

КОНЕЧНАЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОСТЕННОЙ ТРУБКИ

¹Онищенко И. С., аспирант, ¹Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор,
²Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.

¹*Днепропетровский национальный университет им. Олесь Гончара,
просп. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, 49010, Украина*

²*ООО «Завод Мастер-Профи»,
ул. Курсантская, 23, г. Днепропетровск, 49010, Украина*

Inna_s_o@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

В рамках определяющих соотношений континуальной теории гипопруго-вязкопластичности с комбинированным упрочнением исследуется конечная деформация тонкостенной трубки при сложном нагружении. Задача расчета конечной деформации тонкостенной трубки при совместном действии растягивающего усилия и крутящего момента сведена к задаче Коши для системы трех квазилинейных дифференциальных уравнений. Проведено сравнение теоретических данных с известными в литературе экспериментальными результатами для образцов из меди. Показано удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных.

Ключевые слова: вязкопластичность, гипопругость, конечные деформации, тонкостенная трубка.

КІНЦЕВА В'ЯЗКОПЛАСТИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ ТОНКОСТІННОЇ ТРУБКИ

¹Онищенко И. С., аспирант, ¹Черняков Ю. А., д. ф.-м. н., профессор,
²Шнейдер В. П., к. ф.-м. н.

¹*Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара,
просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

²*ТОВ «Завод Мастер-Профі»,
вул. Курсантська, 23, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна*

Inna_s_o@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

У рамках визначальних співвідношень континуальної теорії гіпопружно-в'язкопластичності з комбінованим зміцненням досліджується кінцева деформація тонкостінної трубки при складному навантаженні. Завдання розрахунку кінцевої деформації тонкостінної трубки при спільній дії розтягуючого зусилля й обертового моменту зведена до задачі Коші для системи трьох квазілінійних диференціальних рівнянь. Проведено порівняння теоретичних даних з відомими в літературі експериментальними результатами для зразків з міді. Показано задовільну відповідність розрахункових і експериментальних даних.

Ключові слова: в'язкопластичність, гіпопружність, кінцеві деформації, тонкостінна трубка.

FINAL VISCO-PLASTIC DEFORMATION OF THIN-WALLED TUBE

¹Onischenko I. S., Graduate Student, ¹Chernyakov Yu A., D.Sc. in Physics and Maths,
²Shneider V.P., Ph.D. in Physics and Maths

¹*Oles Honchar Dnepropetrovsk national university,
Gagarina av., 72, Dnepropetrovsk, 49000, Ukraine*

²*“Zavod Master-Profi”, LLC,
Cadets street, 23, Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine*

Inna_s_o@mail.ru, yu.chernyakov@gmail.com

A number of theories proposed to describe the visco-plastic deformation of metals in a wide range of deformation rates and temperatures in the recent years. These theories are conventionally divided into two main groups; physical [3, 20, 23, 25, 27, 28] and phenomenological [13, 15]. In these works, special attention is paid to the description of viscoplastic deformation under uniaxial loading. But the development of strain hardening is not considered, although they are very

important to describe the deformation under complex loading. Defining relations of the continuum theory hypoelastic-viscoplastic combined hardening recorded in this paper. Finite deformation of thin-walled tubes under complex loading is studied in the framework of these relations. The problem of calculating the final deformation of thin-walled tubes under combined action of compressive force and torque is reduced to the Cauchy problem for a system of three quasi-linear differential equations. The author compared the theoretical results with the known in the literature [14], the experimental results for samples of copper and showed good agreement between the calculated and experimental data. Statement of the problem. Viewed viscoplastic deformation of thin-walled tube when specifying path loading. The loading is carried out by compressive force and torque. Physical stress rate is expressed in terms of full velocity gradient and visco-plastic deformation using hypo-elastic ratio. viscoplastic deformation is determined by the generalized continuum theory hypoelastic-viscoplastic. It is based on the following assumptions:

1. The gradient of the deformation rate in the current configuration is the sum of the elastic and plastic components. Each of these parts in turn, is the sum of the deformation and rotation speed.
2. The speed of the elastic deformation obeys hypoelastic relations with stiffness matrix, which depends on homologous temperature.
3. The rate of plastic deformation is defined in the standard way as the product of the velocity direction of visco-plastic deformation in the stress space in the current configuration and intensity of the true speed of viscoplastic deformation.
4. Deviator stress tensor is the sum of the active voltage or current and the internal "elastic" or residual stresses in the current configuration.
5. Submissions for thermally activated flow stress is selected

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) F\left(\frac{\bar{\tau}}{D}\right).$$

6. The rate of change of parameters of isotropic and kinematic hardening take proportional to the intensity and speed of visco-plastic deformation is given in summary form.

