} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2\right), \quad \varphi_{kj} = \frac{2\sqrt{l_1 l_2}\left(2a_2 - l_2\right)}{\pi^2 kj}, \quad g_{kj} = \frac{2\sqrt{l_1 l_2}\left(l_1 - 2a_1\right)}{\pi^2 kj}, \ \left(k, j\right) \in \hat{N}_2, \tag{7}$$

де $\hat{N}_2 = \{(k, j) | \; k = 2p-1, \; j = 2m-1, \; p, m \in \mathbb{N}\}$.

Уведемо взаємно-однозначне відображення $(k, j) \mapsto n(k, j)$ між множинами $\hat{N}_2$ і $\mathbb{N}$, тоді величинам з подвійним індексом $(k, j) \in \hat{N}_2$ буде відповідати одинарний індекс $n \in \mathbb{N}$.

Тоді можна переписати підсистему системи (5) для індексів $(k, j) \in \hat{N}_2$ наступним чином в операторному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

де

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_n \\ -\beta_n & 0 \end{pmatrix}, \; B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_n & g_n \end{pmatrix}, \; n = 1, 2, \dots .$$

Введемо скалярний добуток у гільбертовому просторі ℓ^2 для векторів x та $\bar{x}$ стандартним способом: $\langle x, \bar{x} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n \bar{\xi}_n + \eta_n \bar{\eta}_n \right)$.

Розглянемо функціонал $V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + \eta_n^2 \right)$, який діє з ℓ^2 в $\mathbb{R}$.

Визначимо функції керування зі зворотним зв'язком:

$$v_1(x) = -\frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n, \qquad v_2(x) = -\frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n, \qquad (k_1 \geq 0, k_2 \geq 0). \tag{9}$$

Тоді похідна V у силу системи (8) з $u_1 = v_1(x)$, $u_2 = v_2(x)$ буде мати вигляд

$$\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \leq 0.$$

ДОВЕДЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТРИВІАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. Нехай $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Тоді керування зі зворотним зв'язком $u_1 = v_1(x)$ та $u_2 = v_2(x)$ виду (9) забезпечують асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (8).

Доведення: Запишемо систему (8) з керуванням $u = v(x)$ у вигляді:

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \tag{10}$$

де $F = A + BK$ – інфінітезимальний генератор C_0 – напівгрупи лінійних обмежених операторів $\{e^{tF}\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 [11], $K = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k_1\varphi_1 & 0 & k_1\varphi_2 & \dots \\ 0 & k_2 g_1 & 0 & k_2 g_2 & \dots \end{pmatrix}$.

Доведення Теореми 1 проведемо за допомогою нескінченновимірної модифікації теореми Барбашина-Красовського – теореми ЛаСалля [13] (див. також [12]).

Умова $\dot{V} = -k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n \right)^2 - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n \right)^2 \le 0$ виконується для всіх $x \in D(A)$ при $k_1 > 0$ та $k_2 > 0$, де $D(A) = \left\{ x \in \ell^2 \middle| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \left(\xi_n^2 + \eta_n^2 \right) < \infty \right\}$.

Доведемо передкомпактність напівтраєкторій диференціального рівняння (10) за допомогою теореми з [14]. Доведемо компактність оператора $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \to \ell^2$ при $\lambda > 0$.

Розглянемо рівняння $Ix + \lambda Ax + \lambda Bu = \bar{x}$ відносно x, де $\lambda = \text{const}$. У матричному вигляді це рівняння матиме запис:

$$(I + \lambda A) \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n \\ \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо це рівняння методом оберненої матриці, у результаті чого отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \beta_n \\ \lambda \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n \\ \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Підставимо вираз (11) у формули для $u = v(x)$ виду (9):

$$\begin{pmatrix} v_1(\bar{x}) \\ v_2(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-k_1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \left(\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \right) \\ \dfrac{-k_2}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \left(\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n - \lambda \varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2 \right) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Перетворимо (12):

$$\begin{cases} v_1 \left(1 - \dfrac{k_1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) - v_2 \left(\dfrac{k_1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) = -\dfrac{k_1}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n \left(\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n \right)}{1 + (\lambda \beta_n)^2}, \\ v_1 \left(-\dfrac{k_2}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) + v_2 \left(1 - \dfrac{k_2}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right) = -\dfrac{k_2}{2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \left(\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n \right)}{1 + (\lambda \beta_n)^2}. \end{cases} \tag{13}$$

