4. Holland M. Pressurized member with elliptic median line: effect of radial thickness function / M. Holland // J. Mech. Engng Sci. – 1976. – 18, N 5. – P. 245-253.

5. Timoshenko S. Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems / S. Timoshenko. – 2nd Ed. – New York : D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.

6. Chernyshenko I. S. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials / I.S. Chernyshenko, V.A. Maksimyuk // Int. Appl. Mech. –2000. – 36, N 1. – P. 90-97.

7. Mallikarjuna Rao K. A set of pathological tests to validate new finite elements / K. Mallikarjuna Rao, U. Shrinivasa // Sadhana. – 2001. – 26. – P. 549-590.

REFERENCES

1. Soldatos, K.P. (1999), "Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey", *Appl. Mech. Rev*. vol. 52, no. 8, pp. 237-274.

2. Maximyuk, V.A., Storozhuk, E.A. and Chernyshenko, I.S. (2012), "Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review)", *Int. Appl. Mech*., vol. 48, no. 6, pp. 613-687.

3. Bresse, J.A.C.H. (1866), *Cours de mécanique appliquée.* Première partie. *Résistance des matériaux et stabilité des constructions*, *Deuxième Édition*, Gauthier-Villars, Paris, France.

4. Holland, M. (1976), "Pressurized member with elliptic median line: effect of radial thickness function", *J. Mech. Engng Sci*., vol. 18, no. 5, pp. 245-253.

5. Timoshenko, S. (1941), *Strength of materials.* Part II, *Advanced theory and problems, 2nd Ed*, D. Van Nostrand Company, New York, USA.

6. Chernyshenko, I.S. and Maksimyuk, V.A. (2000), "On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials", *Int. Appl. Mech*. vol. 36, no. 1, pp. 90-97.

7. Mallikarjuna Rao, K., Shrinivasa, U. (2001) "A set of pathological tests to validate new finite elements", *Sadhana*. vol. 26, pp. 549-590.

УДК 531.381

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА, БЛИЗКИХ К ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ

[1]Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., профессор, [2]Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., профессор,
[2]Козаченко Т. А., к. ф.-м. н., доцент

[1]Институт проблем механики РАН,
просп. Вернадского, 101, корп.1, Москва, 119526, Россия

[2]Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, 65029, Украина

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Рассматриваются возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа. Проведено усреднение уравнений движения по быстрой переменной – углу нутации. Рассмотрены механические модели возмущений.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, метод усреднения, псевдорегулярная прецессия.

ЕВОЛЮЦІЯ ОБЕРТАНЬ ВОВЧКА ЛАГРАНЖА, БЛИЗЬКИХ ДО ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЇ ПРЕЦЕСІЇ

[1]Акуленко Л. Д., д. ф.-м. н., професор, [2]Лещенко Д. Д., д. ф.-м. н., професор,
[2]Козаченко Т. О., к. ф.-м. н., доцент

[1]*Інститут проблем механіки РАН,*
просп. Вернадського, 101, корп.1, Москва, 119526, Росія

[2]*Одеська державна академія будівництва та архітектури,*
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, 65029, Україна

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Розглядаються збурені рухи твердого тіла, близькі до псевдорегулярної прецесії у випадку Лагранжа. Проведено усереднення рівнянь руху за швидкою змінною – кутом нутації. Розглянуто механічні моделі збурень.
Ключові слова: вовчок Лагранжа, метод усереднення, псевдорегулярна прецесія.

EVOLUTION OF ROTATION OF LAGRANGE TOP, CLOSE TO PSEUDOREGULAR PRECESSION

[1]Akulenko L. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
[2]Leshchenko D. D., D.Sc. in Physics and Maths, Professor, [2]Kozachenko T. A., Associate Professor

[1]*Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,*
Vernadskogo prosp., 101, block 1, Moscow, 119526, Russia