Ultimately, the problem of determining the stress-strain state is reduced to solving a system of four first order differential equations.

In the current configuration deviator of stress tensor is the sum of the active stresses or yield stresses and the internal "elastic: or residual stresses. The mechanism of occurrence of residual stresses is that the yield condition is corresponded to the total deformation and not elastic and plastic deformation apart. Hence the non-uniform distribution of the plastic deformation of grains always corresponds to the non-uniform elastic deformation, which results in internal elastic forces that provide resistance to plastic deformation (and in some cases, such as unloading and loading of opposite sign, on the contrary, help plastic deformation). This interpretation of the active and residual stress has been proposed in [1] and has been actively used in the construction of theories of thermo-viscoplastic. Note that the nature of the flow stress tensor introduced above is associated with short-range obstacles to dislocation motion, overcoming of which can contribute to the thermal activation [4, 22, 23, 28]. Residual stresses occur due to long-range obstacles resistance force related to the structure of the material and can not be overcome by the thermal energy of the crystal [23, 28]. Effect of temperature is only through the dependence of the elastic modulus on temperature. Representation for the thermally activated flow stresses have the highest diversity. For their construction, in its simplest form, the approach proposed in [28] is used.

The results presented show that a generalized version of the continuum theory of viscoplastic flow with combined hardening sufficient precision allows us to describe the behavior of copper under complex loading.

Key words: viscoplasticity, hypoelastic, finite deformation.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время предложен целый ряд теорий для описания вязкопластической деформации металлов в широком диапазоне скоростей деформации и температур. Эти теории условно разделяют на две основные группы; физические [3, 20, 23, 25, 27, 28] и феноменологические [13, 15]. В упомянутых работах особое внимание уделялось описанию вязкопластического деформирования при одноосном нагружении, тогда как вопросы развития деформационного упрочнения не рассматривались, хотя они очень важны для описания деформации при сложном нагружении.

В настоящей работе записаны определяющие соотношения континуальной теории гипопруго-вязкопластичности с комбинированным упрочнением. В рамках этих соотношений исследуется конечная деформация тонкостенной трубки при сложном нагружении. Задача расчета конечной деформации тонкостенной трубки при совместном действии растягивающего усилия и крутящего момента сведена к задаче Коши для системы трех квазилинейных дифференциальных уравнений. Проведено сравнение теоретических данных с известными в литературе [14] экспериментальными результатами для образцов из меди. Показано удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трубку, которая находится под действием растягивающего усилия и крутящего момента. Пусть L , R_1 и R_2 обозначают начальную длину, внутренний и внешний радиусы трубки, соответственно. Начало координат расположим в центре одного из концов трубки и ось Z совместим с осью трубки, тогда деформацию трубки при растяжении и кручении можно описать следующим образом:

$$r = \alpha R, \quad \theta = \Theta + \omega Z, \quad z = \lambda Z,$$

где (R, Θ, Z) и (r, θ, z) определяют положение материальной точки до и после деформации в цилиндрической системе координат, ω – относительный угол закручивания, α и λ – отношение радиусов и длин до и после деформации.

Используя кинематические соотношения можно построить градиент деформации \mathbf{F} и градиент деформации скорости \mathbf{L} [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \alpha \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta + \omega \alpha R_m \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_Z + \lambda \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - \dot{\omega} Z \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \dot{\omega} Z \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \\ &+ \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

где $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ и $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$ – базисные векторы в точке трубки до и после деформации, и $\dot{\phi}$ определяется как

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha R_m \dot{\omega}}{\lambda},$$

а $R_m = (R_1 + R_2)/2$ используется вместо R в тонкостенных трубках.

Для деформации скорости и вращения материала образца можем записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = -\frac{\dot{\omega}}{\alpha R_m} \dot{\phi} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\omega}}{\alpha R_m} \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z - \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Градиент деформации скорости $\mathbf{L} \equiv \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ в текущей конфигурации представляется как сумма упругой \mathbf{L}^e и пластической \mathbf{L}^p составляющих

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p.$$

Каждая из этих частей \mathbf{L} , в свою очередь, представляется как сумма деформации скорости $(\mathbf{D}^e, \mathbf{D}^p)$ и вращения $(\mathbf{W}^e, \mathbf{W}^p)$:

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{eT}), \quad \mathbf{W}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e - \mathbf{L}^{eT}), \quad \mathbf{D}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{pT}), \quad \mathbf{W}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^{pT}).$$

Пусть P и M – осевое усилие и скручивающий момент в поперечном сечении трубки, соответственно. В таком случае напряжения в трубке будут

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{z\theta} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta z} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z,$$