Застосуємо до системи (13) метод Крамера та запишемо вирази для $v_1(\bar{x})$ та $v_2(\bar{x})$:

$$v_1(\bar{x}) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_2(\bar{x}) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{14}$$

де

$$\Delta = 1 - \frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} - \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} - \frac{k_1 k_2}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \varphi_n g_n}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \right)^2,$$

$$\Delta_1 = -\frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n \left(\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n \right)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} + \frac{k_1 k_2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n \left(\lambda \beta_n \bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n \right)}{1 + (\lambda \beta_n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda g_n^2}{1 + (\lambda \beta_n)^2} -$$

$$-\frac{k_1k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2},$$

$$\Delta_2=-\frac{k_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n^2}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}-$$

$$-\frac{k_1k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}.$$

Формули (14) визначають лінійний функціонал $v\left(\overline{x}\right)$ в ℓ^2. Покажемо обмеженість функціоналу $v\left(\overline{x}\right)$ для довільного $\lambda>0$, для цього проведемо оцінку $v_1\left(\overline{x}\right)$ та $v_2\left(\overline{x}\right)$. Так як $\left|v_1\left(\overline{x}\right)\right|=\left|\frac{\Delta_1}{\Delta}\right|=\frac{\left|\Delta_1\right|}{\left|\Delta\right|}$, а $\left|v_2\left(\overline{x}\right)\right|=\left|\frac{\Delta_2}{\Delta}\right|=\frac{\left|\Delta_2\right|}{\left|\Delta\right|}$, то оцінимо окремо чисельник та знаменник:

$$\left|\Delta_1\right|\le\frac{k_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_n\right|\left|\lambda\beta_n\overline{\xi}_n\right|}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}+\frac{k_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_n\right|\left|\overline{\eta}_n\right|}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_n\right|\left|\lambda\beta_n\overline{\xi}_n\right|}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}+$$

$$+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_n\right|\left|\overline{\eta}_n\right|}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\left|\varphi_n g_n\right|}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_n\right|\left|\lambda\beta_n\overline{\xi}_n\right|}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}+ \tag{15}$$

$$+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda\left|\varphi_n g_n\right|\left|\right.}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|g_n\right|\left|\overline{\eta}_n\right|}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}.$$

Для довільного $\beta_0>0$ запишемо суми в (15) окремо при $\beta_n<\beta_0$ та $\beta_n\ge\beta_0$ і застосуємо до отриманих сум нерівність Гельдера та нерівності:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{\xi}_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|\overline{\xi}\right\|_{\ell^2}\le\left\|\overline{x}\right\|,\quad\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\overline{\eta}_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|\overline{\eta}\right\|_{\ell^2}\le\left\|\overline{x}\right\|,$$

$$\left(\sum_{\substack{n=1\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+\left(\lambda\beta_n\right)^2\right)^2}+\sum_{\substack{n=1\\ \beta_n\ge\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{\left(1+\left(\lambda\beta_n\right)^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\le\left\|\varphi\right\|\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді оцінка (15) матиме вид:

$$\left|\Delta_1\right|\le\left\|\overline{x}\right\|\left(\left\|\varphi\right\|\left(\left(\frac{\lambda k_1}{2}+\frac{\lambda^2k_1k_2}{2}\left\|g\right\|^2\right)\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{k_1}{2}+\frac{\lambda k_1k_2}{2}\left\|g\right\|^2\right)\right)=M_1\left(\lambda\right)\left\|\overline{x}\right\|.$$

Аналогічно,

$$\left|\Delta_2\right|\le\left\|\overline{x}\right\|\left(\left\|g\right\|\left(\left(\frac{\lambda k_2}{2}+\frac{\lambda^2k_1k_2}{2}\left\|\varphi\right\|^2\right)\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{k_2}{2}+\frac{\lambda k_1k_2}{2}\left\|\varphi\right\|^2\right)\right)=M_2\left(\lambda\right)\left\|\overline{x}\right\|.$$

Оцінимо визначник Δ знизу, для цього застосуємо зображення:

$$\Delta = 1 + \lambda r(\lambda), \tag{16}$$

де

$$r(\lambda) = -\frac{k_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} +$$

$$+\frac{\lambda k_1 k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\beta_n)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{\lambda k_1 k_2}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2.$$

