

26. Rusinek, A., Rodriguez-Martinez, J.A. and Arias, A. (2010), "A thermo-viscoplastic constitutive model for FCC metals with application to OFHC copper", *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, pp. 120-135.
27. Vecchio, K.S. (1994), "High-strain, high-strain-rate deformation of tantalum and tantalum-tungsten alloys", *J. Phys. IV France*, 4, pp. C8301-C8306.
28. Voyiadjis, G.Z. and Abed, F.H. (2005), "Microstructural based models for BCC and FCC metals with temperature and strain rate dependency", *Mech. Mater.*, 37, pp. 355-378.
29. Zener, C. and Hollomon, J.H. (1944), "Effect of strain rate upon plastic flow of steel", *J. Appl. Phys.*, 15, pp. 22-32.
30. Zerilli, F.J. and Armstrong, R.W. (1987), "Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations", *J. Appl Phys.*, 61, pp. 1816-1825.

УДК 393.3

ДВОВІСНИЙ ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З НАСКРІЗНОЮ ПРЯМОЛІНІЙНОЮ КОНТАКТУЮЧОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН У ЇЇ ВЕРШИНАХ ТА ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., професор, Николишин М. М. д. ф.-м. н., професор,
Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Альфавіцька С. О.

*Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

Сформульовано і розв'язано задачу про двовісний згин розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини з тріщиною. Припускається, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщини будуть контактувати по області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини, а у її вершинах утворюються пластичні зони з урахуванням зміцнення матеріалу за лінійним розподілом напруження у них та виконанням умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра. За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подамо у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі та задачі згину (класична теорія). Із використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин розв'язування задачі зведено до задачі лінійного спряження, на основі яких отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій необмежених у вершинах пластичних зон. Числово визначено довжину пластичної зони у вершині тріщини.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, зміцнення, пластичні зони.

ДВУХОСНИЙ ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СКВОЗНОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНТАКТИРУЮЩЕЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧНЫХ ЗОН В ЕЕ ВЕРШИНАХ И УПРОЧНЕНИЕ МАТЕРИАЛА

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., профессор, Николишин М. М. д. ф.-м. н., профессор,
Слободян М. С., к. ф.-м. н., доцент, Альфавицкая С. О.

*Львовский национальный университет им. Ивана Франка,
ул. Университетская, 1, г. Львов, 79000, Украина*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

Сформулирована и решена задача о двухосном изгибе распределенными изгибающими моментами на бесконечности изотропной пластины с трещиной. Предполагается, что под воздействием внешней нагрузки берега трещины контактируют по области постоянной ширины вблизи оснований пластины, а в ее вершинах образуются пластические зоны с учетом упрочнения материала по линейному распределению напряжения в них

и выполнением условий пластичности Треска в виде поверхностного слоя или пластического шарнира. С учетом контакта берегов трещины решение задачи представлено в виде суперпозиции двух задач: плоской задачи и задачу изгиба (классическая теория). С использованием методов теории функций комплексной переменной и комплексных потенциалов плоской задачи и классической теории изгиба пластин решения задачи сведено к задачам линейного сопряжения, получено их аналитическое решение задачи в классе функций, неограниченных в вершинах пластических зон. Численно определена длина пластической зоны в вершине трещины.

Ключевые слова: трещина, изгиб, изотропная пластинка, комплексные потенциалы, упрочнение, пластические зоны.

BIAxIAL BENDING ISOTROPIC PLATE WITH THROUGH A LINEAR CONTACTING CRACK IN THE PRESENCE OF THE PLASTIC ZONES IN THE VERTICES AND STRENGTHENING OF MATERIAL

Opanasovich V. K., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,

Nykolyshyn M. M., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,

Slobodyan M. S., Ph. D. in Physics and Maths, Associate Professor, Alfavitska S. O.

*Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine*

kafmech@franko.lviv.ua, alfavitska_solomiya@i.ua, slob@yandex.ru

A problem is formulated and untied about a biaxial bend by the up-diffused bend moments on endlessness of isotropic plate with a crack. It is assumed that under the action of the external loading the banks of crack will contact for the areas of permanent width near-by one of bases of plate, and in its tops plastic areas will appear taking into account strengthening of material at the linear distributing of tensions for them and by implementation of terms of plasticity of Tresca as a superficial layer or plastic a hinge. Due to the contact of banks of crack of upshots of task will give as superpozicii of two tasks: flat task and task of bend (classic theory). With the use of methods of theory of functions of complex variable and complex potentials of flat task and classic theory of bend of plates of untiing of task it is erected to the task of linear interface, on the basis of which the analytical decision of task is got in the class of functions of unlimited in tops plastic areas. Numerical certainly length of plastic areas.

