14. Opanasovych, V., Slobodyan, M. and Bedriy, B. (2012), "Bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with the width of the contact area of the shores", *Visnyk Lvivskogo Universitetu, Seria Mehaniko-Matematichna*, issue 76, pp. 222-230.
15. Nykolyshyn, M.M., Opanasovych, V.K., Kurotchyn, L.R. and Slobodyan, M.S. (2013), "Finding the length of plastic zones near the top of through cracks on a straight-line interface materials at stretching piecewise homogeneous isotropic plate", *Problemy obchyslyuval'noyi mekhaniky i mitsnosti konstruktsiy*, issue 21, pp. 192-200.
16. Opanasovych, V. and Slobodyan, M. (2014), "Bending isotropic plate with a through crack straightforward considering the width of the contact area of the coast in the presence of plastic zones at its top", *Zbirnyk naukovykh prats' 5-oyi Mizhnarodnoyi konferentsiyi "Mekhanika ruynuvannya materialiv ta mitsnosti konstruktsiy"*, pp. 403-408.
17. Muskhelyshvyly, N.Y. (1966), *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teoriy uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity], Nauka, Moskow.
18. Prusov, Y.A. (1975), *Metod sopryazheniya v teoriy plit* [The method of conjugation in the theory of plates], Izdatelstvo Beloruskogo universitetu, Minsk.
19. Kushnir, R.M., Nykolyshyn, M.M. and Osadchuk, V.A. (2003), *Pruzhnyi ta pruzhno-plastychnyi granychnyi stan obolonok z defektamy* [Elastic and elastic-plastic boundary state membranes with defects], SPOLOM, Lviv.
20. Kyr"yan, V.I., Osadchuk, V.A. and Nykolyshyn, M.M. (2007), *Mekhanika ruynuvannya zvarnykh z'ednan' metalokonstruktsiy* [Fracture mechanics of welded joints of metal], SPOLOM, Lviv.
21. Panasyuk, V.V. (1968), *Predel'noe ravnovesiye khrupkykh tel s treshchinami* [Limit equilibrium fragile bodies with cracks], Naukova dumka, Kyiv.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Проценко В. С., д. ф.-м. н., профессор, Украинец Н. А., ст. преподаватель

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», ул. Чкалова, 17, г. Харьков, 61070, Украина

nattalja2004@mail.ru

С помощью обобщенного метода Фурье решена первая основная задача теории упругости для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью, расположенной параллельно его границе. Этот метод основан на теоремах сложения базисных решений однородного уравнения Ламе для полупространства и цилиндра. Общее решение задачи представляется в виде суперпозиции базисных решений для полупространства и цилиндра. Применение теорем сложения позволяют записать решение задачи в декартовой и цилиндрической системе координат и удовлетворить граничному условию на соответствующей поверхности. Так задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Оператор этой системы является вполне непрерывным в пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей. Это позволяет решить систему методом редукции. Численные расчеты показали его быструю сходимость.

Ключевые слова: обобщенный метод Фурье, упругое полупространство, цилиндрическая полость, базисные решения уравнения Ламе, теоремы сложения, метод редукции

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ФУР'Є ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ПІВПРОСТОРІ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Проценко В. С., д. ф.-м. н., професор, Українець Н. А., ст. викладач

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», вул. Чкалова, 17, м. Харків, 61070, Україна

nattalja2004@mail.ru

За допомогою узагальненого методу Фур'є розв'язана перша основна задача теорії пружності для пружного півпростору з круговою циліндричною порожниною, яка розташована паралельно його границі. Цей метод заснований на теоремах додавання базисних розв'язків однорідного рівняння Ламе для півпростору і циліндра. Загальний розв'язок задачі представляється у вигляді суперпозиції базисних розв'язків для півпростору і циліндра. Застосування теорем додавання дозволяє записати розв'язок задачі у декартовій та циліндричній системі координат та задовольнити граничній умові на відповідній поверхні. Таким чином задача зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Оператор цієї системи є цілком неперервним у просторі l_2 за умови, що граничні поверхні не перетинаються. Це дозволяє розв'язати систему методом редукції. Чисельні розрахунки показали його швидку збіжність.