[2]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture,*
Didrikhsona str., 4, Odessa, 65029, Ukraine

kumak@ipmnet.ru, leshchenko_d@ukr.net, kushpil.ru@rambler.ru

Paper [1] is a brief survey of some theoretical results in area of dynamics of the rigid body with one fixed point from view point of the applications to the mechanics of space flight. Only the papers are mentioned here, that are the most close to the results of author and his colleagues.
The authors investigated some new problems of the motion of a rigid body about a fixed point under the action of perturbation torques of forces of different physical nature. The motion with the moment of external forces in Lagrange's case is considered as a nonperturbed motion. The influence of the perturbations is determined by the averaging method for the Lagrange-Poisson motion [3]. The paper [3] develops an approximate solution to a specific set of dynamic equations. These equations are the basic Euler equations with the symmetric heavy mass assumption and an additional εM_i perturbation term (where ε is a small quantity). It is further assumed that the problem can be decomposed into slowly and quickly changing variables, that one quickly changing variable (θ, the nutation angle) has 2π periodicity, and thus that averaging with respect to θ can be accomplished with a small resulting error in the results. The averaging technique reduces the system order from 6 to 3, making the system autonomous, and does not contain fast oscillations. The averaged system of equations of the first approximation is got for slow variables where: G_z is the projection of the angular momentum vector onto the vertical, H – the body's total energy, r is the projection of the angular velocity vector onto the axis of dynamic symmetry.
The authors investigated perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case. The averaged systems of equations of motion is obtained in the first and second approximations [4, 5].
The authors investigated perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case when the restoring torque depends on the nutation angle. Analogously to the case of constant restoring torque, the averaged systems of equations of motion is obtained and investigated in the first and second approximations. For the motion under the action of the resistance torque, applied by the medium, and the torque that is constant in body-connected axes, we have found out the evolution of the precession and nutation angles [7].
In this paper the perturbed motions of Lagrange top similar to pseudoregular precession, are investigated.
1. In this paper a class of rotations of a dynamically symmetric rigid body about a fixed point has been investigated.
2. An averaging procedure has been developed for the resulting essentially nonlinear systems.
3. We consider mechanical models of perturbations related to rigid body motion in the following cases: the linear-dissipative medium or under the action of a torque that is constant in the attached axes.
Key words: Lagrange top, averaging method, pseudoregular precession.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема эволюции вращений твердого тела относительно неподвижной точки продолжает привлекать внимание исследователей. В прикладном аспекте анализ вращательных движений тел относительно неподвижной точки важен для решения задач космонавтики, входа летательных аппаратов в атмосферу, движения вращающегося снаряда, гироскопии. При этом в качестве порождающего (опорного) движения, учитывающего основные моменты сил, действующих на тело, может рассматриваться движение Лагранжа. Напомним, что в этом случае тело предполагается имеющим неподвижную точку и находящимся в поле тяжести, причем центр масс тела и неподвижная точка лежат на оси динамической симметрии тела. Восстанавливающий момент сил, аналогичный моменту сил тяжести, создается также аэродинамическими силами, действующими на тело в потоке среды. Поэтому движения, близкие к случаю Лагранжа, исследовались в целом ряде работ по динамике твердого тела, движущегося относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной физической природы. Исследования в этой области востребованы в связи с развитием современной техники. В статье [1] дается обзор работ, опубликованных до 1998 года по проблеме эволюции вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа. При изучении данной темы были предложены различные методы исследований. Одним из которых является метод усреднения [2]. С помощью данного метода изучается эволюция вращения волчка Лагранжа [3-8], получены усредненные системы уравнений движения в первом и втором приближении. В настоящей статье продолжены и развиты исследования возмущенного вращательного движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, начатые в работе [6].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется возмущенное движение относительно неподвижной точки O динамически симметричного тяжелого твердого тела в случае возмущений произвольной природы. Уравнения движения имеют вид [3]:

$$
\begin{gathered}
A\dot{p} + (C - A)qr = mgl\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1, \\
A\dot{q} + (A - C)pr = -mgl\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2, \\
C\dot{r} = \varepsilon M_3,\ M_i = M_i(p,\ q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi),\ i = 1, 2, 3, \\
\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \\
\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \\
\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $p,\ q,\ r$ – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; $\psi,\ \theta,\ \varphi$ – углы Эйлера; величины $\varepsilon M_i\ (i = 1, 2, 3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси; ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений; m – масса тела, g – ускорение силы тяжести, l – расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O.

Ставится задача исследования поведения решения системы (1.1) при значениях ε, отличных от нуля, на достаточно большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-1}$ с помощью метода усреднения [2]. Исследованию возмущенных движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, посвящены работы [3-10].