где

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi r(R_2 - R_1)} = \frac{P}{2\pi\alpha R_m(R_2 - R_1)},$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = \frac{M}{2\pi r^2(R_2 - R_1)} = \frac{M}{2\pi\alpha^2 R_m^2(R_2 - R_1)}.$$

Скорость по Яуманну для напряжений вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\sigma^\nabla &= \dot{\sigma} - \mathbf{W} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W} = \\ &= (\dot{\sigma}_{\theta\theta} - \dot{\phi}\sigma_{\theta z})\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \left(\dot{\sigma}_{\theta z} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})\frac{\dot{\phi}}{2} \right)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \\ &+ \left(\dot{\sigma}_{\theta z} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})\frac{\dot{\phi}}{2} \right)\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta + (\dot{\sigma}_{zz} + \dot{\phi}\sigma_{\theta z})\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \\ &+ \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{\theta\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{\theta\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\dot{\phi}\sigma_{\theta z}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{z\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Используя гипотезу о жесткости соотношения

$$\sigma^{\nabla e} \equiv \dot{\sigma} - \mathbf{W}^e \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}^e = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e,$$

где $\dot{\sigma}$ – материальная скорость изменения тензора напряжений Коши, $\sigma^{\nabla e}$ – коротационная производная в системе координат вращающейся с упругим спином, \mathbf{C}^e – постоянная матрица упругой жесткости, которая задается так:

$$\mathbf{C}^e = 2G(\theta) \left[\mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} \right].$$

Здесь $G(\theta) = G_0 g(\theta)$, θ – гомологическая температура ($\theta = T/T_{nl}$, T – текущая температура, T_{nl} – температура плавления), G_0 – упругий модуль сдвига при $\theta = 0$, $g(\theta)$ – функция, характеризующая зависимость упругого модуля сдвига от температуры, ν – коэффициент Пуассона, \mathbf{i} и \mathbf{I} единичные тензоры второго и четвертого ранга, соответственно. Наиболее приемлемое выражение для функции $g(\theta)$ введено в работе [26]

$$g(\theta) = 1 - \theta \exp[\theta^*(1 - 1/\theta)],$$

где θ^* – константа материала.

Можем записать

$$\sigma^\nabla = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) - \mathbf{W}^p \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}^p.$$

Скорость пластической деформации и пластического вращения определим стандартным образом:

$$\dot{\mathbf{D}}^p = \dot{p}\mathbf{N}, \quad \mathbf{W}^p = \dot{p}\mathbf{M},$$

где \mathbf{N} – направление скорости вязкопластической деформации в пространстве напряжений в текущей конфигурации, \mathbf{M} – антисимметричный тензорный множитель \dot{p} – интенсивность скорости истинной вязкопластической деформации ($\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p}$), \mathbf{s} – девиатор тензора напряжений Коши ($\mathbf{s} = \sigma - \text{tr}(\sigma)\mathbf{I}/3$). В дальнейшем используется упрощенной формой, предложенной в работе [14]:

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{2\eta},$$

где

$$\eta = \sqrt{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha}) : (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\alpha})}.$$

Наибольшим разнообразием отличаются представления для построения термически активированных напряжений течения. В простейшем варианте, используется подход, предложенный в работе [29] с использованием параметра $Z = \dot{p} \exp(Q/kT)$, который учитывает совместное влияния скорости деформации \dot{p} и температуры T на напряжение течения $\bar{\tau}(Z)$, где Q – энергия активации, и k – постоянная Больцмана. Используя этот подход, можем записать:

$$\dot{p} = \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) \sinh\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau_0 + r(p)}\right)^m,$$

где

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - g(\theta)\bar{\boldsymbol{\alpha}}) : (\mathbf{s} - g(\theta)\bar{\boldsymbol{\alpha}})}, \quad \theta_0 = \frac{Q_0}{kT_{n1}}.$$

Скорость изменения параметров изотропного и кинематического упрочнения примем пропорциональными интенсивности скорости вязкопластической деформации и зададим в обобщенном виде, как и в работе [14]:

$$\dot{r} = E_d(r)\dot{p}, \quad \boldsymbol{\alpha}^{\nabla\omega} = \mathbf{E}_\alpha(\boldsymbol{\alpha})\dot{p},$$

$$E_d = \beta(d_0 - d), \quad \mathbf{E}_\alpha = \sum_i^n \mathbf{E}_\alpha^{(i)}, \quad \mathbf{E}_\alpha^{(i)} = \beta_c^{(i)} [\alpha_c^{(i)} \mathbf{N} - \boldsymbol{\alpha}^{(i)}], \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + \boldsymbol{\alpha}^{(2)},$$