Ключові слова: узагальнений метод Фур'є, пружній півпростір, циліндрична порожнина, базисні розв'язки рівняння Ламе, теореми додавання, метод редукції

APPLICATION OF THE GENERALIZED FOURIER METHOD TO SOLVE THE FIRST BASIC PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR THE SEMISPACE WITH THE CYLINDRICAL CAVITY

Protsenko V. S., D.Sc. in Physics and Maths, professor, Ukrainets N. A.

National Aerospace University named after N.Ye. Zhukovskyi «Kharkiv Aviation Institute», Chkalova str., 17, Kharkiv, 61070, Ukraine

nattalja2004@mail.ru

The first basic problem of elasticity theory for the elastic semispace with the circular cylindrical cavity solved by means of the generalized Fourier method. Cylindrical cavity is parallel to the boundary of the semispace. The generalized Fourier method is based on addition theorems of the basis solutions of the homogeneous Lame equations for the semispace and the cylinder. The proof of these theorems based on formulas which connect harmonic functions in Cartesian and cylindrical coordinate systems. The general solution of this problem represented as a superposition of basic solutions for the semispace and the cylinder. The use of the addition theorems allow to write the solution in Cartesian and cylindrical coordinate system and satisfy the boundary condition on the surface. Thus the problem reduced to an infinite system of linear algebraic equations. The operator of this system is quite continuous in l_2 in case boundary surfaces are not intersect. The system solved by means of the reduction method. Numerical calculations showed its fast convergence. The generalized Fourier method allowed to determine the displacements and stresses in this area for the concrete parameter values and the boundary stresses.

Key words: generalized Fourier method, elastic semispace, cylindrical cavity, the basic solutions of the Lame equation, addition theorems, reduction method

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и строительстве подземных туннелей, горных выработок, шахт и других подобных объектов возникает необходимость в методиках расчета их прочности и надежности. Так как в большинстве случаев такие объекты располагаются на относительно небольшой глубине, то влияние на них окружающей среды зависит от их удаленности или близости к земной поверхности. В качестве их физической модели можно рассмотреть бесконечно длинный полый цилиндр, находящийся в однородном и изотропном упругом полупространстве и расположенный параллельно его границе. Описанную таким образом область можно считать упругим многосвязным телом, для него решать основные задачи теории упругости и определять НДС, в частности, вблизи поверхности цилиндра.

Встречающиеся в литературе исследования проводились для упругого полупространства, имеющего полости конечных размеров (эллипсоидальную, сферическую, сферический разрез и щель). Для полупространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью были рассмотрены основные задачи теории потенциала [1, с.42; 2, с.189]. В работах [3, с.52; 4, с.102; 5, с.17] решены вторая основная и смешанная задачи теории упругости для упругого полупространства с такой же полостью и проведено исследование НДС в указанном многосвязном теле.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругое полупространство, заполненное однородной изотропной средой, содержащее бесконечную круговую цилиндрическую полость, расположенную параллельно его границе. Обозначим эту пространственную область через Ω. Введем две одинаково ориентированные системы координат с совмещенными центрами: декартову $\{x, y, z\}$, ось Oy которой перпендикулярна границе полупространства, и цилиндрическую $\{\rho, \varphi, z\}$, ось Oz которой расположена вдоль оси цилиндра. Введем следующие обозначения: a – радиус цилиндра, h – расстояние от оси цилиндра до границы полупространства, S_1 – плоскость $y = h$, S_2 – цилиндрическая поверхность $\rho = a$. Тогда область Ω можно описать неравенствами: $\{y < h, \rho > a, h > a\}$.

Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для области Ω. Будем искать решение однородного уравнения Ламе

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla div\vec{u} = 0 \tag{1}$$

в области Ω, удовлетворяющее на поверхностях S_1 и S_2 граничным условиям:

$$F\vec{u}\big|_{S_1} = F\vec{u}_{01}(x, z), \tag{2}$$

$$F\vec{u}\big|_{S_2} = F\vec{u}_{02}(\varphi, z). \tag{3}$$

В формулах (1)-(3) $\vec{u}$ и $F\vec{u}$ – векторы упругих перемещений и напряжений соответственно, σ – коэффициент Пуассона. Предположим, что заданные функции $F\vec{u}_{01}(x, z)$ и $F\vec{u}_{02}(\varphi, z)$ представимы в виде абсолютно сходящихся рядов и интегралов:

$$F\vec{u}_{01}(x, z) = \sum_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_j(\lambda, \mu) e^{i\lambda z + i\mu x} d\lambda d\mu \vec{e}_j^{(1)}, \tag{4}$$

$$F\vec{u}_{02}(\varphi, z) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_j^m(\lambda) e^{i\lambda z + im\varphi} d\lambda \vec{e}_j. \tag{5}$$

Здесь $\vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ выражаются формулами:

$$\vec{e}_1 = \left(\vec{e}_1^{(2)} + i\vec{e}_2^{(2)}\right)\frac{e^{i\varphi}}{2}, \quad \vec{e}_2 = \left(\vec{e}_1^{(2)} - i\vec{e}_2^{(2)}\right)\frac{e^{-i\varphi}}{2}, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_3^{(2)}, \tag{6}$$

где $\vec{e}_j^{(k)}$ – орты декартовой $(k = 1)$ и цилиндрической $(k = 2)$ систем координат. При этом будем считать, что функции $C_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, 3)$, ограничены, а ряд $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} A_j^m(\lambda)$ абсолютно сходится при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи (1)-(3) применим обобщенный метод Фурье [6, с.50; 7, с.83]. Он основан на использовании теорем сложения (формул переразложения) базисных решений уравнения

Ламе для полупространства и цилиндра, записанных соответственно в декартовой и цилиндрической системах координат. Этот метод позволяет удовлетворить граничным условиям и получить решения рассматриваемых задач с наперед заданной точностью.

Для каждой из граничных поверхностей S_1 и S_2 области Ω построим систему базисных решений уравнения (1). Внешние (внутренние) базисные решения для полупространства $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\left(\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)\right)$, регулярные в области $\{y>h\}(\{y<h\})$, и внутренние (внешние) базисные решения для цилиндра $\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)\left(\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)\right)$, регулярные в области $\{\rho<a\}(\{\rho>a\})$, имеют вид [4, с.102]:

$$\vec{u}_1^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)=N_1^{(1)}u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu),$$

$$\vec{u}_2^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)=\frac{4}{\lambda}(\sigma-1)u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu)\vec{e}_2^{(1)}+\frac{1}{\lambda}\nabla\left(yu^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu)\right),$$

$$\vec{u}_3^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)=N_3^{(1)}u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu);$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)=N_k^{(2)}r_m(\rho,\varphi,z;\lambda)\quad(k=1,2,3;\ m=0,\pm1,\pm2,...),$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)=N_k^{(2)}s_m(\rho,\varphi,z;\lambda)\quad(k=1,2,3;\ m=0,\pm1,\pm2,...);$$

$$N_1^{(j)}=\frac{1}{\lambda}\nabla,\quad N_3^{(j)}=\frac{i}{\lambda}rot\left(\vec{e}_3^{(j)}\cdot\right)\quad(j=1,2);$$

$$N_2^{(2)}=\frac{1}{\lambda}\left[\nabla\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+4(\sigma-1)\left(\nabla-\vec{e}_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right].$$

Входящие в эти решения функции $u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu)$, $r_m(\rho,\varphi,z;\lambda)$, $s_m(\rho,\varphi,z;\lambda)$ являются декартовыми и цилиндрическими базисными решениями уравнения Лапласа:

$$u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu)=e^{i(\mu x+\lambda z)\pm\gamma y},$$

$$r_m(\rho,\varphi,z;\lambda)=e^{i(m\varphi+\lambda z)}I_m(\lambda\rho),$$

$$s_m(\rho,\varphi,z;\lambda)=(sign\lambda)^m e^{i(m\varphi+\lambda z)}K_m(|\lambda|\rho),$$

где $\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $-\infty<\lambda,\ \mu<\infty$.