Key words: crack, bending, isotropic plate, complex potentials, strengthening, plastic zone.

ВСТУП

Елементи конструкцій у вигляді пластин дуже широко використовуються в різних галузях техніки та промисловості за дії різного зовнішнього навантаження, а в процесі їх експлуатації чи виготовлення можуть виникати тріщиноподібні дефекти, що призводить до зниження міцнісних і надійнісних характеристик конструкцій.

Дослідженням згину та розтягу пластин з тріщинами без урахування контакту їх берегів займалось багато дослідників, що відображено в монографіях [1-3] та ін. Задачу про згин нескінченної ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною із урахуванням контакту її берегів по лінії вперше розв'язав І.П. Шацький [6, 7], а дещо пізніше М.Д. Young, С.Т. Sun [8] отримали аналогічні результати. У працях Slepryan L.L., Dempsey J.P., Shektnan I.I. [9, 10], Опанасовича В.К. [11] враховано контакт берегів тріщин по області постійної ширини при згині пластини. Контакт берегів тріщини із урахуванням уточненої теорії згину пластини розглянуто в праці Опанасовича В.К., Яцика І.М., Сулима Г.Т. [12]. Задачі згину пластини (класична теорія) з тріщинами, береги яких гладко контактують по області постійної ширини, та отвором або жорсткою шайбою, розв'язані в працях Опанасовича В.К., Звізла І.С., Слободяна М.С., Бедрія В. Я. [13, 14]. У [15, 16] отримано розв'язки задач згину та розтягу пластин з тріщинами, у вершинах яких утворилися пластичні зони без урахування зміцнення матеріалу.

У роботі з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластини досліджена задача двовісного згину ізотропної пластини розподіленими згинальними моментами на нескінченності з наскрізною тріщиною, береги якої приходять у гладкий контакт по області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини, а у вершинах тріщини наявні пластичні зони, з урахуванням зміцнення матеріалу та виконання умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи

пластичного шарніра [19]. Отримано рівняння для визначення довжини пластичних зон та проведено їх числовий аналіз при різних параметрах задачі.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$ з прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, яка знаходиться в умовах двовісного згину розподіленими моментами на нескінченності, вектори яких паралельні і перпендикулярні до берегів тріщини. Виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{z}$ у серединній площині з початком у центрі тріщини, направивши вісь Ox по тріщині, а вісь $O\tilde{z}$ – перпендикулярно до серединної площини. Під дією зовнішнього навантаження береги тріщини приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 поблизу верхньої основи пластини, а у вершинах тріщини наявні зміцнені пластичні зони завдовжки b . Довжину тріщини з пластичними зонами позначимо через $2d$, лінію, де розміщена тріщина, – через L , а пластичні зони – L_1 (див. рис. 1).

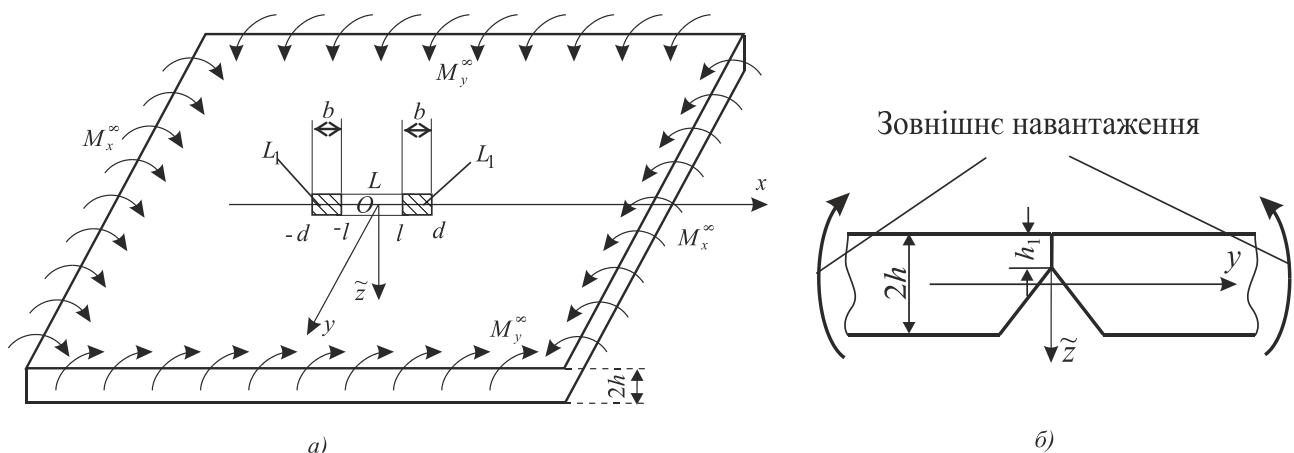


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

За рахунок контакту берегів тріщини сформульовану задачу розбиваємо на дві: плоску задачу та задачу згину (класична теорія згину пластин) за таких крайових умов:

