

10. Zuyev, A.L. and Novikova, Yu.V. (2011), "Small oscillations Kirchhoff plate with two-dimensional control", *Mechanika tverdogo tela*, issue. 41, pp. 187-198.
11. Phillips, R.S. (1959), "Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, pp. 193-254.
12. Zuyev, A.L. (2006), "Partial asymptotic stability of abstract dynamical processes", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 58, no. 5, pp. 709-717.
13. LaSalle, J.P. (1976), "Stability theory and invariance principles", *Dynamical systems*, vol. 1: Int. symp. on dyn. syst. Providence 1974 (L. Cesari, J.K. Hale, and J.P. LaSalle Eds.), Academic Press, New York, pp. 211-222.
14. Dafermos, C.M. and Slemrod, M. (1973), "Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups", *Journal of Functional Analysis*, vol. 13, pp. 97-106.
15. Krabs, W. (1992), "On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 173, Springer-Verlag, Berlin.

УДК 539.3

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ, ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Ободан Н. И., д. т. н., проф., Громов В. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49000, Украина*

stroller@rambler.ru

Рассматривается нелинейная краевая задача теории оболочек для случая цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом, при действии равномерного внешнего давления. Для отыскания решений указанной краевой задачи, данной своей вариационной постановкой, использовался метод итеративного разделения переменных (обобщенный метод Канторовича). Установлена область существования нагрузок потери устойчивости, формы до- и закритической деформации, связь между данными формами и формами ветвей вторичного ветвления для случая цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка с разрезом, нелинейная краевая задача, обобщенный метод Канторовича.

ВТРАТА СТІЙКОСТІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЩО ПОСЛАБЛЕНА ВЕРТИКАЛЬНИМ РОЗРІЗОМ, ПІД ДІЄЮ РІВНОМІРНОГО ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

Ободан Н. И., д. т. н., проф., Громов В. О., к. ф.-м. н., с. н. с.

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеса Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49000, Україна*

stroller@rambler.ru

Розглянуто нелінійну крайову задачу теорії оболонок для випадку циліндричної оболонки, що послаблена вертикальним розрізом, під дією рівномірного зовнішнього тиску. Для відшукування розв'язків зазначеної крайової задачі, яку дано її варіаційним формулюванням, використано метод ітеративного розділення змінних (узагальнений метод Канторовича). Встановлено область існування навантажень втрати стійкості, форми до- та закритичної деформації, зв'язок між цими формами та формами гілок вторинного галуження для випадку циліндричної оболонки без початкових недосконалостей.

Ключові слова: циліндрична оболонка з розрізом, нелінійна крайова задача, узагальнений метод Канторовича.

LOSS OF STABILITY FOR CYLINDRICAL SHELL WITH VERTICAL CUT SUBJECTED TO UNIFORM PRESSURE

Natalia I. Obodan and Vasili A. Gromov

*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

stroller@rambler.ru

The emergence of robust design concept that gain strength in engineering community while traditional damage tolerance design (that rules out any irregularities and, more importantly, their influence on structure behaviour) becomes less popular necessitates in-depth analysis of postcritical deformed shapes and factors determining the possibility for a structure to develop such and such postcritical deformed shape along with ability to bear load, if the shape happens to emerge. Particularly, of fundamental interest is to ascertain the “worst” imperfection for thin-walled structure of a certain kind.

In the present paper, non-linear boundary problem of shell theory is studied for the case of cylindrical shell with vertical cut under uniform pressure. The problem was solved with employment of iterative variable decomposition method (generalized Kantorovich method). Critical loads area as well as pre- and postcritical deformed shapes was ascertained; the shapes turned out to be similar to those associated with secondary bifurcation paths for the case of cylindrical shell without initial irregularities.

Cylindrical shell with length L , radius R , and thickness h with a vertical cut placed symmetrically with respect to central shell cross-section is subjected to uniform external pressure λ . The shell is simply supported; free edge conditions are satisfied along cut edges; at the cut tips, strain compatibility conditions are satisfied. Inasmuch as the definitional domain of the respective boundary problem is partitioned into subdomains in order to make it possible to follow generalized Kantorovich method, it is necessary to add conditions binding solutions associated with different subdomains; the conditions consist in difference between some integrals of solution components over the respective subdomains. It is worth noting, that these integral conditions are responsible for the fact that Newton method does not hold its quadratic convergence speed.