где E_d и \mathbf{E}_α – коэффициенты упрочнения, $\boldsymbol{\alpha}^{\nabla\omega}$ – коротационная скорость, с вращением подструктуры материала. Следуя работе [14], представим ее в виде:

$$\boldsymbol{\alpha}^{\nabla\omega} = \boldsymbol{\alpha}^\nabla + \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{W}^p.$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}^\nabla$ – скорость по Яуманну от $\boldsymbol{\alpha}$.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Заменяя в определяющих соотношениях скорости деформации и напряжений по формулам и, приходим к системе четырех уравнений относительно четырех неизвестных $\dot{\alpha}$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$ и $\dot{\sigma}_{\theta\theta}$. Представим эту систему в следующем виде:

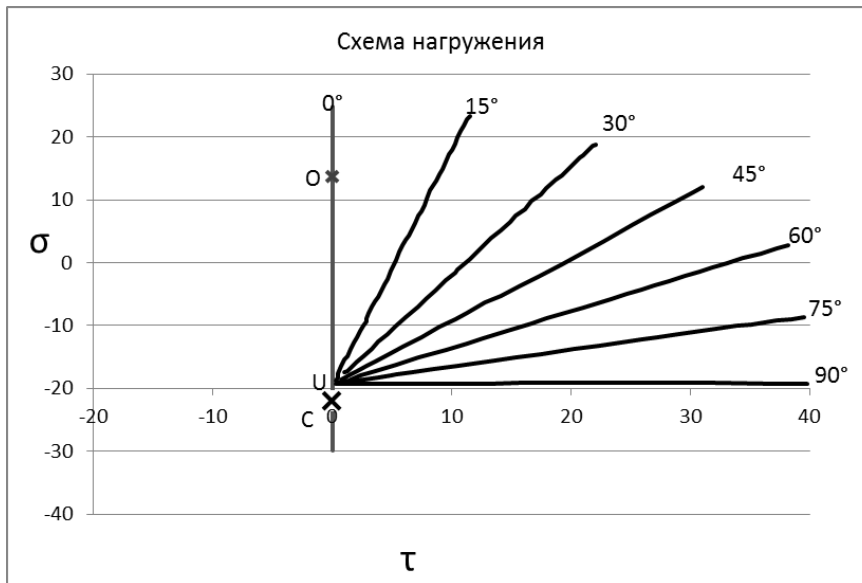
$$\begin{cases} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + v \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = (1 - 2\nu) N_{11} \dot{p}, \\ 4G(\theta)v \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + 2G(\theta)(1 - \nu) \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sigma_{\theta z} (1 - 2\nu) \dot{\phi} = \dot{\sigma}_{zz} (1 - 2\nu) + (2G(\theta)N_{33} + 2M_{32}\sigma_{23})(1 - 2\nu) \dot{p}, \\ (G(\theta) - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \dot{\phi} = \dot{\sigma}_{\theta z} + (2G(\theta)N_{23} + (\sigma_{33} - \sigma_{22})M_{23}) \dot{p}, \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} = (C_{2211}^e + C_{2222}^e) \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + C_{2233}^e \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + (C_{2223}^e + \sigma_{\theta z}) \dot{\phi} - (2G(\theta)N_{22} + 2M_{23}\sigma_{32}) \dot{p}. \end{cases} \quad (1)$$

Для решения системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** воспользуемся методом Эйлера. Если теперь задать траекторию нагружения $\sigma = \sigma_{zz}(t), \tau = \sigma_{\theta z}(t)$, то в результате

пошагового решения системы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** находим $\dot{\alpha}$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\sigma}_{\theta\theta}$ и определяем деформацию $\varepsilon = 1 - 1/\lambda$, $\gamma = \frac{\phi\dot{\alpha}}{\dot{\lambda}}$ можно построить соответствующую траекторию деформации.

Для проверки работоспособности теории использовались экспериментальные данные, полученные в работе [14] при испытаниях тонкостенных трубчатых образцов из отожженной меди (OFHC) при растяжении приблизительно до 13% и при совместном кручении с растяжением приблизительно до 10%.

Траектории нагружения показаны на рис. 1, на котором участок $O \rightarrow C$ представляет собой первую стадию нагружения кручением до пластического состояния, участок $C \rightarrow U$, отвечает частичной разгрузке образца. На втором этапе нагружения реализовывалось



совместное кручение со сжатием вдоль лучей, начинающихся из точки U, под углами, 0° , 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° и 180° к оси касательного напряжения.