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0 \sigma^*(x), \quad M_y^{\pm} = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = -N/(2h), \quad M_y^{\pm} = \beta h N, \quad [v] + \alpha h [\partial_y w] = 0, \quad x \in L, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad P_y^{\pm} = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (3)$$

$$\sigma^*(x) = m^* + (1 - m^*) (|x| - l) / (d - l), \quad m^* = \sigma_0 / \sigma_Y,$$

де σ_{yy} і σ_{xy} та u і v – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення по осях Ox і Oy у плоскій задачі; σ_0 і M_0 – невідомі нормальні напруження в плоскій задачі та згинальний момент у пластичній зоні, для яких виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра [19]; N – контактне зусилля ($N > 0$); w – прогин пластини; M_y і P_y – згинальний момент та перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа; σ_0 і σ_Y – границя міцності та границя текучості матеріалу; $[f] = f^+ - f^-$, де значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$, константи α і β мають вигляд [11]:

$$\alpha = 0,5 \{1 + (1 - \gamma^2)\}, \quad \beta = 1 - \gamma/3, \quad \gamma = h_1/h. \quad (4)$$

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ

Для визначення напружено-деформованого стану пластини введемо комплексні потенціали плоскої задачі $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ та класичної теорії згину пластини $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$, [17, 18]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi'(z), \quad (6)$$

$$\partial_x g = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi_3'(z), \quad (7)$$

$$f = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}, \quad (8)$$

де $\mu = 0,5E/(1+\nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини:

$$g = \partial_x w + i\partial_y w, \quad f(x) = \left(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right) / m, \quad (9)$$

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \kappa = (3-\nu)/(1+\nu), \quad \tilde{\kappa} = (3+\nu)/(1-\nu), \quad m = -D(1-\nu), \quad \partial_\alpha f = \partial f / \partial \alpha,$$

c' – невідома дійсна стала, $D = 2Eh^3/3((1-\nu^2))$ – циліндрична жорсткість пластини.

Комплексні потенціали при великих $|z|$ можна подати у вигляді [17, 18]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= O(1/z^2), \quad \Omega(z) = O(1/z^2), \\ \Phi_3(z) &= \tilde{\Gamma} + O(1/z^2), \quad \Omega_3(z) = -\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}' + O(1/z^2), \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \tilde{\Gamma}' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2m},$$

M_x^∞ і M_y^∞ – розподілені згинальні моменти на нескінченності.

З крайових умов (1)-(3), можемо записати

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ \left(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right)^+ - \left(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon \right)^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо врахувати (5) і (8), то крайові умови (11) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\ (\tilde{\kappa}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^+ - (\tilde{\kappa}\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Урахувавши (10) та розв'язавши задачі лінійного спряження (12), одержимо

$$\Omega(z) = \Phi(z), \quad \Omega_3(z) = \tilde{\kappa}\Phi_3(z) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'. \quad (13)$$

Із крайових умов (2) і (3), врахувавши (5), (8), (9) та залежності (13), матимемо

$$\begin{aligned}
 N &= -2h(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)), \quad x \in L, \\
 M_y &= -ic' + m\{\tilde{\kappa}(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\}, \quad x \in L.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Якщо ввести функцію

$$F(z) = -2\beta h^2 \Phi(z) - m\tilde{\kappa} \Phi_3(z) + 0,5\{ic' + m((\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}')\}, \tag{15}$$

то з другої крайової умови (2) отримаємо

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad x \in L. \tag{16}$$

Беручи до уваги крайові умови (1) та співвідношення (13), на основі (5) і (8) одержимо

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \sigma_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \tag{17}$$

$$-ic' + m\{\tilde{\kappa}(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\} = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1. \tag{18}$$

Виходячи з (17) і (18), отримаємо, що функція $F(z)$ (15) задовольняє умові

$$F^+(x) + F^-(x) = c \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \tag{19}$$