In the course of a wide-ranging simulation, it was revealed that the loss of stability for that case has two phases; during the first one, localized dents are developed in a neighbourhood of the cut, the shell, however, retains its bearing capacity. The second phase are featured with development of deformed shapes similar to those of single or two adjacent local dents associated with secondary bifurcation paths of the non-linear boundary problem for the shell without initial irregularities. Ultimately, shell losses its stability (bearing capacity) and develops one of the shapes in the postcritical area.

The following conclusions were reached in the paper. Firstly, the method of iterative variable decomposition can be successfully applied to the case of non-linear boundary problem with boundaries for which different boundary conditions are formulated, provided the domain considered is partitioned into subdomains with single type boundary conditions. Secondly, such irregularity as a vertical cut initiates development of deformed shape similar to those associated with the secondary bifurcation paths of non-linear boundary problem for the case of cylindrical shell without initial irregularities. Consequently, as far as cylindrical shell with a cut losses its stability developing shapes analogous to localized shapes of the same shell without irregularities, boundaries with respect to load parameter of the secondary bifurcation paths area (that is 0.6-1.0 of the critical load estimate for the shell without irregularities obtained in the framework of the linear theory) determine critical loads for the case in question.

Key words: cylindrical shell with cut; non-linear boundary problem; generalized Kantorovich method.

ВВЕДЕНИЕ

Широкомасштабное применение тонкостенных оболочечных конструкций в авиа- и ракетно-космическом машиностроении, других отраслях техники, обуславливает постоянный, незатухающий интерес к анализу поведения указанных конструкций, как теоретическому, так и экспериментальному.

Особый интерес здесь представляет анализ поведения конструкции с наличием дефекта [1-7], который может иметь как технологический, так и эксплуатационный характер, а также влияние указанного дефекта на потерю устойчивости, и, в конечном итоге, на несущую способность нагруженной конструкции.

Появление концепции робастного проектирования (robust design) [8], которая постепенно вытесняет в инженерной практике концепцию проектирования, исключающего возможность появления иррегулярностей любого рода и их влияние на поведение конструкции (damage tolerance design), обуславливает необходимость глубокого анализа возможных форм

закритической деформации и факторов, определяющих возможность реализации той или иной закритической формы, а также возможность сохранения конструкцией несущей способности при переходе к той или иной закритической форме.

Частным результатом такого рода анализа является установление характеристик «наихудшего» несовершенства («worst» shape imperfection) [9, 10] для того или иного типа тонкостенной конструкции; для случая однородной тонкостенной конструкции, нагруженной неоднородным внешним давлением, аналогом понятия «наихудшего» несовершенства выступает концепция наиболее опасного внешнего нагружения (infavourable load) [11].

Одним из наиболее распространённых в инженерной практике видов начальных несовершенств тонкостенных конструкций являются разрезы: практическая важность оболочек, ослабленных разрезами, вместе со сложностью численного анализа потери устойчивости тонкостенной конструкцией данного типа обусловило появление значительного числа работ, описывающих процесс до- и закритической деформации цилиндрической оболочки, ослабленной разрезом, подвергнутой действию того или иного нагружения. В работе [12] рассматриваются критические нагрузки для композитной цилиндрической оболочки, подвергнутой действию комбинированного нагружения (осевое сжатие, внутреннее и внешнее давление, изгиб); оболочка ослаблена разрезами. В расчётной схеме применялся метод конечных элементов со сгущением конечных элементов в области вершины разреза [13].

В процессе нелинейного анализа поведения указанной конструкции при различных комбинациях значений рассмотренных нагрузок авторы установили существования трёх различных форм потери устойчивости: форма одна локальная вмятина/несколько смежных локальных вмятин, характерная для цилиндрических оболочек, подвергнутых действию только равномерного осевого сжатия, развивающаяся в окрестности разреза («local mode» в терминологии авторов статьи); регулярная форма деформации, характерная для цилиндрических оболочек, подвергнутых действию только равномерного внешнего давления («global mode» в терминологии авторов статьи); и, наконец, форма несколько смежных локальных вмятин, характерная для цилиндрических оболочек, подвергнутых действию только неравномерного внешнего давления с вмятиной максимальной амплитуды в окрестности разреза («transition mode»).