Приведем необходимые для процедуры усреднения соотношения для невозмущенного движения. Первыми интегралами уравнений для системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ являются [11, 12]:

$$G_z = A\sin\theta\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right) + Cr\cos\theta = c_1,$$
$$H = \frac{1}{2}\left[A\left(p^2+q^2\right)+Cr^2\right] + mgl\cos\theta = c_2, \quad r = c_3. \tag{1.2}$$

Здесь G_z – проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz, H – полная энергия тела, r – проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии, c_i $(i=1,2,3)$ – произвольные постоянные $(c_2 \geq -mgl)$.

Соотношения между корнями кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2}\left[\left(2H - Cr^2 - 2\mu u\right)\left(1-u^2\right)A - \left(G_z - Cru\right)^2\right]$$

и первыми интегралами (1.2) записываются следующим образом:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{mgl} - \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{C^2r^2}{2Amgl},$$
$$u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = \frac{G_zCr}{Amgl} - 1, \tag{1.3}$$
$$u_1u_2u_3 = -\frac{H}{mgl} + \frac{Cr^2}{2mgl} + \frac{G_z^2}{2Amgl},$$
$$-1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 \leq u_3 < +\infty.$$

В работе делаются следующие исходные предположения: $p^2+q^2 << r^2$, $Cr^2/2 >> mql$, которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии. Движение твердого тела в этом случае будет соответствовать псевдорегулярной прецессии [11].

Известны [11] приближенные выражения для угла нутации θ и корней u_i $(i=1,2,3)$ в невозмущенном движении:

$$u \approx u_0 - \frac{1-u_0^2}{2d}\cos^2\left(\alpha t + \beta\right), \quad u_1 \approx u_0 - \frac{1-u_0^2}{2d}, \quad u_2 = u_0,$$
$$k^2 = \left(u_2 - u_1\right)\left(u_3 - u_1\right)^{-1} \ll 1, \quad u_3 \approx 2d, \quad u_1 << u_3. \tag{1.4}$$

Здесь $u_0 = \cos\theta_0$, θ_0 – начальный угол отклонения; $2d = \dfrac{C^2r_0^2}{2Amgl} >> 1$, r_0 – большая начальная скорость вращения тела вокруг своей оси; $\alpha = \left[mgl\left(u_3-u_1\right)/\left(2A\right)\right]^{1/2}$, k – модуль эллиптических функций.

Переменные φ и ψ получаются квадратурами из следующих уравнений [12]:

$$\dot\varphi = r - \frac{\left(G_z - Cru\right)u}{A\left(1-u^2\right)}, \quad \dot\psi = \frac{G_z - Cru}{A\left(1-u^2\right)}. \tag{1.5}$$

Формулы (1.2)-(1.5) описывают решение системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ в случае псевдорегулярной прецессии.

Корни кубического многочлена u_1, u_2 выражаются через первые интегралы уравнений движения невозмущенной системы из (1.3) с учетом (1.4), где

$$u_3 \approx \frac{C^2 r_0^2}{2Amgl}, \quad u_1 = s \mp \sqrt{s^2 - n}, \quad u_2 = s \pm \sqrt{s^2 - n}. \tag{1.6}$$

Здесь $s = (4Amgl)^{-1}\left[2AH + C(C-A)r_0^2 - C^2 r_0^2\right]$, $n = C^{-2} r_0^{-2}\left(-2AH + ACr_0^2 + G_z^2\right)$.

В рассматриваемой задаче параметр ε характеризует малость возмущений. Так как модуль эллиптических функций $k^2 \ll 1$, то можно положить, что $k^2 \sim \delta \ll 1$ (δ характеризует аппроксимацию порождающего решения). При $\varepsilon < \delta$ или $\varepsilon \sim \delta$ усреднение оправдано.

2. ПРОЦЕДУРА УСРЕДНЕНИЯ

В работе применяется методика усреднения, разработанная Л. Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько [3]. Уравнения возмущенного движения приводим к виду, допускающему применение одночастотной процедуры метода усреднения [2]. Выделим быстрые и медленные переменные, при этом первые интегралы (1.2) для возмущенного движения (1.1) являются медленными переменными, а в случае псевдорегулярной прецессии угол прецессии ψ – также медленная переменная [12]. Быстрыми переменными являются углы собственного вращения φ и угол нутации θ.