де

$$c = -2h^2 \beta \sigma_0 - M_0. \tag{20}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (16) і (19), матимемо

$$F(z) = \frac{d_1 z + d_0}{X_1(z)} + \frac{1}{X_1(z)} \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{X_1^+(t) \sigma^*(t) dt}{t - z}, \tag{21}$$

де d_0, d_1 – невідомі сталі,

$$X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}. \tag{22}$$

Врахувавши (10) та поведінку функції $F(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ (16), на основі (21) можемо записати

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 0,5(ic' - M_y^\infty). \tag{23}$$

З крайових умов (3), беручи до уваги (5), (8), (9), (13), одержимо

$$\begin{aligned}
 (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^+ + (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^- &= 0, \quad x \in L + L_1, \\
 (\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x) + c_1)^+ + (\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x) + c_1)^- &= 0, \quad x \in L + L_1,
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

де

$$c_1 = -ic' / (m\tilde{\kappa}).$$

Розв'язавши задачі лінійного спряження (24) та врахувавши поведінку функції $\Phi(z)$ і $\Phi_3(z)$ на нескінченності (10), матимемо

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z), \quad \bar{\Phi}_3(z) = \Phi_3(z) - c_1 z / X_1(z) + c_1. \tag{25}$$

Із третьої крайової умови (2), врахувавши (6), (7) і (13), одержимо

$$(\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^+ - (\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^- = 0, \quad x \in L, \quad (26)$$

де

$$\delta = \frac{\kappa + 1}{\alpha\mu h(1 + \tilde{\kappa})}.$$

Беручи до уваги (14) і (15), отримаємо

$$(\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^+ + (\delta\Phi(x) + \Phi_3(x) + \bar{\Phi}_3(x))^- = G(x), \quad x \in L_1, \quad (27)$$

де

$$G(x) = \delta\sigma_0\sigma^*(x) + 2\{M_0\sigma^*(x)/m + (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\}/\tilde{\kappa}. \quad (28)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (26), (27) має вигляд:

$$\delta\Phi(z) + \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) = \frac{\tilde{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{G(t)dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} + \tilde{d}X_0(z), \quad (29)$$

де

$$\tilde{X}_0(z) = \sqrt{\frac{z^2 - l^2}{z^2 - d^2}}, \quad \tilde{d} = 2\tilde{\Gamma}.$$

Подамо функції $\sigma^*(x)$ та $G(x)$ у вигляді:

$$\sigma^*(x) = a|x| + b, \quad (30)$$

$$G(x) = B|x| + A, \quad (31)$$

$$a = \frac{1 - m^*}{d - l}, \quad b = m^* - \frac{(1 - m^*)l}{d - l}.$$

$$A = \delta\sigma_0 b + 2\{M_0 b/m + (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\}/\tilde{\kappa}, \quad (32)$$

$$B = a[\delta\sigma_0 + 2M_0(m\tilde{\kappa})^{-1}].$$

Врахувавши (31), (32), співвідношення (29) перепишемо у вигляді:

$$\delta\Phi(z) + \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) = \tilde{X}_0(z)\rho_1(z) + \frac{A}{2\pi i} \tilde{X}_0(z) \int_{L_1} \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)} + \tilde{d}X_0(z), \quad (33)$$

де

$$\rho_1(z) = \frac{B}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{|t|dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}.$$

Після обчислення інтегралів у (33) [17], можемо записати

$$\delta\Phi(z) + \Phi_3(z) + \bar{\Phi}_3(z) = \rho_1(z)\tilde{X}_0(z) + 0,5A + (\tilde{d} - 0,5A)\tilde{X}_0(z). \quad (34)$$

Беручи до уваги (25), (34) набуде вигляду

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) = 0,5A + c_1 z / X_1(z) - c_1 + (\tilde{d} - 0,5A + \rho_1(z))\tilde{X}_0(z). \quad (35)$$