С помощью соотношения [8, с.127]

$$F\vec{u}=2G\left[\vec{n}div\vec{u}\frac{\sigma}{1-2\sigma}+(\vec{n},grad)\vec{u}+\frac{1}{2}[\vec{n},rot\vec{u}]\right],$$

где G – модуль сдвига, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к рассматриваемой поверхности, получены формулы для напряжений, действующих на поверхности S_1 с нормалью $\vec{n}_1^{(\pm)}=\pm\vec{e}_y$:

$$F\vec{u}_1^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)=2G\left(\pm\frac{i\mu\gamma}{\lambda}\vec{e}_x+\frac{\gamma^2}{\lambda}\vec{e}_y\pm i\gamma\vec{e}_z\right)u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu),$$

$$F\vec{u}_2^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)=2G\left(\frac{i\mu}{\lambda}(2\sigma-1\pm\gamma y)\vec{e}_x\pm\frac{\gamma}{\lambda}(2\sigma-2\pm\gamma y)\vec{e}_y\pm i(2\sigma-1\pm\gamma y)\vec{e}_z\right)u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu),$$

$$F\vec{u}_3^{(\pm)}(x,y,z;\lambda,\mu)=2G\left(i\left(\frac{\gamma^2}{\lambda}-\frac{\lambda}{2}\right)\vec{e}_x\pm\frac{\mu\gamma}{\lambda}\vec{e}_y\pm\frac{i\mu}{2}\vec{e}_z\right)u^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu)$$

и для напряжений, действующих на поверхности S_2 с нормалью $\vec{n}_2^{(+)}=-\vec{e}_\rho$:

$$F\vec{S}_{1,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)=2G\lambda\left(-\frac{\partial s_{m-1}(\rho,\varphi,z;\lambda)}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_1-\frac{\partial s_{m+1}(\rho,\varphi,z;\lambda)}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_2+i\frac{\partial s_m(\rho,\varphi,z;\lambda)}{\partial(|\lambda|\rho)}\vec{e}_3\right),$$

$$F\vec{S}_{2,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)=2G\lambda\left(-\left(|\lambda|\rho+\frac{(m-1)(m-1+2\sigma)}{|\lambda|\rho}+(2\sigma-3)\frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)}\right)s_{m-1}(\rho,\varphi,z;\lambda)\vec{e}_1-\right.$$

$$-\left(|\lambda|\rho+\frac{(m+1)(m+1-2\sigma)}{|\lambda|\rho}+(2\sigma-3)\frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)}\right)s_{m+1}(\rho,\varphi,z;\lambda)\vec{e}_2+$$

$$\left.+i\left(|\lambda|\rho+\frac{m^2}{|\lambda|\rho}+(2\sigma-2)\frac{\partial}{\partial(|\lambda|\rho)}\right)s_m(\rho,\varphi,z;\lambda)\vec{e}_3\right),$$

$$F\vec{S}_{3,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)=2G\lambda\left(\frac{m-1}{|\lambda|\rho}s_{m-1}(\rho,\varphi,z;\lambda)\vec{e}_1+\frac{m+1}{|\lambda|\rho}s_{m+1}(\rho,\varphi,z;\lambda)\vec{e}_2-i\frac{m}{2|\lambda|\rho}s_m(\rho,\varphi,z;\lambda)\vec{e}_3\right).$$

Здесь $\vec{e}_j$ $(j=1,2,3)$ заданы формулами (6).

При этом соотношения для напряжений $F\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$, действующих на поверхности S_2 с нормалью $\vec{n}_2^{(-)}=\vec{e}_\rho$, получаются из формул для $F\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$ с помощью замены $s_m(\rho,\varphi,z;\lambda)$ на $r_m(\rho,\varphi,z;\lambda)$, $s_{m\pm1}(\rho,\varphi,z;\lambda)$ на $-r_{m\pm1}(\rho,\varphi,z;\lambda)$.