Нехай $|r(\lambda)| \le M$ при $M > 0$ для будь-якого $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Оберемо $\lambda = \min\left\{\lambda_0, \frac{1}{M}\right\}$. Тоді з (16) випливає, що $\Delta > 0$. Для оцінки $|r(\lambda)|$ застосуємо нерівність трикутника та нерівність Гельдера:

$$|r(\lambda)| \le \frac{k_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\beta_n)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} +$$

$$+\frac{\lambda k_1 k_2}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2 \le \frac{k_2}{2}\|g\|^2 + \frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{\lambda k_1 k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2.$$

Оберемо $\lambda_0 = 1$, тоді $|r(\lambda_0)| \le \frac{k_2}{2}\|g\|^2 + \frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{k_1 k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2 = M$, а

$$\Delta \ge 1 - \lambda\left(\frac{k_2}{2}\|g\|^2 + \frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{k_1 k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2\right) = M_3(\lambda).$$

Отже, показано, що для будь-якого $\lambda \in (0,1)$ знайдуться такі числа $M_4(\lambda) > 0$ і $M_5(\lambda) > 0$, що

$$|v_1(\bar{x})| \le \frac{M_1(\lambda)}{M_3(\lambda)}\|\bar{x}\| = M_4(\lambda)\|\bar{x}\|, \quad |v_2(\bar{x})| \le \frac{M_2(\lambda)}{M_3(\lambda)}\|\bar{x}\| = M_5(\lambda)\|\bar{x}\|,$$

у формулі (14) при усіх $\bar{x} \in \ell^2$. Формули (11) и (14) визначають $x = (\lambda F + I)^{-1}\bar{x}$ при усіх $\bar{x} \in \ell^2$ для $\lambda > 0$. Отже маємо, що

$$\left\|(\lambda F + I)^{-1}\bar{x}\right\|^2 \le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{\xi}_n^2 + \left(\bar{\eta}_n - \lambda\varphi_n v_1(\bar{x}) - \lambda g_n v_2(\bar{x})\right)^2\right) \le 2\|\bar{x}\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\times$$

$$\times\left(1 + \lambda^2 M_4^2\|\varphi\|^2 + \lambda^2 M_5^2\|g\|^2 + 2\lambda^2 M_4 M_5^2\|\varphi\|\|g\| - 2\lambda M_4\|\varphi\| - 2\lambda M_5\|g\|\right). \tag{17}$$

Покажемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}$ з останньої оцінки збігається. Для цього перейдемо до суми за двома індексами з урахуванням формул (7) при $k = 2p-1,\ j = 2m-1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2} \le \sum_{k,j=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_{kj})^2} \le \frac{(l_1 l_2)^4}{\pi^2\lambda^2\alpha^2}\sum_{p,m=1}^{\infty}\frac{1}{\left((2p-1)^2 l_2^2 + (2m-1)^2 l_1^2\right)^2}.$$

Для оцінки суми ряду застосуємо інтегральну ознаку збіжності:

$$\frac{\left(l_1 l_2\right)^4}{\pi^4\lambda^2\alpha^2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\left(2p-1\right)^2 l_2^{\,2}+\left(2m-1\right)^2 l_1^{\,2}\right)^2}\le\frac{\left(l_1 l_2\right)^4}{\pi^4\lambda^2\alpha^2}\int_0^{\infty}dp\int_0^{\infty}\frac{dm}{\left(\left(2p-1\right)^2 l_2^{\,2}+\left(2m-1\right)^2 l_1^{\,2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(l_1 l_2\right)^3}{16\pi^4\lambda^2\alpha^2}\left(\frac{\pi-2arctg\left(\frac{l_1}{l_2}\right)}{2l_2^2}-\frac{\pi+2arctg\left(\frac{l_2}{l_1}\right)}{2l_1^2}-\frac{1}{l_1 l_2}\right). \tag{18}$$

З оцінок (17) та (18) маємо, що $\left\|\left(\lambda F+I\right)^{-1}\bar{x}\right\|^2\le M_6\left(\lambda\right)\left\|\bar{x}\right\|^2$.