В работе [14] рассматривается исследование влияния размеров, типа и ориентации разреза на устойчивость цилиндрических оболочек, подвергнутых одновременному действию внутреннего давления и осевого сжатия. Авторы указывают, что наличие внутреннего давления может оказать стабилизирующее воздействие на потерю устойчивости, подавляя возможность потери устойчивости по локальным формам, а может способствовать потери устойчивости именно по локальной форме вследствие концентрации напряжений в окрестности разреза.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цилиндрическая оболочка длины L , радиуса R , толщины h , ослабленная вертикальным разрезом длины $2l$, расположенным симметрично относительно центрального сечения оболочки, подвергнута действию равномерного внешнего давления величины λ . На торцах оболочки считаются выполненными условия шарнирного опирания, на берегах разреза – условия свободного края; в вершине разреза выполняются условия совместности деформаций.

Для формулировки разрешающих соотношений будем использовать следующие обозначения: компоненты вектора перемещений координатной поверхности \bar{u}_1 , \bar{u}_2 , \bar{w} в продольном \bar{x}_1 , окружном \bar{x}_2 и нормальном \bar{x}_3 направлениях соответственно; углы поворота $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ единичного вектора нормали к координатной поверхности.

В сечении $\bar{x}_1 = const$ полный вектор и полный момент внутренних усилий раскладывается на усилия тангенциального растяжения \bar{T}_{11} , сдвига \bar{T}_{12} и перерезывающую силу \bar{Q}_1 ; изгибный \bar{M}_{11} и крутящий \bar{M}_{12} моменты. В сечении $\bar{x}_2 = const$ – на усилия тангенциального растяжения \bar{T}_{22} , сдвига \bar{T}_{21} и перерезывающую силу \bar{Q}_2 ; изгибный \bar{M}_{22} и крутящий \bar{M}_{21} моменты. Знак тильда над величиной перерезывающей силы обозначает обобщённую перерезывающую силу.

Контур Γ соответствует торцам оболочки, вершина разреза даётся координатами (x_1^C, x_2^C) .

Переход к системе безразмерных величин осуществляется с помощью следующих соотношений (чертой сверху обозначены размерные величины): безразмерные переменные: $x_i = \bar{x}_i / R$, $i = 1, 2$; безразмерные неизвестные функции задачи: $(u_1, u_2, w) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}) / h$; $T_{ij} = \bar{T}_{ij} / (Eh^3 / R^2)$; $M_{ij} = \bar{M}_{ij} / (Eh^4 / R^2)$; $\lambda = \bar{\lambda} / (Eh^4 / R^4)$.

Вариационная постановка нелинейной краевой задачи теории оболочек в данном случае представляет собой задачу отыскания экстремума следующего функционала

$$\begin{aligned}
 I = \Pi + A = & \iint_{\Omega} \left[\alpha_1 T_{11}^2 + \alpha_2 T_{22}^2 + \alpha_3 M_{11}^2 + \alpha_4 M_{22}^2 + \alpha_5 T_{11} T_{22} + \alpha_6 T_{11} M_{11} + \right. \\
 & + \alpha_7 T_{11} M_{22} + \alpha_8 T_{22} M_{11} + \alpha_9 T_{22} M_{22} + \alpha_{10} M_{11} M_{22} + \alpha_{11} T_{12}^2 + \\
 & + \alpha_{12} M_{12}^2 + \alpha_{13} T_{12} M_{12} + T_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) + \\
 & + T_{22} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - w + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) + T_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} \theta_1 - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \theta_2 - \\
 & - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \theta_1 - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \theta_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} w - Q_1 \theta_1 - (T_{11} \theta_1 + T_{12} \theta_2) \left(\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \\
 & + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} w - Q_2 \theta_2 - (T_{12} \theta_1 + T_{22} \theta_2) \left(\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \lambda w \Big] dx_1 dx_2 + \\
 & + \int_{\Gamma} \left[T_{11}^* u + T_{12}^* v + \tilde{Q}_1^* w + M_{11}^* \theta_1 \right] dx_2 + \\
 & + \int_{\Gamma} \left[T_{11} (u^* - u) - T_{12} (v^* - v) + \tilde{Q}_1 (w^* - w) + M_{11} (\theta_1^* - \theta_1) \right] dx_2 \rightarrow extr.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициенты α_i , $i = \overline{1, 13}$ определяются соотношениями, получаемыми из закона Гука.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для решения рассматриваемой нелинейной краевой задачи (данной своей вариационной постановкой (1)) использовался метод итерационного разделения переменных [15], в рамках которого решение краевой задачи для уравнений в частных производных сводится к решению последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих только от одной координаты – продольной или окружной.