Общее решение задачи запишем в виде суперпозиции внешних базисных решений для цилиндра $\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$ и внутренних базисных решений для полупространства $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$:

$$\vec{u}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B_{km}(\lambda)\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)d\lambda+\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_k(\lambda,\mu)\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)d\mu d\lambda, \quad (7)$$

где $B_{km}(\lambda)$ и $H_k(\lambda,\mu)$ – неизвестные интегральные плотности.

Для удовлетворения граничных условий используются теоремы сложения (формулы переразложения) введенных базисных решений для полупространства и цилиндра [3, с.53]. Доказательство теорем основано на применении соотношений, связывающих соответствующие гармонические функции в рассматриваемых системах координат [9, с.58, с.73]. С помощью теорем сложения общее решение задачи записывается в системе координат, связанной с заданной граничной поверхностью, и на соответствующей поверхности удовлетворяется граничное условие.

Перепишем первое слагаемое в выражении (7), учитывая формулы переразложения внешних базисных решений для цилиндра $\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$ через внешние базисные решения для полупространства $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$. Переходя в полученном соотношении к напряжениям и удовлетворяя на поверхности S_1 граничному условию (2), придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно функций $H_k(\lambda,\mu)$ $(k=1,2,3)$. Определитель этой системы

$$D_1(\lambda,\mu)=\frac{\gamma}{\lambda^2}(3-4\sigma)e^{3\gamma h}$$

при $\sigma\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right)$ отличен от нуля.

Запишем второе слагаемое в выражении (7) в цилиндрической системе координат с использованием формул переразложения внутренних базисных решений для полупространства $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ по внутренним базисным решениям для цилиндра $\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$. Переходя к напряжениям и удовлетворяя на поверхности S_2 граничному условию (3), получим систему уравнений относительно интегральных плотностей $B_{km}(\lambda)$ $(k=1,2,3,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Определитель этой системы $D_2^m(|\lambda|a,\sigma)$ при $\sigma\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right)$ является отличным от нуля и при $|m|\geq 2$ ограничен снизу:

$$\left|D_2^m(|\lambda|a,\sigma)\right|>C(\sigma)\left(m^2+\lambda^2a^2\right)K_{m-1}(|\lambda|a)K_m(|\lambda|a)K_{m+1}(|\lambda|a).$$

Выразив из первой полученной системы функции $H_k(\lambda,\mu)$ и подставив их во вторую, придем к совокупности трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно интегральных плотностей $B_{sm}(\lambda)$:

$$B_{jn}(\lambda)=\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}G_{sj}^{mn}(\lambda)B_{sm}(\lambda)+Q_j^n(\lambda),\tag{8}$$

где $j=1,2,3$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

В операторной форме эти системы запишем в виде:

$$\left(I+\tilde{G}\right)\vec{b}=\vec{q}\,.$$

Здесь I – единичный оператор, $\tilde{G}$ – оператор системы, $\vec{b}$ и $\vec{q}$ – вектор-столбцы неизвестных $B_{sm}(\lambda)$ и правых частей системы $Q_j^n(\lambda)$ соответственно.

Теорема *Оператор системы $\tilde{G}$ является вполне непрерывным оператором в пространстве l_2 при условии $a<h$ непересечения граничных поверхностей S_1 и S_2 области Ω.*

Доказательство. Рассмотрим двойной ряд, составленный из модулей коэффициентов системы (8)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|G_{sj}^{mn}(\lambda)\right|,\tag{9}$$

где $s,j=1,2,3$, и докажем его сходимость. Ряд (9) содержит ряды вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^{\alpha}I_{n+\beta}(\lambda a)K_{m+n+\gamma}\left(2|\lambda|h\right),\tag{10}$$

где $\alpha\in N$, $\beta,\gamma\in Z$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$, а также ряды, содержащие производные от модифицированных функций Бесселя:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\alpha} \frac{\partial I_{n+\beta}(\lambda\rho)}{\partial(\lambda\rho)}\Bigg|_{\rho=a} K_{m+n+\gamma}\left(2|\lambda|h\right), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\alpha} I_{n+\beta}(\lambda a) \frac{\partial K_{m+n+\gamma}(|\lambda|\rho)}{\partial(|\lambda|\rho)}\Bigg|_{\rho=h}. \tag{11}$$