Первые три уравнения (1.1) приведем с помощью ряда преобразований к виду [3]:

$$\dot{G}_z = \varepsilon\left[(M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi)\sin\theta + M_3 \cos\theta\right],$$
$$\dot{H} = \varepsilon(M_1 p + M_2 q + M_3 r), \tag{2.1}$$
$$\dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь и в трёх последних уравнениях (1.1) подразумевается, что переменные p, q, r при помощи (1.2) выражены как функции $G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi$ и подставлены в (1.1), (2.1).

Правые части уравнений (2.1) содержат две быстрые переменные θ, φ, что представляет трудность для применения метода усреднения, связанную с возможностью появления нелинейных резонансов. Потребуем, чтобы правые части уравнений (2.1) для медленных переменных зависели лишь от одной быстрой переменной – угла нутации θ и были бы периодическими функциями с периодом 2π. Тогда уравнение (2.1) можно усреднить по θ и получить уравнение первого приближения.

Приведем некоторые достаточные условия возможности усреднения уравнений (2.1) только по углу нутации θ. Потребуем, чтобы путем тождественных преобразований комбинации $M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi$, $M_1 p + M_2 q$, M_3, входящие в правые части уравнений (2.1), могли быть представлены как функции от медленных переменных и от угла нутации θ, периодические по θ с периодом 2π, и имели следующие структурные свойства возмущающего момента сил:

$$M_1 \sin\varphi + M_2 \cos\varphi = M_1^*(G_z, H, r, \theta),$$
$$M_1 p + M_2 q = M_2^*(G_z, H, r, \theta), \tag{2.2}$$
$$M_3 = M_3^*(G_z, H, r, \theta).$$

Из соотношений (1.2) и (2.2) видим, что если возмущающие моменты M_i удовлетворяют условиям

$$M_1 = pf, \quad M_1 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta) \tag{2.3}$$

или условиям

$$M_1 = F\sin\varphi,\quad M_2 = F\cos\varphi,\quad M_3 = M_3^*,\tag{2.4}$$

где произвольные функции $f,\, F,\, M_3^*$ зависят только от $G_z,\, H,\, r,\, \theta$ и периодичны по θ с периодом 2π, то налагаемые требования (2.2) выполняются.

Таким образом, достаточными условиями усреднения уравнений медленных переменных (2.1) по углу нутации θ являются требования (2.3) или (2.4), налагаемые на моменты приложенных сил. В дальнейшем предполагаются выполненными необходимые и достаточные условия (2.2) или, в частности, достаточные условия (2.3) или (2.4), что обеспечивает справедливость соотношений (2.2).

Система (2.1) тогда может быть представлена в форме:

$$\begin{aligned}
&\dot{G}_z = \varepsilon F_1\left(G_z, H, r, \theta\right), \quad F_1 = M_1^*\sin\theta + M_3^*\cos\theta,\\
&\dot{H} = \varepsilon F_2\left(G_z, H, r, \theta\right), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r,\\
&\dot{r} = \varepsilon F_3\left(G_z, H, r, \theta\right), \quad F_3 = C^{-1}M_3^*.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

Здесь $F_1,\, F_2,\, F_3 - 2\pi$ -периодические функции θ.

Процедура усреднения уравнений (2.5) для медленных переменных $G_z,\, H,\, r$ первого приближения состоит в следующем [2]. Подставим в правые части системы (2.5) быструю переменную θ из первого выражения (1.4) для невозмущенного движения

$$\theta = \arccos\left[u_0 - \frac{1-u_0^2}{2d}\cos^2\left(\alpha t + \beta\right)\right].\tag{2.6}$$

Усредняя правые части полученной системы по t, получим с учетом (1.3), (1.4) усреднённую систему первого приближения:

$$\begin{aligned}
&\dot{G}_z = \varepsilon V_1\left(G_z, H, r\right), \quad \dot{H} = \varepsilon V_2\left(G_z, H, r\right), \quad \dot{r} = \varepsilon V_3\left(G_z, H, r\right),\\
&V_i\left(G_z, H, r\right) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} F_i\left(G_z, H, r, \theta(t)\right)dt, \quad i = 1,2,3,
\end{aligned}\tag{2.7}$$

причем в качестве $\theta = \theta(t)$ в (2.7) подставлено выражение (2.6).