Способ формулировки указанных одномерных краевых задач предполагает, что условия на границах области определения исходной краевой задачи (для функции многих переменных) постоянны вдоль контуров вида $x_1 = const$, $x_2 = const$. В данном случае – случае

цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом, – данное требование обуславливает необходимость разбиения исходной области на подобласти, чтобы обеспечить постоянство граничных условий на границах вида $x_2 = const$ для каждой подобласти. Здесь можно выделить три таких подобласти:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \left\{ 0 \leq x_1 \leq \frac{L}{2R} - l, 0 \leq x_2 \leq 2\pi \right\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ \frac{L}{2R} - l \leq x_1 \leq \frac{L}{2R} + l, 0 \leq x_2 \leq 2\pi \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ \frac{L}{2R} + l \leq x_1 \leq \frac{L}{2R}, 0 \leq x_2 \leq 2\pi \right\}.\end{aligned}$$

При этом на границах $x_1 = 0$ области Ω_1 и $x_1 = \frac{L}{2R}$ области Ω_3 (торцы оболочки) должны выполняться условия шарнирного опирания, на границах $x_1 = \frac{L}{2R} - l$ (областей Ω_1 и Ω_2) и $x_1 = \frac{L}{2R} + l$ (областей Ω_2 и Ω_3) – условия непрерывности перемещений u_1 , u_2 , w на границах $x_2 = 0$ и $x_2 = 2\pi$ областей Ω_1 и Ω_3 – условия периодичности решения, наконец, на границах $x_2 = 0$ и $x_2 = 2\pi$ области Ω_2 (берега разреза) – условия свободного края.

В каждой из подобластей вектор неизвестных функций задачи представляется в виде:

$$U(x_1, x_2) = \left\{ U_j^{(i)}(x_1, x_2) \right\} = \left\{ h_j^{(i_1)}(x_1) g_j^{(i_2)}(x_2), i \rightarrow \infty \right\} \Big|_{j=\overline{1,13}},$$

где $i_1 = i$, $i_2 = i - 1$ для чётных i , $i_1 = i - 1$, $i_2 = i$ для нечётных i (индекс, отвечающий номеру подобласти, опущен для краткости изложения). Функции одной переменной $h_j^{(i)}(x_1)$, $g_j^{(i)}(x_2)$ являются независимо варьируемыми внутри соответствующей подобласти. Таким образом, соответствующая эквивалентная вариационная формулировка представима в виде:

$$U(x_1, x_2) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\arg \min_{U_j^{(i)}(x_1, x_2)} I(U_j^{(i)}(x_1, x_2)) \right]. \quad (2)$$

При построении вариационной производной функционала (1) по функциям $h_j^{(i)}(x_1)$ и $g_j^{(i)}(x_2)$ функции $g_j^{(i-1)}(x_2)$ и $h_j^{(i-1)}(x_1)$ являются известными, поскольку они уже найдены на предыдущей итерации итерационного процесса.

Следует подчеркнуть, что итерационный процесс, определяемый (2), эквивалентен обобщённому методу Канторовича, применённому к решению нелинейной краевой задачи (1).

В качестве критерия окончания таким образом сформулированного итерационного процесса использовалось малость изменения функционала упругой энергии на последовательных итерациях. Векторы $h(x_1)$ и $g(x_2)$ определяются как $h(x_1) = \{h_i(x_1)\}$, $i = \overline{1,8}$, $g(x_2) = \{g_i(x_2)\}$, $i = \overline{1,8}$.

Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи (данной своей вариационной формулировкой) сводится к отысканию решений последовательности краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dh_j^{(i)}}{dx_1} = f_j^{x_1} \left(h^{(i)}(x_1), a^{x_2}, \lambda \right), \quad j = \overline{1,8}, \quad x_1 \in [0; L/R], \quad (3)$$

$$\frac{dg_j^{(i)}}{dx_2} = f_j^{x_2} \left(g^{(i)}(x_2), a^{x_1}, \lambda \right), \quad j = \overline{1,8}, \quad x_2 \in [0; 2\pi]. \quad (4)$$

Здесь компоненты векторов a^{x_1} , a^{x_2} представляют собой определённые интегралы от компонент вектор-функций $h(x_1)$ и $g(x_2)$, вычисленных на предыдущей итерации. А именно, компоненты вектора a^{x_2} зависят от $g^{(i-1)}(x_2)$:

$$a_j^{x_2} = \int_0^{2\pi} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) dx_2 \quad \text{— для коэффициентов линейных членов уравнения (3);}$$

$$a_j^{x_2} = \int_0^{2\pi} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) g_{j_3}^{(i-1)}(x_2) dx_2 \quad \text{— для коэффициентов нелинейных членов уравнения (3).}$$

Аналогично, компоненты вектора a^{x_1} зависят от $h^{(i-1)}(x_1)$:

$$a_j^{x_1} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) dx_1 \quad \text{— для коэффициентов линейных членов уравнения (4);}$$

$$a_j^{x_1} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} h_{j_1}^{(i-1)}(x_1) h_{j_2}^{(i-1)}(x_1) h_{j_3}^{(i-1)}(x_1) dx_1 \quad \text{— для коэффициентов нелинейных членов}$$

уравнения (4). Здесь пределы интегрирования α_0 , α_1 различны для различных областей Ω_s , $s = \overline{1,3}$ и определяются границами данных областей в продольном направлении.

Указанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений должны быть дополнены точечными граничными условиями на границах промежутков интегрирования.

Для отыскания решений вышеуказанных нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши типа метода Ньютона в сочетании с методом продолжения по параметру [15]. В указанном источнике также приведен подход к анализу структуры ветвления в окрестности особых точек решения и получения закритических ветвей решения.

Разбиение области Ω на подобласти приводит к появлению условий, связывающих сомножители решения, зависящие от окружной координаты, для различных подобластей: указанные условия представляют собой разность соответствующих интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} g_{j_1}^{(i-1)}(x_2) g_{j_2}^{(i-1)}(x_2) dx_2, \quad \text{вычисленных для различных подобластей.}$$

Следует отметить, что вследствие наличия такого рода «интегральных» условий метод Ньютона утрачивает присущую ему квадратичную скорость сходимости; с другой стороны, размеры матрицы Фреше для вектора сомножителей решения в окружном направлении (с учётом необходимости применения приёма «врезания точек» в силу сильной изменяемости решения в данном направлении) становятся весьма значительными. Последнее обстоятельство обусловило необходимость вычисления сомножителей решения, зависящих от окружной координаты, которые отвечают различным подобластям, в рамках

итерационного процесса («внутреннего» по отношению к итерационному процессу отыскания вектора неизвестных функций задачи $U(x_1, x_2) = \{U_j^{(i)}(x_1, x_2)\}$): на каждом шаге указанного процесса последовательно вычисляются решение, соответствующее подобласти Ω_1 ; решение, соответствующее подобласти Ω_2 с учётом «интегральных» условий, связывающих решение для первой и второй подобластей; решение, соответствующее подобласти Ω_2 с учётом «интегральных» условий, связывающих решение для второй и третьей подобластей.

Критерием окончания указанного итерационного процесса является малость изменения вектора сомножителей решения, зависящих от окружной координаты, на двух последовательных итерациях. Процесс продемонстрировал высокую скорость сходимости (две-три итерации) за исключением самых первых шагов алгоритма движения по параметру, а также шагов алгоритма движения по параметру, следующих за сменой параметра, – в указанных случаях число итераций увеличивалось до десяти-пятнадцати итераций.

Для преодоления в процессе движения по параметру предельных точек решения использовался приём смены параметра [15]. При этом описанный выше итерационный процесс отыскания вектора сомножителей решения, зависящих от окружной координаты, претерпевает изменения, связанные с необходимостью совместного вычисления матриц Фреше, отвечающих различным подобластям: здесь на каждом шаге итерационного процесса вначале осуществляется совместное (в рамках одного ньютоновского процесса) отыскание сомножителей решения, отвечающих различным подобластям, без учёта «интегральных»