В случае $\lambda>0$ используем теорему сложения для модифицированных функций Бесселя [10, с.173]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{m+n}(\lambda y) I_n(\lambda x)\cos n\varphi = K_m(\lambda z)\cos m\phi, \tag{12}$$

где $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}$, $\sin\phi=\frac{x}{z}\sin\varphi$. Продифференцировав равенство (10) дважды по переменной φ, положив в полученном равенстве $\varphi=0$ и $\phi=0$ и, заменив $x=a$, $y=2h$, получим соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 K_{m+n}(2\lambda h) I_n(\lambda a) = \frac{\lambda a h}{2h-a}\left[K_{m+1}\left(\lambda(2h-a)\right)+K_{m-1}\left(\lambda(2h-a)\right)\right].$$

Аналогично получим выражения для других значений α в рядах вида (10). Используя формулы для производных [11, с.24]

$$K'_m(\varsigma) = -\frac{K_{m+1}(\varsigma)+K_{m-1}(\varsigma)}{2}, \quad I'_m(\varsigma) = \frac{I_{m+1}(\varsigma)+I_{m-1}(\varsigma)}{2},$$

преобразуем ряды (11) при разных значениях α. С помощью соотношений (10) и (11) ряды, входящие в ряд (9), суммируются по индексу n и таким образом упрощаются. В результате получаем сумму одинарных рядов вида $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{K_{m+\delta}\left(\lambda(2h-a)\right)}{(m^2+1)K_{m+r}(\lambda a)}$, где $\delta, r\in N$, которую обозначим через $L(\lambda,a,h)$. С помощью неравенства [12, с.426]

$$\frac{1}{K_m(\upsilon)} \le \omega m^2 I_m(\upsilon),$$

верного при $|m|\ge 1$, где $\omega=4\sqrt{\pi}e(1+\upsilon)$, $\upsilon>0$, и с учетом того, что $\frac{m^2}{m^2+1}<1$, для функции $L(\lambda,a,h)$ получим оценку сверху:

$$L(\lambda,a,h)\le f(\lambda). \tag{13}$$

Правая часть неравенства (13) при условии $a<h$ является ограниченной функцией параметра λ. Учитывая поведение модифицированных функций Бесселя для $\lambda\to 0$ и $\lambda\to\infty$ [13, с.196, с.199], можно показать, что при $\lambda\to 0$ это конечная величина, а при $\lambda\to\infty$ все слагаемые $f(\lambda)$ стремятся к нулю. Таким образом, при выполнении условия $a<h$ функция $L(\lambda,a,h)$ является положительной и ограниченной для всех $\lambda\in[0,\infty)$, следовательно, ряд (9) является сходящимся. Отсюда следует сходимость ряда, составленного из квадратов модулей коэффициентов $G_{sj}^{mn}(\lambda)$ системы (8).

Доказательство сходимости ряда (9) для случая отрицательного λ с помощью замены $\lambda=-\kappa$, где $\kappa>0$, и соотношения [14, с.246] $I_n(\lambda)=I_n(-\kappa)=(-1)^n I_n(\kappa)$ сводится к предыдущему случаю. Значит, ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|G_{sj}^{mn}(\lambda)\right|^2$ при выполнении условия $a<h$

сходится при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Следовательно, оператор $\tilde{G}$ системы (8) при выполнении условия $a < h$ непересечения граничных поверхностей является вполне непрерывным в пространстве l_2 для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. **Теорема** доказана.

Аналогично доказывается сходимость ряда, составленного из модулей правых частей $Q_j^n(\lambda)$ системы (8) при условии $a < h$ непересечения граничных поверхностей для всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Таким образом, правые части $Q_j^n(\lambda)$ системы уравнений (8) принадлежат пространству l_2.

Из альтернативы Гильберта и принадлежности правых частей системы (8) пространству l_2 следует, что система уравнений (8) рассматриваемой задачи разрешима и имеет единственное решение в пространстве l_2. Ее приближенное решение может быть получено методом редукции [15, с.534].