Доведено, що лінійний оператор $\left(\lambda F+I\right)^{-1}:\ \ell^2\to\ell^2$ є обмеженим при $\lambda>0$. Для доведення його компактності розглянемо оператор проектування $P_N:\ell^2\to\ell^2$, який переводить елементи $x\in\ell^2$ у скінченновимірний підпростір з $\xi_n=\eta_n=0$ при $n<N$:

$$P_N:\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \eta_{N-1}\\ \xi_N\\ \eta_N\\ \xi_{N+1}\\ \eta_{N+1}\\ \vdots\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \xi_N\\ \eta_N\\ \xi_{N+1}\\ \eta_{N+1}\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

Розглянемо лінійний обмежений оператор в ℓ^2:

$$U_N=\left(I-P_N\right)\left(\lambda F+I\right)^{-1}.$$

Кожен оператор U_N є компактним, оскільки його образ має скінченну розмірність. Покажемо, що оператор $\left(\lambda F+I\right)^{-1}$ є границею по нормі компактних операторів:

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\left(\lambda F+I\right)^{-1}-U_N\right\|=\lim_{N\to\infty}\left\|P_N\left(\lambda F+I\right)^{-1}\right\|=0. \tag{19}$$

Отримаємо, що:

$$\left\|P_N\left(\lambda F+I\right)^{-1}\bar{x}\right\|\le 2\left\|\bar{x}\right\|^2\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\Big(1+\lambda^2M_4^2\left\|\varphi\right\|^2+\lambda^2M_5^2\left\|g\right\|^2+2\lambda^2M_4M_5\left\|\varphi\right\|\left\|g\right\|-$$

$$-2\lambda M_4\left\|\varphi\right\|-2\lambda M_5\left\|g\right\|\Big). \tag{20}$$

З формули (18) маємо, що $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\lambda\beta_n\right)^2}\to 0$ при $N\to\infty$.

Отже, з оцінки (20) випливає властивість (19). Тоді оператор $\left(\lambda F+I\right)^{-1}$ є компактним, оскільки він є границею скінченновимірних операторів.

З компактності лінійного оператора $\left(\lambda F+I\right)^{-1}$ випливає передкомпактність усіх додатних напівтраєкторій лінійного диференціального рівняння (10) в ℓ^2 [14].

Нехай $x(t)$, $t \ge 0$ – розв'язок системи (10) з керуванням $u = v(x(t))$ виду (9), та нехай $x(\tau) = 0$ при деякому $\tau \ge 0$. Позначимо $\tilde{x}^0 = x(\tau) \in \ell^2$ та визначимо $\tilde{x}(t) = \left(\tilde{\xi}_1(t), \tilde{\eta}_1(t), \tilde{\xi}_2(t), \tilde{\eta}_2(t), ...\right)^T$ розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\xi}}_n(t) = \beta_n \tilde{\eta}_n(t), \\ \dot{\tilde{\eta}}_n(t) = -\beta_n \tilde{\xi}_n(t), \end{cases} \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}^0. \tag{21}$$

Оскільки $y(\tilde{x}^0) = 0$, то $\tilde{\xi}_n(0) = \tilde{\eta}_n(0) = 0$ при усіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді:

$$\tilde{\xi}_n(t) = \tilde{\eta}_n(t) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \ge 0. \tag{22}$$

Це означає, що $y(\tilde{x}(t)) \equiv 0$. Покажемо, що $\tilde{x}(t)$ – розв'язок системи (8) зі зворотним зв'язком (9). Підставимо вираз (22) у функціонал зі зворотним зв'язком (9) та отримаємо, що $u = v(\tilde{x}(t)) \equiv 0$. Отже, підстановка $\tilde{x}(t)$ призводить диференціальне рівняння (8) з керуванням (9) до тотожності на основі (21).

Застосуємо властивість єдиності розв'язку задачі Коші та отримаємо, що $x(t) = \tilde{x}(t+\tau)$, $\forall\, t \ge 0$. Звідси маємо, що $y(x(t)) \equiv 0$ з урахуванням тотожності (22).

Перевіримо останню умову теореми з [12]. Покажемо, що будь-яка напівтраєкторія $\{x(t)\}_{t\ge 0}$ системи (8) з керуванням (9) на множині $M = \left\{x \in \ell^2 \middle| \dot{V}(x) = 0\right\}$ має властивість $x(t) \equiv 0$.