Согласно предлагаемой методике, исследование возмущенного движения Лагранжа, близкого к псевдорегулярной прецессии, проводится следующим образом. Пусть возмущающие моменты εM_i удовлетворяют условиям (2.2) или в частности, (2.3), (2.4) (вместе с (2.5)). Вычислим функции $M_i^*,\, F_i\ \left(i = 1,2,3\right)$ при помощи соотношений (2.2), (2.5). После этого усредним, согласно (2.7), функции F_i, используя выражения (1.4), (2.6), и составим усреднённую систему. Система (2.7) значительно проще, чем исходная система (1.1), так как она имеет третий порядок вместо шестого, автономна и не содержит быстрых осцилляций.

Вопрос о близости решений системы (2.5) и усредненной системы (2.7) в случае решения θ вида (2.6), имеющего погрешность $O(\delta)$, где $\delta \ll 1$ малый параметр, рассматривается в [13].

На интервале времени порядка ε^{-1} оценка близости решений систем (2.5), (2.7) состоит из суммы оценки аппроксимации порождающего решения δ и малого параметра ε, характеризующего величину возмущений [13].

После исследования и решения системы (2.7) для $G_z,\, H,\, r$ медленные переменные $u_1,\, u_2$ определяются по формулам (1.6).

3. ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИССИПАТИВНОГО МОМЕНТА

Исследуем возмущенное движение, близкое к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Считаем, что возмущающие моменты M_i $(i=1,2,3)$ имеют вид [14]:

$$M_1=-ap,\quad M_2=-aq,\quad M_3=-br,\quad a,b>0, \tag{3.1}$$

где a, $b-$ некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (3.1) удовлетворяют достаточным условиям (2.3), (2.4) возможности усреднения только по углу нутации θ. Система (2.1) для моментов указанного вида записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{G}_z=-\varepsilon\left[a\left(p\sin\varphi+q\cos\varphi\right)\sin\theta+br\cos\theta\right],\\ \dot{H}=-\varepsilon\left[a\left(p^2+q^2\right)+br^2\right],\\ \dot{r}=-\varepsilon C^{-1}br.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Проинтегрировав третье уравнение (3.2), получим (r_0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения, $\tau=\varepsilon t$ – медленное время):

$$r=r^0\exp\left(-bC^{-1}\tau\right). \tag{3.3}$$

В первых двух уравнениях (3.2) выполним усреднение согласно (2.7), подставляя вместо r его выражение (3.3). После ряда преобразований усредненная система первого приближения принимает вид (штрихом обозначено дифференцирование по τ):

$$\begin{gathered}G_z'=-aA^{-1}G_z-\frac{b-aCA^{-1}}{4Amgl}r_0\exp\left(-bC^{-1}\tau\right)\left[2AH+Cr_0^2\left(C-A\right)\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right)-C^2r_0^2\right],\\ H'=-aA^{-1}H+\left[\frac{aC^2}{2A^2}+\frac{aC}{2A}-b\right]r_0^2\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right)-\frac{aC^2r_0^2}{2A^2}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Решение системы (3.4) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}G_z=-\frac{C^3r_0^3}{2Amgl}\exp\left(-bC^{-1}\tau\right)+\mu\frac{\left(bA-aC\right)Cr_0}{2bmgl}\exp\left[-\tau\left(aA^{-1}+bC^{-1}\right)\right]\\ -\xi\exp\left(-3bC^{-1}\tau\right)+\eta\exp\left(-aA^{-1}\tau\right),\\ H=\frac{\left(aC^2+aAC-2bA^2\right)Cr_0^2}{2A\left(aC-2bA\right)}\exp\left(-2bC^{-1}\tau\right)-\frac{C^2r_0^2}{2A}+\mu\exp\left(-aA^{-1}\tau\right),\end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$\mu=H_0-\frac{Cr_0^2}{2}-\frac{bC^2r_0^2}{aC-2bA},\quad \xi=\frac{C^3r_0^3\left(aC-bA\right)^2}{2Amgl\left(aC-2bA\right)\left(aC-3bA\right)},$$

$$\eta=G_{z0}+\frac{C^3r_0^2}{2Amgl}-H_0\frac{\left(bA-aC\right)Cr_0}{2bmgl}+\frac{C^2r_0^3\left[A\left(aC-3bA\right)\left(2bC-2bA+aC\right)-2bC\left(aC-bA\right)\right]}{4bAmgl\left(aC-2bA\right)\left(aC-3bA\right)}.$$

Здесь H_0, G_{z0} – произвольные начальные значения полной энергии тела и проекции вектора кинетического момента на вертикаль Oz.