Із (15) і (21) отримаємо

$$2\beta h^2 \Phi(z) + m\tilde{\kappa} \Phi_3(z) = d_1 + m\tilde{\kappa} \tilde{\Gamma} - \frac{d_1 z}{X_1(z)} - \frac{1}{X_1(z)} \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) X_1^+(t) dt}{t-z}. \quad (36)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (35) і (36) відносно $\Phi(z)$, $\Phi_3(z)$, матимемо

$$\Phi_3(z) = d_3 + f_3(z)/X_1(z), \quad \Phi(z) = d_5 + f_4(z)/X_1(z), \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(z) &= c_1 z + (\tilde{d} - 0,5A + \rho_1(z)) \sqrt{z^2 - l^2}, \quad f_2(z) = -d_1 z + \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t) X_1^+(t) dt}{t-z}, \\ f_3(z) &= (\delta f_2(z) - 2\beta h^2 f_1(z))/\Delta, \quad f_4(z) = (m\tilde{\kappa} f_1(z) - 2f_2(z))/\Delta, \\ d_3 &= (\delta B_2 - 2\beta h^2 B_1)/\Delta, \quad d_5 = (m\tilde{\kappa} B_1 - 2B_2)/\Delta, \\ \Delta &= m\tilde{\kappa} \delta - 4\beta h^2, \quad B_1 = 0,5A - c_1, \quad B_2 = d_1 + m\tilde{\kappa} \tilde{\Gamma}. \end{aligned} \quad (38)$$

Умова однозначності прогину пластини при обході тріщини з пластичними зонами має вигляд

$$\operatorname{Re} \int_K t \Phi_3(t) dt = 0, \quad (39)$$

де K – замкнутий контур, що охоплює тріщину з пластичними зонами.

Урахувавши (37) та застосувавши теорему про лишки при обчисленні інтеграла у (39), після відповідних перетворень одержимо, що $c' = 0$, а тому

$$c_1 = 0, \quad d_1 = -0,5M_y^\infty. \quad (40)$$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль k_1, k_2 і моментів K_1, K_2 визначимо за формулами [2]:

$$\begin{aligned} k_1 - ik_2 &= 4h\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow d} (\Phi(x) \sqrt{x-d}), \\ K_1 - iK_2 &= -2\sqrt{2}D(3+\nu) \lim_{x \rightarrow d} (\Phi_3(z) \sqrt{x-d}). \end{aligned} \quad (41)$$

Оскільки напружений стан в околі вершини пластичних зон має бути обмежений [21], то

$$k_i = 0, \quad K_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (42)$$

Беручи до уваги вираз для функцій $\Phi(z)$ і $\Phi_3(z)$ (37), на основі (38) отримаємо

$$f_3(d) = 0, \quad f_4(d) = 0. \quad (43)$$

Урахувавши залежності для функцій $f_3(z)$ і $f_4(z)$ (38), з (43) одержимо

$$f_1(d) = 0, \quad f_2(d) = 0. \quad (44)$$

Звідки знаходимо

$$M_y^\infty = -\frac{2c}{\pi} \left(a\sqrt{d^2 - l^2} + b \arccos \frac{l}{d} \right), \quad (45)$$

$$M_0 = M_y^\infty / \left(b + \frac{2ad}{\pi} E(q) \right) + \frac{\tilde{\gamma} h^2}{6} \sigma_0, \quad (46)$$

де

$$E(q) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad \tilde{\gamma} = \frac{4(3+\nu)}{\alpha(1+\nu)}, \quad q = \frac{\sqrt{d^2 - l^2}}{d}.$$

Для знаходження σ_0 і M_0 скористаємося спочатку умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [19] на нижній основі пластини

$$\sigma_0 + 3M_0 / (2h^2) = \sigma_Y. \quad (47)$$

Розв'язавши систему рівнянь (46) і (47) відносно σ_0 і M_0 , матимемо

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_Y} = \frac{4(\pi b + 2\tilde{a}E(q) - \pi\tilde{\sigma})}{(\pi b + 2\tilde{a}E(q))(4 + \tilde{\gamma})}, \quad \tilde{M}_0 = \frac{3M_0}{2h^2\sigma_Y} = \frac{\tilde{\gamma}}{4 + \tilde{\gamma}} + \frac{4}{4 + \tilde{\gamma}} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)}, \quad (48)$$

де

$$\tilde{\sigma} = \frac{3M_y^\infty}{2h^2\sigma_Y}, \quad \tilde{a} = \frac{1 - m^*}{1 - \tilde{l}}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{d}.$$

Підставивши вирази σ_0 і M_0 (48) у (45), одержимо рівняння для визначення довжини пластичної зони \tilde{l}

$$\tilde{\sigma} - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{4}{4 + \tilde{\gamma}} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} (1 - 3\beta) + (1 + 3\beta) \right\} \left(\tilde{a}\sqrt{1 - \tilde{l}^2} + b \arccos \tilde{l} \right) = 0.$$

Якщо скористатися умовою пластичного шарніру [19, 20]