Проведено исследование распределения напряжений и перемещений в рассматриваемой области для заданных на граничных поверхностях функций: $F\vec{u}_{01}(x,z)/(2G) = \left(0, -\cos(\lambda z)\Big/\left(1+(x/l)^2\right), 0\right)$, $F\vec{u}_{02}(\varphi, z) = \vec{0}$, различных значений величины $\varepsilon = a/h$ и параметров: $\sigma = 0,25$, $\lambda = 1$, $z = 1$, $l = 1$.

Для оценки точности решения функция $F\vec{u}$ вычислялась на граничных поверхностях при разных значениях ε и n, где n – порядок системы. Для каждого значения ε найден минимальный порядок системы n, при котором граничные условия удовлетворяются с точностью 10^{-6}. Так, для $\varepsilon = 0,3$ неравенства $\left|F\vec{u}(x,h,z) - F\vec{u}_{01}(x,z)\right|\Big|_{S_1} < 10^{-10}$ и $\left|F\vec{u}(a,\varphi,z) - F\vec{u}_{02}(\varphi,z)\right|\Big|_{S_2} < 10^{-6}$ выполняются при $n \geq 9$, для $\varepsilon = 0,6$ – при $n \geq 14$, для $\varepsilon = 0,9$ – при $n \geq 25$. Это указывает на быструю сходимость метода редукции. Напряжения существенно зависят от величины ε, они возрастают при $\varepsilon \to 1$.

ВЫВОДЫ

С помощью обобщенного метода Фурье найдено решение однородного уравнения Ламе в упругом полупространстве, содержащем бесконечную круговую цилиндрическую полость, расположенную параллельно его границе, при заданных на граничных поверхностях напряжениях. Использование полученных авторами теорем сложения базисных решений однородного уравнения Ламе для полупространства и цилиндра позволило удовлетворить заданным граничным условиям на поверхности цилиндра и границе полупространства и свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказана теорема о том, что оператор полученной системы является вполне непрерывным в пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений решена методом редукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проценко В. С. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова // Вісник Харківського національного університету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2002. – № 542. – С. 42-51.

2. Проценко В. С. Применение обобщенного метода Фурье для решения задач теории потенциала и теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Украинец // Современные проблемы математики, механики и информатики: сборник статей / [под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича]. – Х. : Апостроф, 2011. – 452 с. – С. 189-200.

3. Проценко В. С. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 52-58.

4. Попова Н. А. Исследование напряженно-деформированного состояния упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / Н.А. Попова // Вісник Харківського національного університету. Серія : Математика, прикладна математика і механіка. – 2004. – № 645. – С. 102-107.

5. Проценко В. С. Смешанная задача для упругого полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Украинец // Теоретическая и прикладная механика. – Донецк, 2006. – № 42. – С. 17-22.

6. Проценко В. С. О некоторых формулах разложения в теории гармонических функций и их применение к решению краевых задач / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Математические методы анализа динамических систем : тематический сборник научных трудов. – Харьков, 1984. – № 8. – С. 50-77.

7. Проценко В. С. Решение пространственных задач теории упругости с помощью формул переразложения / В.С. Проценко, А.Г. Николаев // Прикладная механика. - 1986. – Т. 22, № 7. – С. 83-89.

8. Лурье А. И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.

9. Ерофеенко В. Т. Теоремы сложения : Справочник / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 255 с.

10. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М. : Физматгиз, 1953. – 376 с.

11. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций / Б.Г. Коренев. – М. : Наука, 1971. – 288 с.

12. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М. : Мир, 1980. – 608 с.

13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами : [под ред. М. Абрамовица, И. Стиган]. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

14. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1977. – 326 с.

15. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

REFERENCES

1. Protsenko, V. S. and Popova, N. A. (2002), “The Dirichlet problem for the Laplace equation in the semispace with the cylindrical cavity”, *Visnyk kharkivskogo natsionalnogo universytetu, seriia Matematika, prykladna matematika i mekhanika,* vol. 542, pp. 42-51.