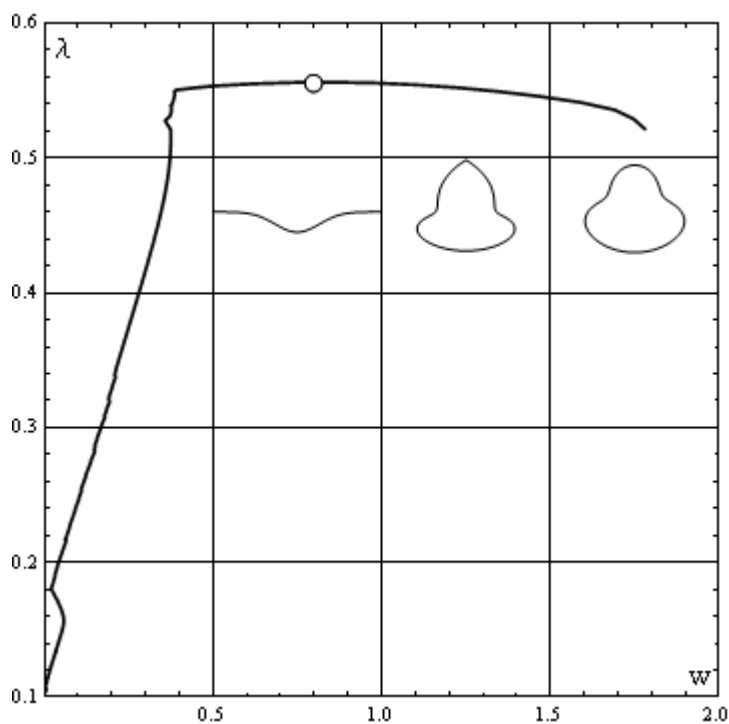


Рис. 1. Характерная зависимость нагрузка-прогиб для оболочки, ослабленной разрезом

условий, связывающих компоненты решения для различных подобластей; далее в рамках отдельных ньютоновских процессов осуществляется коррекция указанных величин для удовлетворения «интегральных» условий.

Для обращения матрицы Фреше в рамках ньютоновского процесса, в рамках которого осуществляется совместное отыскание сомножителей решения, отвечающих различным подобластям, использовалась формула обращения блочных матриц; в качестве начального приближения для данного итерационного процесса хорошо себя зарекомендовали решения, полученные путём организации ньютоновского процесса отдельно для каждой из подобластей.

НЕЛИНЕЙНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ

Рассмотренный в предыдущем разделе алгоритм решения нелинейной краевой задачи был применён для отыскания и анализа структуры ветвления нелинейной краевой задачи теории оболочек для случая цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом, при действии равномерного внешнего давления – задача дана своей вариационной постановкой (1).

Было установлено, что процесс потери устойчивости протекает в два этапа: на первом этапе происходит образование локальной вмятины в окрестности разреза, при этом оболочка сохраняет несущую способность. При дальнейшем увеличении значения параметра внешней нагрузки оболочка развивает формы деформации, близкие к формам деформации одна или две смежные локальные вмятины, которые фиксируются на ветвях вторичного ветвления для случая цилиндрической оболочки, не имеющей несовершенств [15]. В конечном итоге оболочка теряет устойчивость (и несущую способность) по одной из указанных форм.

На рис. 1 представлена характерная зависимость нагрузка-прогиб для цилиндрической оболочки, ослабленной вертикальным разрезом; величина параметра нагрузки здесь отнесена к величине критической нагрузки для целой оболочки, полученной в рамках линейной теории, характерные прогибы отнесены к толщине оболочки; кружком обозначена предельная точка зависимости. Представленная зависимость соответствует следующим значениям геометрических характеристик оболочки: $L/R = 4$, $R/h = 160$, $2l/L = 0.5$.