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_Y} \right)^2 + \frac{M_0}{h^2\sigma_Y} = 1, \quad (49)$$

то

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12}, \quad \tilde{M}_0 = \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12} \frac{\tilde{\gamma}}{4}, \quad (50)$$

$$\rho(\tilde{d}) = 1 - \frac{2}{3} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)}, \quad q = \sqrt{\frac{1}{\tilde{l}^2} - 1}.$$

Для знаходження \tilde{l} в цьому випадку будемо мати рівняння

$$\tilde{\sigma} - \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12} \right) \left(3\beta + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \right) + \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} \right\} \left(\tilde{a}\sqrt{1 - \tilde{l}^2} + b \arccos \tilde{l} \right) = 0.$$

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТА ВИСНОВКИ

Проведений числовий аналіз задачі для $\nu = 0,3$, який поданий на рис. 2, де суцільні лінії отримані з використанням умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, а штрихові – з використанням умови пластичного шарніру.

На рис. 2 подано графічні залежності зведеної довжини пластичної зони \tilde{b} при різних параметрах задачі. Рис. 2 а) та рис. 2 б) побудовані при $m^* = 1,5$, а рис. 2 в) – при $\gamma = 0,13$. На рис. 2 а) наведено графічні залежності \tilde{b} від $\tilde{\sigma}$ кривій 1 відповідає $\gamma = 0$ (контакт берегів тріщини по лінії), кривій 2 – $\gamma = 0,13$, криві 3 – $\gamma = 0,2$. На рис. 2 б) подана залежність \tilde{b} від параметра γ , кривій 1 відповідає $\tilde{\sigma} = 0,3$, кривій 2 – $\tilde{\sigma} = 0,5$, кривій 3 – $\tilde{\sigma} = 0,7$. На рис. 2 в) наведено графічні залежності \tilde{b} від m^* , кривій 1 відповідає $\tilde{\sigma} = 0,3$, кривій 2 – $\tilde{\sigma} = 0,6$, кривій 3 – $\tilde{\sigma} = 0,8$.

З рис 2 а) можна зробити висновок, що із зростанням відносного зовнішнього навантаження $\tilde{\sigma}$ довжина пластичної зони \tilde{b} у вершинах тріщини зростає. Як видно з рис. 2 б), із зростанням відносної висоти контакту берегів тріщини γ довжина пластичної зони \tilde{b} збільшується, а з рис. 2 в) бачимо, що із збільшенням m^* величина \tilde{b} зменшується. Числовий аналіз показав, що довжина пластичної зони при використанні умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару є більшою, ніж при використанні умови пластичності у вигляді пластичного шарніра.