Рис. 1. Траектория нагружения в плоскости $\sigma - \sqrt{3}\tau$

В представленных выше соотношениях для описания упругого поведения используются два параметра, G и ν , а для описания вязкопластического поведения, начальный предел текучести σ_y и его изменение при изотропном упрочнении R_m . Для описания кинематического упрочнения приняты следующие параметры $\alpha_v^{(1)}$, $\alpha_v^{(2)}$, $\beta_v^{(1)}$ и $\beta_v^{(2)}$. Все эти параметры являются характеристиками материала и должны быть определены из экспериментальных данных. Для этого использовались экспериментальные данные зависимости натуральной деформации сдвига от касательного напряжения при знакопеременном нагружении. В результате подбора были получены следующие значения констант материала.

Таблица 1

G_0 , ksi*	ν	σ_y , ksi*	β	d_0	$\alpha_c^{(1)}$	$\alpha_c^{(2)}$	$\beta_c^{(1)}$	$\beta_c^{(2)}$	$\dot{\rho}_0$, 1/с	m	T_{nl} , К	T , К	θ^*
3442	0,33	3	4,8	35	2,2	1,7	115	60	$5 \cdot 10^6$	20	1356,5	296	0,9

*ksi – 1000 фунтов на квадратный дюйм

На рис. 2 показаны экспериментальные данные и результаты расчета записанной здесь

теории для деформации сдвига. Установлено, что теория хорошо описывает экспериментальные данные. Это понятно и разумно, потому что использовались данные в четырех точках С, D, E и F для оценки материальных параметров моделей.

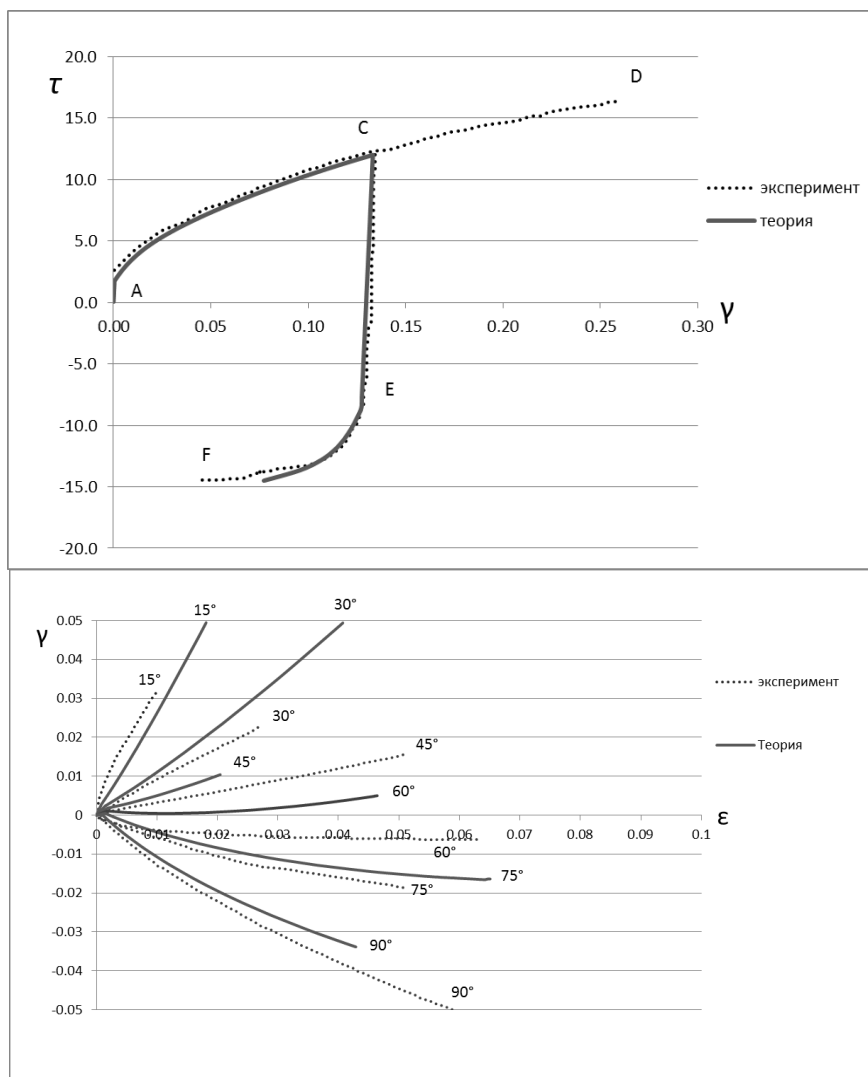


Рис. 2. Сравнение зависимости касательного напряжения – деформация сдвига при кручении – (эксперимент, теория)

Рис. 3. Приведены результаты связи касательного напряжения - деформации сдвига

ВЫВОДЫ

Представленные результаты показывают, что обобщенный вариант континуальной теории вязкопластического течения с комбинированным упрочнением с достаточной для инженерной практики точностью позволяет описывать поведение меди при сложном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадашевич Ю. И. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ПММ. – 1958. – Т. 22. – Вып. 1. – С. 78-89.
2. Armstrong R. W. Thermal activation strain rate analysis (TASRA) for polycrystalline metals / R.W. Armstrong // J. Sci. Ind. Res. India. – 1973. – 32. – P. 591-598.
3. Bodner S. R. Constitutive equation for elastic-viscoplastic strain-hardening materials/ S.R. Bodner, Y. Partom // ASME J. Appl. Mech. –1975. – 42. – P. 385-389.