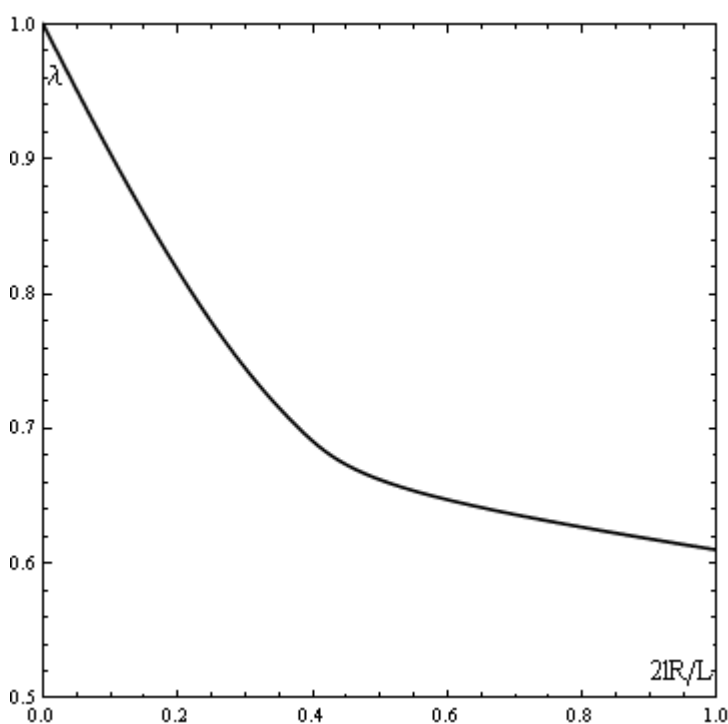


Рис. 2. Зависимость величины критической нагрузки от длины трещины

В данном случае локальная потеря устойчивости наблюдается при $\lambda = 0.18$, общая потеря устойчивости при $\lambda = 0.56$; последняя величина коррелирует с нижней границей области существования ветвей локальных форм для целой оболочки [15]. На рисунке также представлены сечения характерной закритической формы деформации оболочки: (слева направо) продольное сечение, поперечное сечение в области Ω_2 (содержащей разрез), и в области Ω_1 , которая не содержит разрез. Положение разреза соответствует верхней точке второго сечения. На рис. 2 представлена зависимость нагрузки потери устойчивости от длины трещины; область существования критических нагрузок соответствует области существования по параметру нагружения ветвей вторичного ветвления для случая целой оболочки.

ВЫВОДЫ

Приведенный выше анализ позволяет сформулировать следующие выводы:

1. Разбиение области определения нелинейной краевой задачи на подобласти, соответствующие одному типу граничных условий, позволяет применить методологию метода итеративного разделения переменных для случая области, на границах которой сформулированы различные типы граничных условий.
2. Наличие несовершенства в виде вертикального разреза служит инициатором развития форм деформации, близких к локальным формам деформации, фиксируемым на ветвях вторичного ветвления решения нелинейной краевой задачи теории оболочек для случая цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.
3. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки, ослабленной разрезом, по формам, подобным локальным формам деформации цилиндрической оболочки без начальных

несовершенств, обуславливает область значений нагрузок потери устойчивости для данного случая (0,6-1,0 в долях критической нагрузки, полученной в линеаризированной постановке для цилиндрической оболочки без начальных несовершенств), что эквивалентно области существования ветвей вторичного ветвления (ветвей локальных форм) для случая цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В. А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В.А. Баженов, О.П. Кривенко, М.О. Соловей. – К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 300 с.
2. Бауэр С. М. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, П.Е. Товстик. – Санкт-Петербург : Издательство СПбГУ, 2000. – 92 с.
3. Григоренко Я. М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів / Я.М. Григоренко, В.Д. Будак, О.Я. Григоренко. – Миколаїв : Ілюн, 2010. – 294 с.
4. Преображенский И. Н. Устойчивость и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Грищак. – М. : Машиностроение, 1986. – 240 с.
5. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells / J.N. Reddy. – N.-Y. : CRC Press, 2004. – 855 p.
6. Гузь А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии : Т. 1. Разрушение в структуре материала / А.Н. Гузь. – К. : Литера, 2008. – 592 с.
7. Гузь А. Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии : Т. 2. Родственные механизмы разрушения / А.Н. Гузь. – К. : Литера, 2008. – 736 с.
8. Lee M. C. W. Robust design – a concept for imperfection insensitive composite structures / M.C.W. Lee, Z. Mikulik, D.W. Kelly, R.S. Thomson, R. Degenhardt // Composite Structures. – 2010. – Vol. 92. – P. 1469-1477.
9. Lindgaard E. Nonlinear buckling optimization of composite structures considering “worst” shape imperfections / E. Lindgaard, E. Lund, K. Rasmussen // Int. J. Solids and Struct. – 2010. – Vol. 47. – P. 3186-3202.
10. Wang B. Determination of realistic worst imperfection for cylindrical shells using surrogate model / B. Wang, P. Hao, G. Li, Y. Fang, X. Wang, X. Zhang // Struct. Multidisc. Optim. – 2013. – Vol. 14. – P. 6-15.
11. Guarracino F. Some comments on the numerical analysis of plates and thin-walled structures / F. Guarracino, A. Walker // Thin-Walled Structures. – 2008. – Vol. 46. – P. 975-980.
12. Allahbakhsh H. Buckling of Cracked Laminated Composite Cylindrical Shells Subjected to Combined Loading / H. Allahbakhsh, M. Shariati // Appl. Compos. Mater. – 2012. – Vol. 14. – P. 631-638.
13. Estekanchi H. E. On the buckling of cylindrical shells with through cracks under axial load / H.E. Estekanchi, A. Vafai // Thin-Walled Structures. – 1999. – Vol. 35. – P. 255-274.
14. Vaziri A. Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression / A. Vaziri, H.E. Estekanchi // Thin-Walled Structures. – 2006. – Vol. 44. – P. 141-151.