Нехай $x(t) \in M$ при усіх $t \ge 0$, тобто:

$$\dot{V}(x(t)) = -k_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \eta_n(t) \right)^2 - k_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \eta_n(t) \right)^2 \equiv 0.$$

Звідси з урахуванням нерівностей $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ маємо, що:

$$v_1(x(t)) = v_2(x(t)) = 0. \tag{23}$$

Підстановка рівнянь $u = v(x(t))$ виду (23) у (8) приводить до системи:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n(t) = \beta_n \eta_n(t), \\ \dot{\eta}_n(t) = -\beta_n \xi_n(t), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Запишемо розв'язок системи диференціальних рівнянь (24):

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \xi_n(0)\cos(\beta_n t) + \eta_n(0)\sin(\beta_n t), \\ \eta_n(t) = -\xi_n(0)\sin(\beta_n t) + \eta_n(0)\cos(\beta_n t), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Підставимо (25) у (23), тоді отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \eta_n(0)\cos(\beta_n t) - \varphi_n \xi_n(0)\sin(\beta_n t) \right) \equiv 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n \eta_n(0)\cos(\beta_n t) - g_n \xi_n(0)\sin(\beta_n t) \right) \equiv 0, \end{cases} \quad \forall t \ge 0. \tag{26}$$

Очевидно, якщо система функцій $\left\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ – лінійно-незалежна на півосі $t \in [0, \infty)$, то тотожності (26) виконуються тільки при

$$\xi_n(0)=\eta_n(0)=0, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{27}$$

Зі співвідношень (27) в силу формул (25) випливає властивість $x(t)\equiv 0$, що, у свою чергу, забезпечує виконання останньої умови.

Доведемо лінійну незалежність системи $\{\cos(\beta_n t),\sin(\beta_n t)|n\in\mathbb{N}\}$ на півосі $t\in[0,\infty)$. Для доведення лінійної незалежності застосуємо теорему з [15], яка має таке формулювання: якщо

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{m[a,a+z)}{z}<\frac{\tau}{2\pi}, \tag{28}$$

то система $\{\cos(\beta_n t),\sin(\beta_n t)|n\in\mathbb{N}\}$ мінімальна в $L^2(0;\tau)$, де $m[a,b)$ – потужність множини $[a,b)\cap K$, при $K=\{\beta_n|n\in\mathbb{N}\}$.

Для доведення умови (28) нагадаємо, що

$$\beta_n=\beta_{kj}=\alpha\pi^2\left(\frac{(2p-1)^2}{l_1^2}+\frac{(2m-1)^2}{l_2^2}\right)=\frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\left((2m-1)^2+(2p-1)^2\chi\right). \tag{29}$$

У формулі (29) β_{kj} відповідають тільки непарним значенням k, j. Для доведення (28) розглянемо β_{kj} для $k, j\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$\beta_n=\beta_{kj}=\alpha\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{j^2}{l_2^2}\right)=\frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\left(j^2+k^2\chi\right), \quad \text{де} \quad \chi=\frac{l_2^2}{l_1^2}>0.$$

Позначимо $\tilde{\beta}_{kj}=j^2+k^2\chi.$ Розглянемо спочатку випадок $\chi\ge 1$.

Нехай $\Gamma_+: j^2+k^2\chi=b$ та $\Gamma_-: j^2+k^2\chi=a$ – границі області Ω, у яку потрапляють усі цілі точки виду (j,k), для яких $\beta_{kj}\in[a,b)$. Область Ω визначена так:

$$\Omega=\left\{(j,k)\middle|a\le j^2+k^2\chi<b, \quad k\ge 1, j\ge 1\right\}.$$

Отже, оцінка числа $m[a,b)$ зводиться до знаходження потужності множини $\Omega\cap\mathbb{N}^2$. Розглянемо два квадрати, один з яких (B_+) містить область Ω, а інший (B_-) має не більше однієї спільної точки з Ω, як показано на рис. 2.

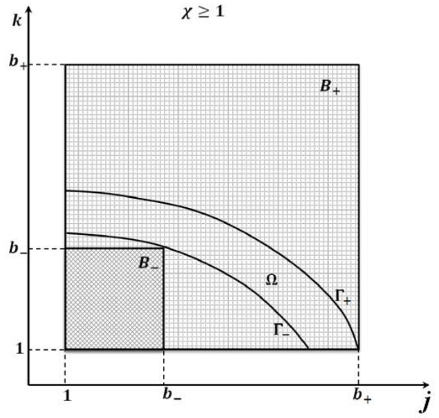

Рис. 2. Множини Ω, B_+, B_-

Знайдемо кількість цілих точок у квадратах B_+ та B_-. Визначимо координати вершин, що лежать на границі області Ω:

$$b_+ : b_+^2 + \chi = b, \quad b_- : b_-^2 + \chi b_-^2 = a. \tag{30}$$

З рівностей (30) випливає, що $b_+ = \sqrt{b-\chi}$, $b_- = \sqrt{\dfrac{a}{1+\chi}}$.