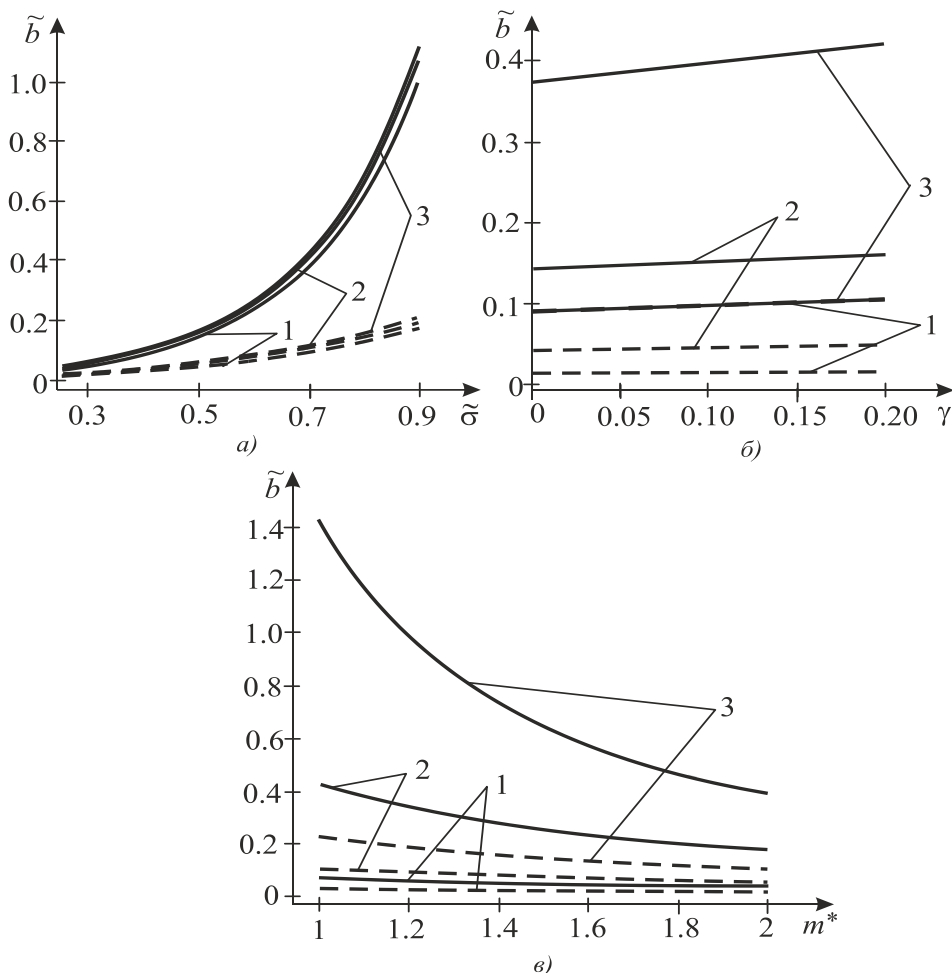


Рис. 2. Графічні залежності зведеної довжини пластичної зони \tilde{b} при різних параметрах задачі

ЛІТЕРАТУРА

1. Бережницький Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявський, В.В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Саврук М. П. Двухмерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1988. – 324 с.

3. Мазурак Л. П. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин / Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницкий. – К. : Наукова думка, 1990. – 256 с.
4. Heming F. S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate / F. S. Jr. Heming // International Journal of Fracture. – 1980. – **16**, №4. – P. 289-304.
5. Hui C. Y. A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments / C.Y. Hui, T. Zehnder Alan // International Journal of Fracture. – 1993. – **61**. – P. 211-229.
6. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – №7. – С. 49-51.
7. Шацький І. П. Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині / І.П. Шацький // Доповіді НАН України. – 1995. – №10. – С. 62-64.
8. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.
9. Slepian L. L. Asymptotic solution for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.L. Slepian, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // International Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – **43**. – P. 1727-1749.
10. Dempsey J. P. Closure of a through crack in a plate under bending / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.L. Slepian // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – **35**. – P. 4077-4089.
11. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету : міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). – 2007. – Вип. 20(2). – С. 123-127.
12. Опанасович В. К. Згин зосередженими моментами пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В.К. Опанасович, І.М. Яцик, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, №4. – С. 71-81.
13. Опанасович В. К. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з круговою шайбою та довільно розташованою тріщиною всередині шайби з урахуванням контакту її берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, М.С. Слободян // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 240-246.
14. Опанасович В. Згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян, В. Бедрій // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 222-230.
15. Знаходження довжини пластичних зон біля вершини наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини / М.М. Николишин, В.К. Опанасович, Л.Р. Куротчин, М.С. Слободян // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2013. – Вип. 21. – С. 192-200.
16. Опанасович В. Згин ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів за наявності пластичних зон у її вершинах / В. Опанасович, М. Слободян // Механіка руйнування матеріалів та міцності конструкцій : зб. наук. праць 5-ї Міжнар. конф. – С. 403-408.
17. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили – М. : Наука, 1966. – 707 с.

18. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов. – Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
19. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук. – Львів : СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
20. Кир'ян В. І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / В.І. Кир'ян, В.А. Осадчук, М.М. Николишин. – Львів : СПОЛОМ, 2007. – 320 с.
21. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1968. – 248 с.