15. Obodan N. I. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells / N.I. Obodan, O.G. Lebedeyev, V.A. Gromov. – N.-Y. : Springer, 2013. – 180 p.

REFERENCES

1. Bazhenov, V.A., Krivenko, O.P. and Solovei, M.O. (2010), *Neliniyne deformuvannya ta stiykist' pruzhnykh obolonok neodnorodnoy struktury* [Nonlinear deformation and stability of elastic shells with non-homogeneous structure], Vipol, Kiev.
2. Bauer, S.M., Zimin, B.A. and Tovstik, P.E. (2000), *Prosteyshiye modeli teorii obolochek i plastin v oftal'mologii* [The simplest models of plate and shell theory for ophthalmology], Publishing house of Saint-Petersburg University, Saint-Petersburg.
3. Grigorenko, Ya., Budak, V.D. and Grigorenko, O.Ya. (2010), *Rozv'yazannya zadach teorii obolonok na osnovi dyskretno-kontinual'nykh metodiv* [Problems solving for shell theory with employment of discrete-continuous methods], Ilion, Nikolaev.
4. Preobrazhenskiy, I.N. and Grishchak, V.Z. (1986), *Ustoychivost' i kolebaniya konicheskikh obolochek* [Stability and oscillation of conical shells], Mashinostroenie, Moscow.
5. Reddy, J.N. (2004), "Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells", CRC Press, New York.
6. Guz, A.N. (2008), "Fundamentals of fracture mechanics for compressed composites: Vol. 1. Fracture of material structure", Litera, Kiev.
7. Guz, A.N. (2008), "Fundamentals of fracture mechanics for compressed composites: Vol. 2. Related fracture mechanisms", Litera, Kiev.
8. Lee, M.C.W., Mikulik, Z.D., Kelly, W., Thomson, R.S. and Degenhardt, R. (2010), "Robust design – a concept for imperfection insensitive composite structures", *Composite Structures*, vol. 92, pp. 1469-1477.
9. Lindgaard, E., Lund, E. and Rasmussen, K. (2010), "Nonlinear buckling optimization of composite structures considering "worst" shape imperfections", *Int. J. Solids and Struct.*, vol. 47, pp. 3186-3202.
10. Wang, B., Hao, P., Li, G., Fang, Y., Wang, X. and Zhang, X. (2013), "Determination of realistic worst imperfection for cylindrical shells using surrogate model", *Struct. Multidisc. Optim.*, vol. 14, pp. 6-15.
11. Guarracino, F. and Walker, A. (2008), "Some comments on the numerical analysis of plates and thin-walled structures", *Thin-Walled Structures*, vol. 46, pp. 975-980.
12. Allahbakhsh, H. and Shariati, M. (2012), "Buckling of Cracked Laminated Composite Cylindrical Shells Subjected to Combined Loading", *Appl. Compos. Mater.*, vol. 14, pp. 631-638.
13. Estekanchi, H.E. and Vafai, A. (1999), "On the buckling of cylindrical shells with through cracks under axial load", *Thin-Walled Structures*, vol. 35, pp. 255-274.
14. Vaziri, A. and Estekanchi, H.E. (2006), "Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression", *Thin-Walled Structures*, vol. 44, pp. 141-151.
15. Obodan, N.I., Lebedeyev, O.G. and Gromov, V.A. (2013), "Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells", Springer, New York.