Отже, оцінка кількості цілих точок в Ω матиме вигляд:

$$m_1[a;b)) \le \left|B_+ \cap \mathbb{N}^2\right| - \left|B_- \cap \mathbb{N}^2\right| + 1 = b_+^2 - b_-^2 + 1 = b - \chi - \frac{a}{1+\chi} + 1. \tag{31}$$

Нехай $b = a + z$, тоді:

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{m_1[a, a+z)}{z} \le \overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{a\left(1 - \dfrac{1}{1+\chi}\right) + z - \chi + 1}{z} = 1. \tag{32}$$

Випадок при $\chi < 1$ розглядається аналогічно, при цьому:

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{m_1[a, a+z)}{z} \le \overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{a\left(\dfrac{1}{\chi} - \dfrac{1}{1+\chi}\right) + \dfrac{z-1}{\chi} + 1}{z} = \frac{1}{\chi}. \tag{33}$$

З оцінок (32), (33) випливає, що система функцій $\left\{\cos(\beta_n t), \sin(\beta_n t) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ – лінійно-незалежна на $[0;\tau)$ при $\tau > 2\pi \max\left\{1, \dfrac{1}{\chi}\right\}$. Оскільки $m[a, a+z) \le m_1[a, a+z)$, то система, що відповідає непарним індексам, також є лінійно-незалежною на $[0;\tau)$. Отже, особлива точка $x = 0$ системи (8) з керуванням $u = v(x)$ є асимптотично стійкою.

ВИСНОВОК

У роботі досліджено математичну модель руху механічної системи, що складається з твердого тіла та пружної пластини Кірхгофа. Для цієї моделі записано нескінченну систему диференціальних рівнянь, які описують малі коливання пружної пластини із застосуванням модальних координат. Для підсистеми, що відповідає непарним індексам, отримано керування зі зворотним зв'язком, а також доведено теорему про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Хорошилов В. С. Механические модели движения космического аппарата с солнечной батареей / В.С. Хорошилов // Известия АН СССР. МТТ. – 1978. – №5. – С. 18-24.
2. Ambrosio J. Efficient kinematic Joint descriptions for flexible multibody systems experiencing linear and non-linear deformations / J. Ambrosio // International journal for numerical methods in engineering. – 2003. – Vol. 56, №12. – P. 1771-1793.
3. Набиуллин Т. К. Стационарное движение и устойчивость упругих спутников / Т.К. Набиуллин. – Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1990. – 216 с.
4. Докучаев Л. В. Об устойчивости вращения твердого тела с гибкими элементами / Л.В. Докучаев, О.П. Климов // Известия АН СССР. МТТ. – 1982. – №5. – С. 10-15.
5. Дегтярев Г. Л. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов. – М. : Машиностроение, 1986. – 214 с.

6. Zuyev A. Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements / A. Zuyev. – Cham Heidelberg : Springer, 2015. – 232 p.

7. Lagnese J. E. Controllability of Thin Elastic Beams and Plates / J.E. Lagnese, G. Leugering // The control handbook (W. S. Levine ed.). – Boca Raton : CRC Press – IEEE Press, 1996. – P. 1139-1156.

8. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В.Л. Бердичевский. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 448 с.

9. Лурье А. И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961. – 824 с.

10. Зуев А. Л. Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением / А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 187-198.

11. Phillips R. S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations / R.S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 90. – P. 193-254.

12. Зуев А. Л. Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений / А.Л. Зуев // Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58. №5. – С. 709-717.

13. LaSalle J. P. Stability theory and invariance principles / J.P. LaSalle // Dynamical systems. Vol. 1 : Int. symp. on dyn. syst. Providence 1974 (L. Cesari, J.K. Hale, and J.P. LaSalle Eds.) – 1976. – New York : Academic Press. – P. 211-222.

14. Dafermos C. M. Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups / C.M. Dafermos, M. Slemrod // Journal of Functional Analysis. – 1973. – Vol. 13. – P. 97-106.

15. Krabs W. On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes / W. Krabs // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 173. – Berlin : Springer-Verlag, 1992. – 174 p.