4. Bonora N. Constitutive modeling for ductile behavior incorporating strain rate, temperature, and damage mechanics / N. Bonora, P.P. Milella // *Int. J. Impact. Eng.* – 2001. – 26. – P. 53-64.
5. Cai M. C. A constitutive description of the strain rate and temperature effects on the mechanical behavior of materials/ M.C. Cai, L.S. Niu, X.F. Ma, H.J. Shi // *Mechanics of Materials.* – 2010. – 42. – P. 774-781.
6. Chaboche J. L. Overview of some theories of plasticity and viscoplasticity / J.L. Chaboche // *International Journal of Plasticity.* – 2008. – 24. – P. 1642-1693.
7. Chen S. R. Constitutive behavior of tantalum and tantalum–tungsten alloys / S.R. Chen, G.T. Gray III // *Metall. Mater. Trans.* – 1996. – A 27. – P. 2994-3006.
8. Chen Y. High-Strain, High-Strain-Rate Deformation of Tantalum / Y. Chen // *Ph.D. Thesis, Materials Science, University of California.* – 1998.
9. Dafalias Y. F. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation / Y.F. Dafalias // *J. Appl. Mech.* – 1983. – ASME 50. – P. 561-565.
10. Delobelle P. Experimental study and phenomenological modelization of ratcheting under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel / P. Delobelle, P. Robinet, L. Bocher // *Int. J. Plasticity.* – 1995. – 11. – P. 295-330.
11. Duprey K. Plastic flow of tantalum at high strain rates / K. Duprey, R.J. Clifton // *In: Proceedings of the Third International Conference on Tungsten and Refractory Metals, McLean, Virginia.* – 1995. – P. 473-479.
12. Hoge K. G. The temperature and strain rate dependence of the flow stress of tantalum/ K.G. Hoge, A.K. Mukherjee // *J. Mater. Sci.* – 1977. – 12. – P. 1666-1672.
13. Johnson G. R. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, large strain rates and high temperatures/ G.R. Johnson, W.H. Cook // *In: Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands.* – 1983. – P. 541-547.
14. Khan A. S. Study of three elastic-plastic constitutive models by non-proportional finite deformations of OFHC copper/ A.S. Khan, P. Cheng // *International Journal of Plasticity.* – 1996. – Vol. 12, No. 6. – P. 737-759.
15. Khan A. S. Behaviors of three BCC metal over a wide range of strain rates and temperatures: experiments and modeling/ A.S. Khan, R. Liang // *Int. J. Plast.* – 1999. – 15. – P. 1089-1109.
16. Khan A. S. An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals. II – experiments and predictions concerning thin-walled tubular OFHC copper / A.S. Khan, P. Cheng // *International Journal of Plasticity.* – 1998. – Vol. 14, N. 1-3. – P. 209-226.
17. Kocks U. F. Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case / U.F. Kocks, H. Mecking // *Prog Mater Sci.* – 2003. – 48. – P. 171-273.
18. Lassila D. The effect of grain boundaries on the athermal stress of tantalum and tantalum–tungsten alloys. / D. Lassila, A. Goldberg, R. Becker // *Metall. Mater. Trans.* – 2002. – A 33. – P. 3457-3464.
19. Lee B.-J. Modeling the mechanical behavior of tantalum / B.-J. Lee, K. Vecchio, S. Ahzi, S. Schoenfeld // *Metall. Mater. Trans.* – 1997. – A 28. – P. 113-122.
20. Liang R. Elastic–Plastic Constitutive Modeling of Tantalum and Aermet 100 Steel due to Quasi-Static and Dynamic Loadings / R. Liang // *Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Maryland.* – 1999.