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r и проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz монотонно уменьшаются по экспонентам согласно (3.3), (3.5). Полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H=-C^2r_0^2/2A$. Из (1.6) с учетом (3.3), (3.5) следует, что величины u_1, u_2 монотонно убывают и стремятся к

$$u_1=-\frac{C^2r_0^2}{Amgl}\mp\sqrt{\left(\frac{C^2r_0^2}{Amgl}\right)^2-1},\quad u_2=-\frac{C^2r_0^2}{Amgl}\pm\sqrt{\left(\frac{C^2r_0^2}{Amgl}\right)^2-1}.$$

4. ДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННОГО МОМЕНТА, ПРИЛОЖЕННОГО ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ

Рассмотрим движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты $M_i\ (i=1,2,3)$ в этом случае имеют вид:

$$M_1=M_2=0,\quad M_3=M_3^0=\mathrm{const} \tag{4.1}$$

и удовлетворяют достаточным условиям (2.3), (2.4) возможности усреднения по углу нутации. Система (2.1) для моментов (4.1) записывается следующим образом:

$$\dot{G}_z=\varepsilon M_3^0\cos\theta,\quad \dot{H}=\varepsilon M_3^0 r,\quad \dot{r}=\varepsilon C^{-1}M_3^0. \tag{4.2}$$

Проинтегрировав третье уравнение (4.2), получим (r_0 – произвольное начальное значение осевой скорости вращения):

$$r=\varepsilon C^{-1}M_3^0 t+r_0. \tag{4.3}$$

С учетом (4.3) уравнения для полной энергии (4.2), сохраняя члены порядка ε, интегрируется и дает:

$$H=\varepsilon r_0 M_3^0 t+H_0. \tag{4.4}$$

Усредняя правую часть первого уравнения (4.2) согласно (2.7), получим в результате интегрирования:

$$G_z=\frac{\varepsilon M_3^0 t}{2mgl}\left(H_0-\frac{Cr_0^2}{2}\right)+G_{z0}. \tag{4.5}$$

Согласно (4.3), величина $|r(t)|$ возрастает, если параметры r_0, M_3^0 имеют одинаковый знак, и убывает, если знаки различны. Из (4.4) следует, что величина $|H(t)|$ возрастает, если у параметров H_0, M_3^0 одинаковые знаки, и убывает если разные. Согласно (4.5) величина $|G_z(t)|$ возрастает, если параметры G_{z0}, $M_3^0\left(H_0-Cr_0^2/2\right)$ имеют одинаковый знак, и убывает, если знаки различны.

ВЫВОДЫ

1. Исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений медленных переменных по углу нутации. В отличие от [3,8], в качестве порождающего решения берется не общее решение в случае Лагранжа, выражающееся в эллиптических функциях, а приближенное, представляемое в элементарных функциях.

2. Согласно используемой методике, полученная усредненная система уравнений первого приближения значительно проще исходной, так как автономна и не содержит быстрых осцилляций.

3. В качестве примеров рассмотрены механические модели возмущений, отвечающие движению тела в среде с линейной диссипацией, а также под действием постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии. Усредненная система уравнений интегрируется и позволяет определить полную энергию тела, проекцию вектора кинетического момента на вертикаль и угловую скорость вращения тела относительно оси симметрии в аналитическом виде. Полученные решения имеют самостоятельное значение для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лещенко Д. Д. Эволюция вращений твердого тела, близких к случаю Лагранжа / Д.Д. Лещенко // Российско-американский журнал «Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, методы, эксперимент». – 1998. – Вып. 2.(6). – С. 32-37.

2. Волосов В. М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. – М. : Изд-во МГУ, 1971 – 507 с.