REFERENCES

1. Bereznyts'kyu, L.T., Delyavs'kyu, M.V. and Panasyuk, V.V. (1979), *Izhib tonkikh plastin s defektami tipa treshchin* [Bending of thin plates with defects type of cracks], Naukova Dumka, Kiev.
2. Savruk, M.P. (1988), "The two-dimensional problem of elasticity for bodies with cracks", *Naukova dumka*, Kyiv.
3. Mazurak, L.P. and Bereznytskyu, L.T. (1990), "Bending transversely isotropic plates with defects such as cracks", *Naukova dumka*, Kyiv.
4. Heming, F.S.Jr. (1980), "Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate", *International Journal of Fracture*, **16**, no. 4, pp. 289-304.
5. Hui, C.Y., and Zehnder Alan, T. (1993), "A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments", *International Journal of Fracture*, **61**, pp. 211-229.
6. Shatskiy, I.P. (1988), "Plate bending, weakened cut with contacting shores", *Dopovidi AN URSS, Seria A, Fiziko-matematichni ta tehnicni nauki*, no. 7, pp. 49-51.
7. Shats'kyu, I.P. (1995), "Limit equilibrium plate with collinear cracks in the combined bending and stretching", *Dopovidi NAN Ukrayiny*, no. 10, pp. 62-64.
8. Young, M. and Sun, C. (1992), "Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates", *International Journal of Fracture*, vol. 55, pp. 81-93.
9. Slepyan, L.L., Dempsey, J.P. and Shektman, I.I. (1995), "Asymptotic solution for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending", *International Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **43**, pp. 1727-1749.
10. Dempsey, J.P., Shektman, I.I. and Slepyan, L.L. (1998), "Closure of a through crack in a plate under bending", *International Journal of Solids and Structures*, **35**, pp. 4077-4089.
11. Opanasovych, V.K. (2007), "Bending the plate with a through crack linear considering width of its contact surfaces", *Naukovi notatki Lutskogo tehnicnogo universitetu*, issue 20(2), pp. 123-127.
12. Opanasovych, V.K., Yatsyk, I.M. and Sulym, H.T. (2012), "Bending of Reissner's plate containing a through-the-thickness crack by concentrated moments taking into account the width of a contact zone of its faces", *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*, **187**, no. 5, pp. 620-634.
13. Opanasovych, V.K., Zvizlo, I.S. and Slobodyan, M.S. (2012), "Bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and an arbitrarily located crack inside the washer with taking into account contact it's shores", *Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky ta mitsnosti konstruktsiy*, issue 19, pp. 240-246.

14. Opanasovych, V., Slobodyan, M. and Bedriy, B. (2012), "Bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with the width of the contact area of the shores", *Visnyk Lvivskogo Universitetu, Seria Mehaniko-Matematichna*, issue 76, pp. 222-230.
15. Nykolyshyn, M.M., Opanasovych, V.K., Kurotchyn, L.R. and Slobodyan, M.S. (2013), "Finding the length of plastic zones near the top of through cracks on a straight-line interface materials at stretching piecewise homogeneous isotropic plate", *Problemy obchyslyval'noyi mekhaniky i mitsnosti konstruktsiy*, issue 21, pp. 192-200.
16. Opanasovych, V. and Slobodyan, M. (2014), "Bending isotropic plate with a through crack straightforward considering the width of the contact area of the coast in the presence of plastic zones at its top", *Zbirnyk naukovykh prats' 5-oyi Mizhnarodnoyi konferentsiyi "Mekhanika ruynuvannya materialiv ta mitsnosti konstruktsiy"*, pp. 403-408.
17. Muskhelyshvily, N.Y. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moscow.
18. Prusov, Y.A. (1975), *Metod sopryazheniya v teorii plit* [The method of conjugation in the theory of plates], Izdatelstvo Beloruskogo universitetu, Minsk.
19. Kushnir, R.M., Nykolyshyn, M.M. and Osadchuk, V.A. (2003), *Pruzhnyi ta pruzhno-plastychnyi granychnyi stan obolonok z defektamy* [Elastic and elastic-plastic boundary state membranes with defects], SPOLOM, Lviv.
20. Kyr"yan, V.I., Osadchuk, V.A. and Nykolyshyn, M.M. (2007), *Mekhanika ruynuvannya zvarnykh z'ednan' metalokonstruktsiy* [Fracture mechanics of welded joints of metal], SPOLOM, Lviv.
21. Panasyuk, V.V. (1968), *Predel'noe ravnovesiye khrupkykh tel s treshchinami* [Limit equilibrium fragile bodies with cracks], Naukova dumka, Kyiv.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Проценко В. С., д. ф.-м. н., профессор, украинец Н. А., ст. преподаватель
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, 61070, Украина
nattalja2004@mail.ru

С помощью обобщенного метода Фурье решена первая основная задача теории упругости для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью, расположенной параллельно его границе. Этот метод основан на теоремах сложения базисных решений однородного уравнения Ламе для полупространства и цилиндра. Общее решение задачи представляется в виде суперпозиции базисных решений для полупространства и цилиндра. Применение теорем сложения позволяют записать решение задачи в декартовой и цилиндрической системе координат и удовлетворить граничному условию на соответствующей поверхности. Так задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Оператор этой системы является вполне непрерывным в пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей. Это позволяет решить систему методом редукции. Численные расчеты показали его быструю сходимость.
Ключевые слова: обобщенный метод Фурье, упругое полупространство, цилиндрическая полость, базисные решения уравнения Ламе, теоремы сложения, метод редукции