21. Mecking H. A universal temperature scale for plastic flow / H. Mecking, B. Nicklas, N. Zarubova, U.F. Kocks // *Acta Metall. Mater.* – 1986. – 34. – P. 527-535.
22. Miller, A.K., Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield-surface distortion / A.K. Miller [In: Krauss, A.S., Krauss, K. (Eds.)] // *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*. Academic Press Inc. – 1996. – P. 153-227.
23. Nemat-Nasser S. Direct measurement of isothermal flow stress of metals at elevated temperatures and high strain rates with application to Ta and Ta–W alloys / S. Nemat-Nasser, J. Isaacs // *Acta Metall.* – 1997. – 45. – P. 907-919.
24. Nemat-Nasser S. Flow stress of FCC polycrystals with application to OFHC Copper / S. Nemat-Nasser, Y. Li // *Acta Mater.* – 1998. – 46. – P. 565–577.
25. Rajendran A. Effects of strain rate on plastic flow and fracture in pure tantalum / A. Rajendran, R. Garrett, J. Clark, T. Jungling // *J. Mater. Shaping Technol.* – 1991. – 9. – P. 7-20.
26. Rusinek A. A thermo-viscoplastic constitutive model for FCC metals with application to OFHC copper / A. Rusinek, J.A. Rodriguez-Martinez, A. Arias // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2010. – 52. – P. 120-135.
27. Vecchio K. S. High-strain, high-strain-rate deformation of tantalum and tantalum-tungsten alloys / K.S. Vecchio // *J. Phys. IV France*. – 1994. – 4. – P. C8301-C8306.
28. Voyiadjis G. Z. Microstructural based models for BCC and FCC metals with temperature and strain rate dependency / G.Z. Voyiadjis, F.H. Abed // *Mech. Mater.* – 2005. – 37. P. 355-378.
29. Zener C. Effect of strain rate upon plastic flow of steel / C. Zener, J.H. Hollomon // *J. Appl. Phys.* – 1944. – 15. – P. 22-32.
30. Zerilli F. J. Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations / F.J. Zerilli, R.W. Armstrong // *J Appl Phys.* – 1987. – 61. – P. 1816-1825.

REFERENCES

1. Kadashevich, Y.I. and Novozhilov, V.V. (1958), “The theory of plasticity, which takes into account the residual microtension”, *PMM*, vol. 22, is. 1, pp. 78-89.
2. Armstrong, R.W. (1973), “Thermal activation strain rate analysis (TASRA) for polycrystalline metals”, *J. Sci. Ind. Res. India*, 32, pp. 591-598.
3. Bodner, S.R. and Partom, Y. (1975), “Constitutive equation for elastic-viscoplastic strain-hardening materials”, *ASME J. Appl. Mech.*, 42, pp. 385-389.
4. Bonora, N. and Milella, P.P. (2001), “Constitutive modeling for ductile behavior incorporating strain rate, temperature, and damage mechanics”, *Int. J. Impact. Eng.*, 26, pp. 53-64.
5. Cai, M.C., Niu, L.S., Ma, X.F. and Shi, H.J. (2010), “A constitutive description of the strain rate and temperature effects on the mechanical behavior of materials”, *Mechanics of Materials*, 42, pp. 774-781.
6. Chaboche, J.L. (2008), “Overview of some theories of plasticity and viscoplasticity”, *International Journal of Plasticity*, 24, pp. 1642-1693.
7. Chen, S.R. and Gray III, G.T. (1996), “Constitutive behavior of tantalum and tantalum–tungsten alloys”, *Metall. Mater. Trans.*, A 27, pp. 2994-3006.
8. Chen, Y. (1998), “High-Strain, High-Strain-Rate Deformation of Tantalum”, *Ph.D. Thesis, Materials Science*, University of California.