REFERENCES

1. Khoroshilov, V.S. (1978), “The mechanical model of the spacecraft with a solar battery”, *Izvestiya AN SSSR, MTT*, no. 5, pp. 18-24.

2. Ambrosio, J. (2003), “Efficient kinematic Joint descriptions for flexible multibody systems experiencing linear and non-linear deformations”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 56, no. 12, pp. 1771-1793.

3. Nabiullin, T.K. (1990), *Stationarnoe dvigenie i ustoychivost uprugih sputnikov* [Stationary movement and the stability of elastic satellites], Nauka, Sibirskoe otdelenie, Novosibirsk.

4. Dokuchaev, L.V. and Klimov, O.P. (1982), “On the stability of rotation of a rigid body with flexible elements”, *Izvestiya AN SSSR, MTT*, no. 5, pp. 10-15.

5. Degtyarev, G.L. and Sirazetdinov, T.K. (1986), *Theoreticheskie osnovu optimalnogo upravleniya uprugimi kosmicheskimi apparatami* [Theoretical Foundations of optimal control elastic spacecraft], Mashinostroenie, Moskow.

6. Zuyev, A. (2015), “Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements”, Springer, Cham Heidelberg.

7. Lagnese, J.E. and Leugering, G. (1996), “Controllability of Thin Elastic Beams and Plates”, *The control handbook* (W.S. Levine ed.), CRC Press – IEEE Press, Boca Raton, pp. 1139-1156.

8. Berdichevsky, V.L. (1983), *Variationnie principu mechaniki sploshnoy sredu* [Variational principles of continuum mechanics], Nauka, Glavnay redakciya phiziko-mathemathicheskoy literature, Moskow.

9. Lurie, A.I. (1961), *Analyticheskaya mechanica* [Analytical Mechanics], Fizmatgiz, Moskow.

10. Zuyev, A.L. and Novikova, Yu.V. (2011), "Small oscillations Kirchhoff plate with two-dimensional control", *Mechanika tverdogo tela*, issue. 41, pp. 187-198.
11. Phillips, R.S. (1959), "Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, pp. 193-254.
12. Zuyev, A.L. (2006), "Partial asymptotic stability of abstract dynamical processes", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 58, no. 5, pp. 709-717.
13. LaSalle, J.P. (1976), "Stability theory and invariance principles", *Dynamical systems,* vol. 1: Int. symp. on dyn. syst. Providence 1974 (L. Cesari, J.K. Hale, and J.P. LaSalle Eds.), Academic Press, New York, pp. 211–222.
14. Dafermos, C.M. and Slemrod, M. (1973), "Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups", *Journal of Functional Analysis,* vol. 13, pp. 97-106.
15. Krabs, W. (1992), "On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes", *Lecture Notes in Control and Information Sciences,* vol. 173, Springer-Verlag, Berlin.

УДК 539.3

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ, ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Ободан Н. И., д. т. н., проф., Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина

stroller@rambler.ru

Рассматривается нелинейная краевая задача теории оболочек для случая цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом, при действии равномерного внешнего давления. Для отыскания решений указанной краевой задачи, данной своей вариационной постановкой, использовался метод итеративного разделения переменных (обобщённый метод Канторовича). Установлена область существования нагрузок потери устойчивости, формы до- и закритической деформации, связь между данными формами и формами ветвей вторичного ветвления для случая цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.
Ключевые слова: цилиндрическая оболочка с разрезом, нелинейная краевая задача, обобщённый метод Канторовича.

ВТРАТА СТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЩО ПОСЛАБЛЕНА ВЕРТИКАЛЬНИМ РОЗРІЗОМ, ПІД ДІЄЮ РІВНОМІРНОГО ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

Ободан Н. І., , д. т. н., проф, Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна

stroller@rambler.ru

Розглянуто нелінійну крайову задачу теорії оболонок для випадку циліндричної оболонки, що послаблена вертикальним розрізом, під дією рівномірного зовнішнього тиску. Для відшукання розв'язків зазначеної крайової задачі, яку дано її варіаційним формулюванням, використано метод ітеративного розділення змінних (узагальнений метод Канторовича). Встановлено область існування навантажень втрати стійкості, форми до- та закритичної деформації, зв'язок між цими формами та формами гілок вторинного галуження для випадку циліндричної оболонки без початкових недосконалостей.
Ключові слова: циліндрична оболонка з розрізом, нелінійна крайова задача, узагальнений метод Канторовича.