3. Акуленко Л. Д**.** Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, №5. – С. 771-778.

4. Акуленко Л. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Ф.Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №5. – С. 3-10.

5. Лещенко Д. Д. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа / Д.Д. Лещенко, А.С. Шамаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – №6. – С.8-17.

6. Лещенко Д. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к псевдорегулярной прецессии / Д.Д. Лещенко, С.Н. Саллам. – Одессаб 1988. – 18 с. – Деп. в УкрНИННТИ 28.06.1988, №1656 – Ук.88.

7. Akulenko L. Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments / Akulenko L. Leshchenko D, Kushpil T. and Timoshenko I // Multibody System Dynamics. – 2001. – Vol. 6, №1. – P. 3-16.

8. Козаченко Т. А. Возмущённые вращения волчка Лагранжа под действием нестационарных диссипативных моментов / Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская // Вісник Одеського нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2011. – Т. 16, Вип. 16. – С. 152-157.

9. Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium / V.V. Sidorenko // J. Nonlinear Sci. – 1994. – Vol. 4. – P. 35-57.

10. Simpson H. C. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction / H.C. Simpson, M.D. Gunzburger // J. Appl. Math. and Phys. – 1986. – Vol. 37, №6. – P. 867-894.

11. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение / Курт Магнус. – М. : Мир, 1974. – 526 с.

12. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Гавриил Константинович Суслов. – М.-Л. : Гостехиздат, 1946. – 655 с.

13. Мухин Н. П. Упрощенный алгоритм асимптотического интегрирования существенно нелинейных систем / Н.П. Мухин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №6. – С. 51-54.

14. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / Владимир Николаевич Кошляков. – М. : Наука, 1985. – 288 с.

REFERENCES

1. Leshchenko, D.D. (1998), "The evolution of the rigid body motions, close to Lagrange case", *International Russian-American Scientific Journal "Actual problems of aviation and aerospace systems: processes, models, experiment"*, issue 2(6), pp. 32-37.

2. Volosov, V.M. and Morgunov, B.I. (1971), *Metod osrednenia v teorii nelineynykh kolebatelnykh system* [Method of averaging in the theory of nonlinear oscillatory systems], Izdatelstvo MGU, Moscow, Russia.

3. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. and Chernousko, F.L. (1979), "Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 43, no. 5, pp. 771-778.

4. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. and Chernousko, F.L. (1986), "Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession", *Mechanics of Solids*, no. 5, pp. 3-10.

5. Leshchenko, D.D. and Shamaev, A.S. (1987), "Perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case", *Mechanics of Solids*, no. 6, pp. 8-17.

6. Leshchenko, D.D. and Sallam, S.N. (1988), "Perturbed motions of a rigid body similar to pseudoregular precession", Dep. v UkrNIINTI 28.06.1988, no. 1656. – Uk.88.

7. Akulenko, L., Leshchenko, D., Kushpil, T. and Timoshenko, I. (2001), "Problems of Evolution of Rotations of a Rigid Body under the Action of Perturbing Moments", *Multibody System Dynamics*, vol. 6, no. 1, pp. 3-16.

8. Kozachenko, T.A, Leshchenko, D.D. and Rachinskaya, A.L. (2011), "Perturbed rotation of Lagrange top under the action of nonstationary dissipative torques", *Visnyk Odeskogo nationalnogo universytetu*, *Matematyka i mekhanika*, vol. 16, issue 6, pp. 152-157.

9. Sidorenko, V.V. (1994), "Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium", *J. Nonlinear Sci.*, vol. 4, pp. 35-57.

10. Simpson, H.C. (1986), "A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction", *J. Appl. Math. and Phys.*, vol. 37, no. 6, pp. 867-894.

11. Magnus, K. (1971), *Giroskop.Teoriya I primeneniye* [Kreisel. Theorie und Anwendungen], Springe-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

12. Suslov, G.K. (1946), *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics], Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, Russia.

13. Mukhin, N.P. (1985), "Simplified algorithm of asymptotic integration substantially of the nonlinear systems", *Mechanics of Solids*, no. 6, pp. 51-54.

14. Koshlyakov, V.N. (1985), *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in rigid body dynamics and the applied theory of gyroscopes. Analytical methods], Nauka, Moscow, Russia.