9. Dafalias, Y.F. (1983), "Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation", *J. Appl. Mech.*, ASME 50, pp. 561-565.
10. Delobelle, P., Robinet, P. and Bocher, L. (1995), "Experimental study and phenomenological modelization of ratcheting under uniaxial and biaxial loading on an austenitic stainless steel", *Int. J. Plasticity*, 11, pp. 295-330.
11. Duprey, K. and Clifton, R.J. (1995), "Plastic flow of tantalum at high strain rates", *In: Proceedings of the Third International Conference on Tungsten and Refractory Metals*, McLean, Virginia, pp. 473-479.
12. Hoge, K.G. and Mukherjee, A.K. (1977), "The temperature and strain rate dependence of the flow stress of tantalum", *J. Mater. Sci.*, 12, pp. 1666-1672.
13. Johnson, G.R. and Cook, W.H. (1983), "A constitutive model and data for metals subjected to large strains, large strain rates and high temperatures", *In: Proceedings of the 7th International Symposium on Ballistics*, The Hague, The Netherlands, pp. 541-547.
14. Khan, A.S. and Cheng, P. (1996), "Study of three elastic-plastic constitutive models by non-proportional finite deformations of OFHC copper", *International Journal of Plasticity*, vol. 12, no. 6, pp. 737-759.
15. Khan, A.S. and Liang, R. (1999), "Behaviors of three BCC metal over a wide range of strain rates and temperatures: experiments and modeling", *Int. J. Plast.*, 15, pp. 1089-1109.
16. Khan, A.S. and Cheng, P. (1998), "An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals. II – experiments and predictions concerning thin-walled tubular OFHC copper", *International Journal of Plasticity*, vol. 14, no. 1-3, pp. 209-226.
17. Kocks, U.F. and Mecking, H. (2003), "Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case", *Prog Mater Sci.*, 48, pp. 171-273.
18. Lassila, D., Goldberg, A. and Becker, R. (2002), "The effect of grain boundaries on the athermal stress of tantalum and tantalum–tungsten alloys", *Metall. Mater. Trans.*, A 33, pp. 3457-3464.
19. Lee, B.-J., Vecchio, K., Ahzi, S. and Schoenfeld, S. (1997), "Modeling the mechanical behavior of tantalum", *Metall. Mater. Trans.*, A 28, pp. 113-122.
20. Liang, R. (1999), "Elastic–Plastic Constitutive Modeling of Tantalum and Aermet 100 Steel due to Quasi-Static and Dynamic Loadings", *Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering*, University of Maryland.
21. Mecking, H., Nicklas, B., Zarubova, N. and Kocks, U.F. (1986), "A universal temperature scale for plastic flow", *Acta Metall. Mater.*, 34, pp. 527-535.
22. Miller, A.K., (1996), "Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield-surface distortion", *In: Krauss, A.S., Krauss, K. (Eds.), Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation, Academic Press Inc.*, pp. 153-227.
23. Nemat-Nasser, S. and Isaacs, J. (1997), "Direct measurement of isothermal flow stress of metals at elevated temperatures and high strain rates with application to Ta and Ta–W alloys", *Acta Metall.*, 45, pp. 907-919.
24. Nemat-Nasser S. Flow stress of FCC polycrystals with application to OFHC Copper. / Li Y. // *Acta Mater*- 1998- 46: 565–77.
25. Rajendran, A., Garrett, R., Clark, J. and Jungling, T. (1991), "Effects of strain rate on plastic flow and fracture in pure tantalum", *J. Mater. Shaping Technol.*, 9, pp. 7-20.

26. Rusinek, A., Rodriguez-Martinez, J.A. and Arias, A. (2010), "A thermo-viscoplastic constitutive model for FCC metals with application to OFHC copper", *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, pp. 120-135.
27. Vecchio, K.S. (1994), "High-strain, high-strain-rate deformation of tantalum and tantalum-tungsten alloys", *J. Phys. IV France*, 4, pp. C8301-C8306.
28. Voyiadjis, G.Z. and Abed, F.H. (2005), "Microstructural based models for BCC and FCC metals with temperature and strain rate dependency", *Mech. Mater.*, 37, pp. 355-378.
29. Zener, C. and Hollomon, J.H. (1944), "Effect of strain rate upon plastic flow of steel", *J. Appl. Phys.*, 15, pp. 22-32.
30. Zerilli, F.J. and Armstrong, R.W. (1987), "Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations", *J. Appl Phys.*, 61, pp. 1816-1825.

УДК 393.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ КОНТАКТУЮЧОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У ЇЇ ВЕРШИНАХ ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Николишин М. М. д. ф.-м. н., професор,
Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Альфавіцька С. О.

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

Сформульовано і розв'язано задачу про двовісний згин розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини з тріщиною. Припускається, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщини будуть контактувати по області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини, а у її вершинах утворюються пластичні зони з урахуванням зміцнення матеріалу за лінійним розподілом напруження у них та виконанням умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра. За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подамо у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі та задачі згину (класична теорія). Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин розв'язування задачі зведено до задачі лінійного спряження, на основі яких отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій необмежених у вершинах пластичних зон. Числово визначено довжину пластичної зони у вершині тріщини.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, зміцнення, пластичні зони.

ДВУХОСНИЙ ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКВОЗНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНТАКТИРУЮЩЕЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧНЫХ ЗОН В ЕЕ ВЕРШИНАХ И УПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛА

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., профессор, Николишин М. М. д. ф.-м. н., профессор,
Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Альфавицкая С. О.

*Львовский национальный университет им. Ивана Франка,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

Сформулирована и решена задача о двухосном изгибе распределенными изгибающими моментами на бесконечности изотропной пластины с трещиной. Предполагается, что под воздействием внешней нагрузки берега трещины контактируют по области постоянной ширины вблизи оснований пластины, а в ее вершинах образуются пластические зоны с учетом упрочнения материала по линейному распределению напряжения в них