2. Protsenko, V. S. and Ukrainets, N. A. (2011), “Application of the generalized Fourier method to solving the problems of potential theory and elasticity theory in the semispace with the cylindrical cavity”, *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki i informatiki, Sbornik statey,* Edited by Kizilova, N.N. and Zholtkevich, G.N., Apostrof, Kharkiv, pp. 189-200.

3. Protsenko, V. S. and Popova, N. A. (2004), “The second boundary-value problem of elasticity theory for the semispace with the circular cylindrical cavity”, *Dopovidi NAN Ukrainy*, vol. 12, pp. 52-58.

4. Popova, N. A. (2004), “Analysis of the stress-strained state of an elastic semispace with the circular cylindrical cavity”, *Visnyk kharkivskogo natsionalnogo universytetu, seriia Matematika, prykladna matematika i mekhanika,* vol. 645, pp. 102-107.

5. Protsenko, V. S. and Ukrainets, N. A. (2006), "The mixed problem for an elastic semispace with a circular cylindrical cavity", *Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika, Sbornik nauchnykh trudov*, vol. 42, pp. 17-22.
6. Protsenko, V. S. and Soloviov, A. I. (1984), "Some expansions formulas in the theory of harmonic functions and their application to solving boundary value problems", *Matematicheskie metody analiza dinamicheskikh system, Tematicheskiy sbornik nauchnykh trudov*, vol. 8, pp. 50-77.
7. Protsenko, V. S. and Nikolaev, A. G. (1986) "Solving spatial problems of elasticity theory by means of formulas reexpansion", *International Applied Mechanics*, vol. 22, no. 7, pp. 83-89.
8. Lurie, A.I. (1970), *Teoriia upruhosti* [Elasticity theory], Nauka, Moskow, Russia.
9. Yerofeenko, V. T. (1989), *Teoremy slozheniia. Spravochnik* [Addition theorems. Handbook], Nauka i tekhnika, Minsk, Belorussiia.
10. Lebedev, N. N. (1953), *Spetsialnye funktsii i ikh prilozheniya* [Special functions and their applications], Fizmatgiz, Moskow, Russia.
11. Korenev, B. G. (1971), *Vvedenie v teoriyu besselevikh funktsiy* [Introduction to the theory of Bessel functions], Nauka, Moskow, Russia.
12. Lyuk, Yu. (1980), *Spetsialnye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii* [Special mathematical functions and their approximations], Nauka, Moskow, Russia.
13. *Spravochnik po spetsialnym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami* [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables], Edited by Abramowitz, M. and Stegun, I. A., Translated by Ditkin, V.A. and Karmazina, L. N. (1964), Nauka, Moskow, Russia.
14. Janke, J., Emde, F. and Lösch, F. (1977), *Spetsialnye funktsii* [Special functions], Edited by Sedov, L. I., Nauka, Moskow, Russia.
15. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. (1977), *Funktsionalnyi analiz* [Function analysis], Nauka, Moskow, Russia.

UDC 519.833+519.6

FINITE APPROXIMATION OF UNIT-HYPERCUBIC INFINITE NONCOOPERATIVE GAME VIA DIMENSION-DEPENDENT IRREGULAR SAMPLINGS AND RESHAPING THE PLAYER'S PAYOFFS INTO LINE ARRAY FOR SIMPLIFICATION AND SPEEDUP

Romanuke V. V., professor, d. t. s., associate professor

Khmelnitskiy National University,
Institutskaya str., 11, Khmelnitskiy, 29016, Ukraine

romanukevadimv@mail.ru

A method of converting the infinite noncooperative game on the unit hypercube into finite game is suggested. Purpose of the conversion is to obtain an approximate solution of the initial infinite game as the exact solution of the same type in the finite game. There are three steps to get the approximated solution. Firstly the players' payoff functions are sampled on the unit hypercube, what maps the initial infinite game into finite one. The samplings are dimension-dependent and irregular. Irregularity allows to sample quickly oscillating dimensions of payoff values tighter, whereas slowly oscillating dimensions are sampled sparser. The sampled players' payoff functions are multidimensional matrices, given at the second step of approximation. After having reshaped these matrices into matrices, whose number